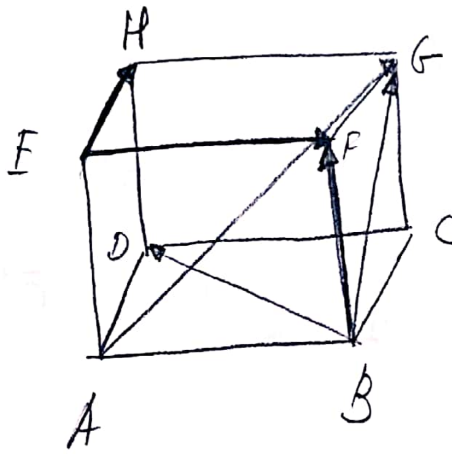
1ª Questão:(3 pontos)

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo.

a) (1 ponto) Ache as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AG}$ na base $M = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{BF})$.

b) (2 pontos) Ache as coordenadas dos pontos D, G no sistema de coordenadas $\Sigma = (B, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{BF})$.



a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} =$

$= \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} =$

$= (1, 1, 1)$

b) $D: \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EF} =$

$= (-1)\overrightarrow{EF} + 1 \cdot \overrightarrow{EH} + 0 \cdot \overrightarrow{BF} = (-1, 1, 0)$

$\Rightarrow D = (-1, 1, 0)_\Sigma$

$G: \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH} = 0 \cdot \overrightarrow{EF} + 1 \cdot \overrightarrow{EH} + 1 \cdot \overrightarrow{BF} =$

$= (0, 1, 1)$

$\Rightarrow G = (0, 1, 1)_\Sigma$

Scanned by CamScanner

2^a **Questão:**(1.5 pontos) Prove que se os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formam uma base, então os vetores $2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - 3\vec{w}, \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ também formam uma base.

$2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - 3\vec{w}, \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ formam uma base se eles forem LI

Consideremos:

$\lambda_1(2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}) + \lambda_2(\vec{v} - 3\vec{w}) + \lambda_3(\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow$

$(2\lambda_1 + \lambda_3)\vec{u} + (-2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3)\vec{v} + (\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3)\vec{w} = \vec{0}$

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, obtemos:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ \lambda_1 = -\frac{\lambda_2}{4} \\ \lambda_1 = -3\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto $2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - 3\vec{w}, \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ são LI

$\Rightarrow$ formam uma base.

3ª Questão: (2.5 pontos) Determine um vetor $\vec{u}$ que seja ortogonal aos vetores de coordenadas $(1,1,1)$ e $(-1,0,1)$ numa base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tem norma $\sqrt{2}$, e $\vec{u} \cdot \vec{k} < 0$.

Sejam $\vec{v} = (1,1,1)$, $\vec{w} = (-1,0,1)$. Como $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$, o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao $\vec{v} \times \vec{w}$, portanto $\vec{u} = \lambda(\vec{v} \times \vec{w})$

Temos $\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} =$

$= \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} - \vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (1,-2,1)$

$\vec{u} = \lambda(1,-2,1) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$

Como, $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{u}\|^2 = 6\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$

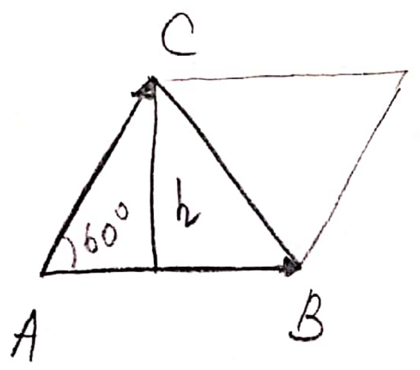
Como $\vec{u} \cdot \underset{\substack{\| \\ (0,0,1)}}{\vec{k}} < 0$, $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Scanned by CamScanner

4ª Questão:(3 pontos)

a) (1 ponto) O lado de um triânulo ABC equilátero mede $\sqrt{3}$. Ache $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$.

b) (2 pontos) Dados os pontos $A = (1,0,1), B = (0,1,1), C = (1,0,0), D = (0,0,1)$ num sistema cartesiano. Ache a altura do paralelepípedo formado por vetores $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}$.

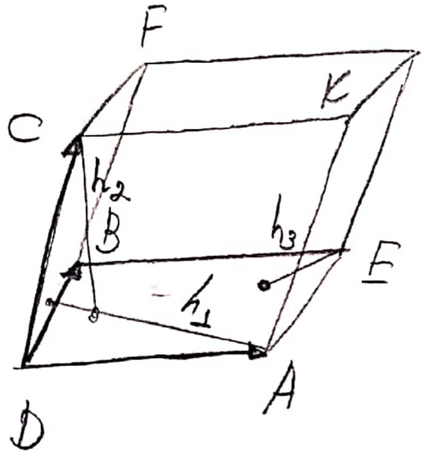


$$||\vec{AB} \times \vec{AC}|| = S_{ABDC} =$$
$$= 2 S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB =$$
$$= \operatorname{sen} 60° \cdot AC \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b) $\vec{DA} = (1,0,0)$

$\vec{DC} = (1,0,-1)$

$\vec{DB} = (0,1,0)$



O paralelepípedo possui 3 alturas h_1, h_2, h_3

Temos: $V_p = h_1 \cdot S_{b_1} = h_1 \cdot S_{DCFB} = h_1 \cdot ||\vec{DC} \times \vec{DB}||$ (1)

$V_p = h_2 \cdot S_{b_2} = h_2 \cdot S_{DAEB} = h_2 \cdot ||\vec{DA} \times \vec{DB}||$ (2)

$V_p = h_3 \cdot S_{b_3} = h_3 \cdot S_{CDAK} = h_3 \cdot ||\vec{DC} \times \vec{DA}||$ (3)

Do outro lado, $V_p = |(\vec{DC} \times \vec{DB}) \cdot \vec{DA}|$ (4)

$$\vec{DC} \times \vec{DB} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{k} = (1,0,1)$$

$$\Rightarrow \|\vec{DC} \times \vec{DB}\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{DA} \times \vec{DB} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{k} = (0,0,1) \Rightarrow$$

$$\|\vec{DA} \times \vec{DB}\| = 1$$

$$\vec{DC} \times \vec{DA} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{j} = (0,1,0) \Rightarrow$$

$$\|\vec{DC} \times \vec{DA}\| = 1$$

$$|(\vec{DC} \times \vec{DB}) \cdot \vec{DA}| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1$$

$$(1) + (4) \Rightarrow h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) + (4) \Rightarrow h_2 = 1$$

$$(3) + (4) \Rightarrow h_3 = 1$$

Scanned by CamScanner