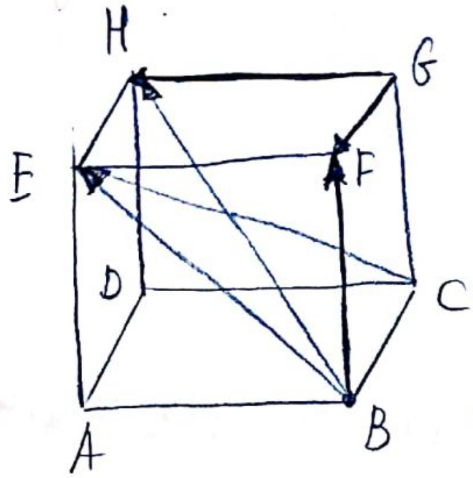
1ª Questão:(3 pontos)

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo.

a) (1 ponto) Ache as coordenadas do vetor $\overrightarrow{CE}$ na base $M = (\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{BF})$.

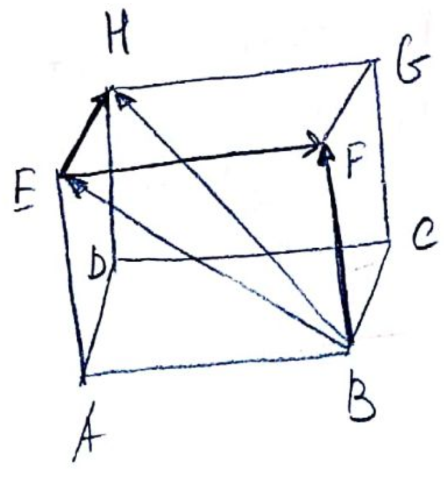
b) (2 pontos) Ache as coordenadas dos pontos E, H no sistema de coordenadas $\Sigma = (B, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{BF})$.



a) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} =$

$= \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{BF} =$

$= \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{BF} = (1, 1, 1)$



b) $E : \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} =$

$= \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{EF} =$

$= (-1)\overrightarrow{EF} + 0 \cdot \overrightarrow{EH} + 1 \cdot \overrightarrow{BF}$

$\Rightarrow E = (-1, 0, 1)_\Sigma$

$H : \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH} =$

$= \overrightarrow{BF} + \underbrace{\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EF}}_{FH} =$

$= (-1)\overrightarrow{EF} + 1 \cdot \overrightarrow{EH} + 1 \cdot \overrightarrow{BF} \Rightarrow$

$H = (-1, 1, 1)_\Sigma$

Scanned by CamScanner

2ª Questão:(1.5 pontos) Prove que se os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formam uma base, então os vetores $\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}, 2\vec{v} + \vec{w}, 3\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$ também formam uma base.

$\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}$, $2\vec{v} + \vec{w}$, $3\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$ formam uma base se eles forem LI.

Consideremos:

$$\lambda_1(\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}) + \lambda_2(2\vec{v} + \vec{w}) + \lambda_3(3\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 3\lambda_3)\vec{u} + (-2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)\vec{v} + (-2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{w} = \vec{0}$$

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, obtemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ 6\lambda_3 + \lambda_3 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}$, $2\vec{v} + \vec{w}$, $3\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$ são LI

$\Rightarrow$ formam uma base.

3ª Questão: (2.5 pontos) Determine um vetor $\vec{u}$ que seja ortogonal aos vetores de coordenadas $(2,1,0)$ e $(-1,1,1)$ numa base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tem norma $\sqrt{3}$, e $\vec{u} \cdot \vec{k} > 0$.

