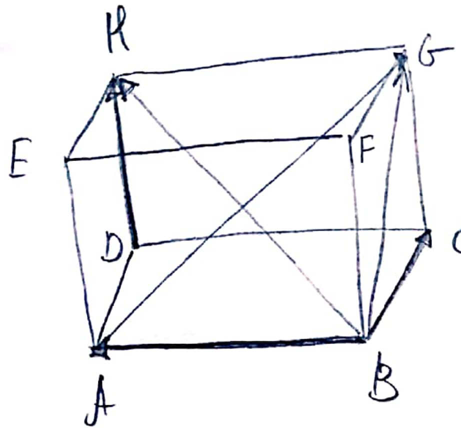
B

1ª Questão:(3 pontos)

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo.

a) (1 ponto) Ache as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AG}$ na base $M = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DH})$.

b) (2 pontos) Ache as coordenadas dos pontos G, H no sistema de coordenadas $\Sigma = (B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DH})$.



a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} =$

$= \underbrace{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}}_{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{DH} =$

$= (-1, 1, 1)$

b) $G: \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} =$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DH} =$

$= 0 \cdot \overrightarrow{BA} + 1 \cdot \overrightarrow{BC} + 1 \overrightarrow{DH} \Rightarrow$

$G = (0, 1, 1)_\Sigma$

$H: \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} =$

$= \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}_{\overrightarrow{BD}} + \overrightarrow{DH} = 1 \cdot \overrightarrow{BA} + 1 \cdot \overrightarrow{BC} + 1 \cdot \overrightarrow{DH} \Rightarrow$

$H = (1, 1, 1)_\Sigma$

2ª Questão:(1.5 pontos) Prove que se os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formam uma base, então os vetores $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - 2\vec{w}, 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ também formam uma base.

$3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - 2\vec{w}$, $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ formam uma base se eles forem LI.

Consideremos:

$\lambda_1(3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) + \lambda_2(\vec{v} - 2\vec{w}) + \lambda_3(2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow$

$(\lambda_1 + 2\lambda_3)\vec{u} + (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\vec{v} + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3)\vec{w} = \vec{0}$

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, obtemos:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{3}\lambda_3 \\ -\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - 2\vec{w}$, $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ são LI

$\Rightarrow$ formam uma base.

3ª Questão: (2.5 pontos) Determine um vetor $\vec{u}$ que seja ortogonal aos vetores de coordenadas $(1,-1,-1)$ e $(0,1,1)$ numa base ortonormal $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tem norma 3, e $\vec{u}\cdot\vec{k}<0$.

Sejam $\vec{v}=(1,-1,-1)$, $\vec{w}=(0,1,1)$. Como $\vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{v}$, $\vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{w}$, o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao $\vec{v}\times\vec{w}$, portanto $\vec{u}=\lambda(\vec{v}\times\vec{w})$

Temos $\vec{v}\times\vec{w}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix} =$

$= -\vec{i}+\vec{k}+\vec{i}+\vec{j}=(0,-1,1)$.

$\vec{u}=\lambda(0,-1,1)=(0,-\lambda,\lambda)$

Como, $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{u}\|^2=2\lambda^2=9 \Rightarrow \lambda^2=\frac{9}{2} \Rightarrow$

$\lambda=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{u}=(0,-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})\\ \vec{u}=(0,\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}})\end{array}\right.$

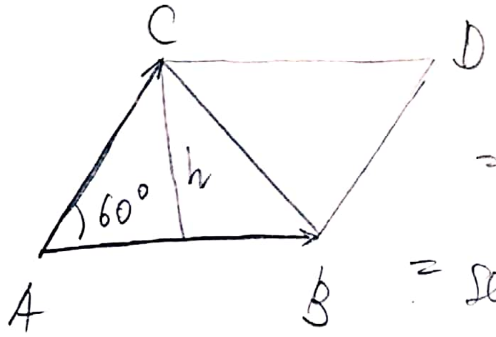
Como $\vec{u}\cdot\underset{(0,0,1)}{\vec{k}}<0$, $\vec{u}=(0,\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}})$

4ª **Questão:**(3 pontos)

a) (1 ponto) O lado de um triânulo ABC equilátero mede 3. Ache $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$.

b) (2 pontos) Dados os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (0.1,1)$, $C = (1,0,0)$, $D = (0,0,1)$ num sistema cartesiano. Ache a altura do paralelepípedo formado por vetores $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$.

a)



$||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = S_{ABDC} =$

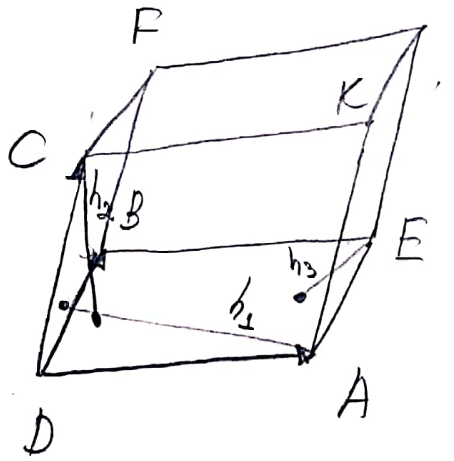
$= 2\, S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB =$

$= \operatorname{sen} 60° \cdot AC \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

b) $\overrightarrow{DB} = (0,1,0)$

$\overrightarrow{DC} = (1,0,-1)$

$\overrightarrow{DA} = (1,0,0)$



O paralelepípedo possui 3 alturas h_1, h_2, h_3

Temos: $V_p = h_1 \cdot S_{b_1} = h_1 \cdot S_{DCFB} = h_1 \cdot ||\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB}||$ (1)

$V_p = h_2 \cdot S_{b_2} = h_2 \cdot S_{DAEB} = h_2 \cdot ||\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}||$ (2)

$V_p = h_3 \cdot S_{b_3} = h_3 \cdot S_{DAKC} = h_3 \cdot ||\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}||$ (3)

Do outro lado, $V_p = |(\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{DA}|$ (4)

Scanned by CamScanner

$$\vec{DC} \times \vec{DB} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{k} = (1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \|\vec{DC} \times \vec{DB}\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{DA} \times \vec{DB} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{k} = (0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\|\vec{DA} \times \vec{DB}\| = 1$$

$$\vec{DA} \times \vec{DC} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \vec{j} = (0, 1, 0) \Rightarrow$$

$$\|\vec{DA} \times \vec{DC}\| = 1$$

$$|(\vec{DC} \times \vec{DB}) \cdot \vec{DA}| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$(1) + (4) \Rightarrow h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) + (4) \Rightarrow h_2 = 1$$

$$(3) + (4) \Rightarrow h_3 = 1$$

Scanned by CamScanner