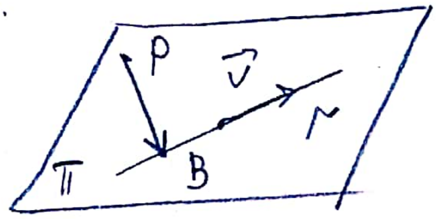
P_2, turma A

1. 

A reta de interseção dos π_1 e π_2 tem vetor diretor

$$\vec v = \vec n_1 \times \vec n_2 = \det\begin{pmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec i & \vec j \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$= 3\vec i + 3\vec j - 2\vec k + 3\vec k + 3\vec i + 2\vec j = 6\vec i + 5\vec j + \vec k = \underline{(6,5,1)}$$

Seja ponto $B \in r \Rightarrow \vec{PB}$ e $\vec v$ são vetores diretores do plano $\pi \Rightarrow$ vetor normal do π é $\vec n = \vec{PB} \times \vec v$.

Procuremos B: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = z \\ -2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 1$. Logo, $B = \underline{(0,1,1)} \Rightarrow$

$\vec{PB} = \underline{(-1,0,0)}$. Assim, $\vec n = \vec{PB} \times \vec v = \det\begin{pmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \vec j - 5\vec k = \underline{(0,1,-5)}$

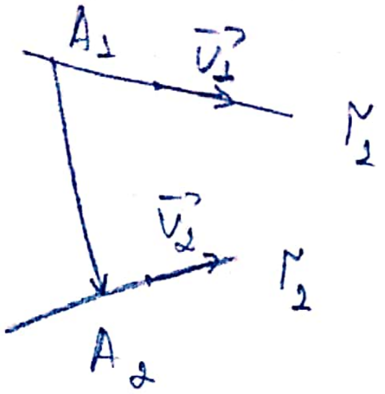
A equação geral do π tem forma:

$\pi: ax + by + cz = d$, onde $\vec n = (a,b,c) \Rightarrow$

$\pi: 12y - 5z = d$. Como $B = (0,1,1) \in \pi$,

$12 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = \underline{7 = d} \Rightarrow \underline{\pi: 12y - 5z = 7}$.

2.



Vamos achar vetores diretores $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ das r_1, r_2

$$\vec{v_1} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{matrix} =$$

$$= \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} + \vec{j} = \underline{(1,4,3)}$$

$$\vec{v_2} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -2\vec{j} - \vec{k} - \vec{i} - \vec{j} =$$

$$= \underline{(-1,-3,-1)}$$

Como $\vec{v_1} \nparallel \vec{v_2}$, as retas são ou reversas ou concorrentes.

Lembra que r_1 e r_2 são reversas $\Leftrightarrow$

$\vec{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \neq 0$.

Procuremos $A_1 \in r_1$: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$z = y = -1 \Rightarrow \underline{A_1 = (0,-1,-1)}$

$A_2 \in r_2$: seja $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{A_2 = (0,0,0)}$

$$\text{Logo, } \vec{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{matrix} =$$

$= -3 - 3 + 4 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow r_1$ e r_2 são <u>reversas</u>

Lembra que $d(r_1, r_2) = \dfrac{|\vec{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|}$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{matrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} + 4\vec{k} + 9\vec{i} + \vec{j} = 13\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (13, -2, 1) \Rightarrow$$

$$\| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \| = \sqrt{169 + 4 + 1} = \sqrt{174}$$

Logo, $d(r_1, r_2) = \dfrac{1}{\sqrt{174}}$

3. As equações de mudança de Σ_2 para Σ_1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\Sigma_1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\Sigma_2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x' \\ y = x' + y' + z' \\ z = -1 - y' + z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y = x + y' + z' \\ z = -1 - y' + z' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y + z = x - 1 + 2z' \\ y = x + y' + z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ z' = \dfrac{y + z - x + 1}{2} \\ y' = y - x - z' = y - x - \dfrac{y + z - x + 1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} \\ z' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} \end{cases}$$

a) Logo r: $\begin{cases} x' = -1 + t \\ y' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1 - t + 1 - t - 1 - t}{2} \\ z' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 - t + 1 - t + 1 + t}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' = -1 + t \\ y' = -\dfrac{3}{2} t \\ z' = 2 - \dfrac{t}{2} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

b) $\pi: [x - 2y - z = 0]_{\Sigma_1}$ ou

$x' - 2(x'+y'+z') - (-1 - y' + z') = 0$ ou

$-x' - y' - 3z' = -1$ é equação geral de π em Σ_2.

4. a) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 1 = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) -$

$-9(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}) - 1 = 4(x-1)^2 - 9(y - \frac{1}{3})^2 - 4 + 1 - 1 =$

$= 4(x-1)^2 - 9(y - \frac{1}{3})^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 - \dfrac{(y - \frac{1}{3})^2}{\frac{4}{9}} = 1$ é hiperbole

Denotando $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - \frac{1}{3} \end{cases}$, obtemos a equação reduzida no sistema $\Sigma_2 x'y'$

$(x')^2 - \dfrac{(y')^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$

b) O centro é $(1, \frac{1}{3})$ e semieixos são: $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$