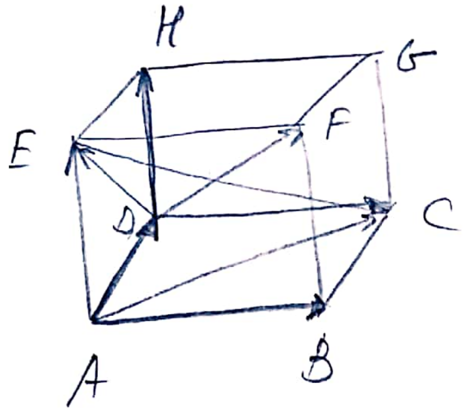
1ª **Questão:**(3 pontos)

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo.

a) (1 ponto) Ache as coordenadas do vetor $\overrightarrow{EC}$ na base $M = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH})$.

b) (2 pontos) Ache as coordenadas dos pontos E, F no sistema de coordenadas $\Sigma = (D, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH})$.



a) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} =$

$= \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}} - \overrightarrow{DH} = (1, 1, -1)$

b) E : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} =$

$= 0 \cdot \overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{DH} \Rightarrow$

$E = (0, -1, 1)_{\Sigma}$

F : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \underbrace{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{DB}} + \overrightarrow{DH}$

$= 1 \cdot \overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{DH}$

$F = (1, -1, 1)_{\Sigma}$

2ª Questão:(1.5 pontos) Prove que se os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formam uma base, então os vetores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}, 2\vec{v} - \vec{w}, \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ também formam uma base.

$\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}, 2\vec{v} - \vec{w}, \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ formam uma base se eles forem LI

Consideremos:

$$\lambda_1(\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}) + \lambda_2(2\vec{v} - \vec{w}) + \lambda_3(\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\vec{u} + (-2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3)\vec{v} + (3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{w} = \vec{0}$$

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, obtemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ 2\lambda_3 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_3 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ -2\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Portanto $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}, 2\vec{v} - \vec{w}, \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ são LI

$\Rightarrow$ formam uma base.

3ª Questão: (2.5 pontos) Determine um vetor $\vec{u}$ que seja ortogonal aos vetores de coordenadas $(1, -1, 0)$ e $(-1, 1, 1)$ numa base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tem norma 2, e $\vec{u} \cdot \vec{k} > 0$.

Sejam $\vec{v} = (1, -1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 1, 1)$. Como $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$, o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao $\vec{v} \times \vec{w}$, portanto $\vec{u} = \lambda (\vec{v} \times \vec{w})$

Temos $\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} =$

$= -\vec{i} + \vec{k} - \vec{k} - \vec{j} = -\vec{i} - \vec{j} = (-1, -1, 0) \Rightarrow$

$\vec{u} = \lambda(-1, -1, 0) = (-\lambda, -\lambda, 0)$.

Como $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{u}\|^2 = 2\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow$

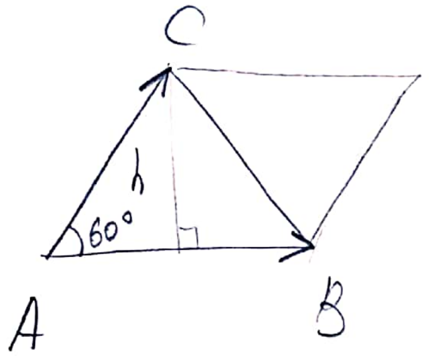
$\lambda = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \\ \vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \end{cases}$

4ª Questão:(3 pontos)

a) (1 ponto) O lado de um triânulo ABC equilátero mede 2. Ache $\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$.

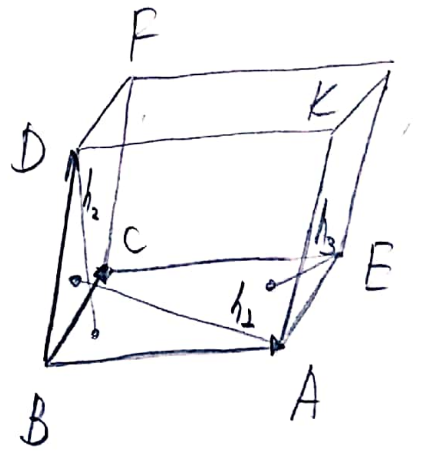
b) (2 pontos) Dados os pontos $A=(1,0,1), B=(0,1,1), C=(1,0,0), D=(0,0,1)$ num sistema cartesiano. Ache a altura do paralelepípedo formado por vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$.

a)



$$\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = S_{ABDC} = 2\,S_{ABC} = 2\cdot\frac{1}{2}\,h\cdot AB =$$
$$= \underbrace{\text{sen}\,60°\cdot AC}_{h}\cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot 2 = \underline{2\sqrt{3}}$$

b) $\vec{BA} = (1,-1,0)$,
$\vec{BC} = (1,-1,-1)$
$\vec{BD} = (0,-1,0)$



O paralelepípedo possui 3 alturas h_1, h_2, h_3.

Temos. $V_p = h_1\cdot S_{b_1} = h_1\, S_{DBCF} = h_1\cdot\|\vec{BD}\times\vec{BC}\|$ (1)

$V_p = h_2\, S_{b_2} = h_2\, S_{CBAE} = h_2\cdot\|\vec{BC}\times\vec{BA}\|$ (2)

$V_p = h_3\cdot S_{b_3} = h_3\cdot S_{BAKD} = h_3\cdot\|\vec{BA}\times\vec{BD}\|$ (3)

Do outro lado, $V_p = |(\vec{BD}\times\vec{BC})\cdot\vec{BA}|$ (4)

$$\vec{BD} \times \vec{BC} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{k} = (1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \|\vec{BD} \times \vec{BC}\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{BC} \times \vec{BA} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j} = (1, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \|\vec{BD} \times \vec{BC}\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{BA} \times \vec{BD} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\vec{k} = (-1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \|\vec{BA} \times \vec{BD}\| = 1, \quad |(\vec{BD} \times \vec{BC}) \cdot \vec{BA}| = \left|\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1$$

$$(1) + (4) \Rightarrow h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) + (4) \Rightarrow h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) + (4) \Rightarrow h_3 = 1$$