Sejam $\vec{v} = (2,1,0)$, $\vec{w} = (-1,1,1)$. Como $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$, o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao $\vec{v} \times \vec{w}$, portanto $\vec{u} = \lambda(\vec{v} \times \vec{w})$

Temos $\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} =$

$= \vec{i} + 2\vec{k} + \vec{k} - 2\vec{j} = (1, -2, 3)$

$\vec{u} = \lambda(1, -2, 3) = (\lambda, -2\lambda, 3\lambda)$

Como, $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{u}\|^2 = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda^2 =$

$= 14\lambda^2 = 3 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{14}} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{u} = \left(\sqrt{\frac{3}{14}}, -2\sqrt{\frac{3}{14}}, 3\sqrt{\frac{3}{14}}\right) \\ \vec{u} = \left(-\sqrt{\frac{3}{14}}, 2\sqrt{\frac{3}{14}}, -3\sqrt{\frac{3}{14}}\right) \end{array}\right.$$

Como, $\vec{u} \cdot \vec{k} > 0$, $\vec{u} = \left(\sqrt{\frac{3}{14}}, -2\sqrt{\frac{3}{14}}, 3\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$

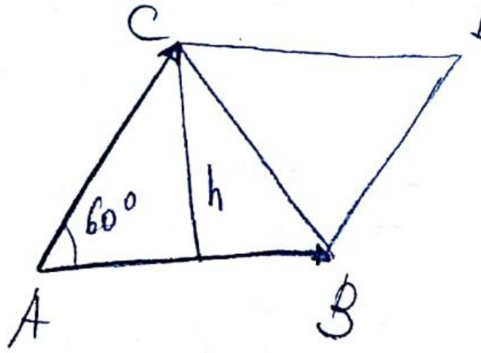
Scanned by CamScanner

4ª Questão:(3 pontos)

a) (1 ponto) O lado de um triânulo ABC equilátero mede $\sqrt{5}$. Ache $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$.

b) (2 pontos) Dados os pontos $A = (1, 0, 1), B = (0, 1, 1), C = (1, 0, 0), D = (0, 0, 1)$ num sistema cartesiano. Ache a altura do paralelepípedo formado por vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

a)

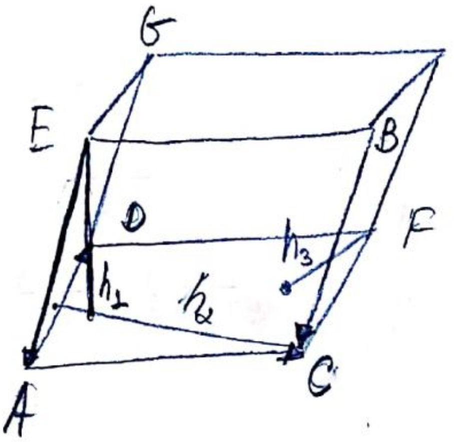


$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = S_{ABCD} =$$
$$= 2 S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB =$$
$$= \operatorname{sen} 60^\circ \, AC \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

b) $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 0, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (1, -1, -1)$



O paralelepípedo possui 3 alturas h_1, h_2, h_3

Temos: $V_p = h_1 \cdot S_{b_1} = h_1 \cdot S_{ACFD} = h_1 \cdot \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\|$ (1)

$V_p = h_2 \, S_{b_2} = h_2 \cdot S_{ADGE} = h_2 \cdot \|\underset{\overrightarrow{CB}}{\underset{\|}{\overrightarrow{AE}}} \times \overrightarrow{AD}\|$ (2)

$V_p = h_3 \, S_{b_3} = h_3 \cdot S_{EACB} = h_3 \cdot \|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AC}\|$ (3)

Do outro lado, $V_p = |(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}|$ (4)

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{j} = (0,1,0) \Rightarrow$$

$$\|\vec{AC} \times \vec{AD}\| = 1$$

$$\vec{AE} \times \vec{AD} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\vec{j} + \vec{k} = (0,-1,1)$$

$$\Rightarrow \|\vec{AE} \times \vec{AD}\| = \sqrt{2}.$$

$$\vec{AE} \times \vec{AC} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} = (-1,-1,0)$$

$$\Rightarrow \|\vec{AE} \times \vec{AC}\| = \sqrt{2}$$

$$|(\vec{AC} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}| = \left|\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$$

$(1) + (4) \Rightarrow h_1 = 1$

$(2) + (4) \Rightarrow h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(3) + (4) \Rightarrow h_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$