Lista 6

NATALIIA GOLOSHCHAPOVA

MAT5721 - 1° semestre de 2017

Exercício 1.
Seja E um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequencia tal que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $f \in E'$. Mostre que existe $x \in E$ tal que $x_n \overset{w}{\to} x$.

Exercício 2.
Se $f, f_n \in C[0,1]$ e $f_n \overset{w}{\to} f$, mostre que $f_n(t) \to f(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

Exercício 3.
Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que E é *fracamente completo* se toda sequencia fracamente de Cauchy é fracamente convergente. Mostre que se E é reflexivo, então E é fracamente completo.

Exercício 4.
Sejam $0 \in (a,b)$ e δ um funcional em $C[a,b]$ definido pelo $\delta(x) = x(0)$. Suponha que a sequencia $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[a,b]$ satisfaz:

a) $\varphi_n(t) = 0$, se $|t| > \frac{1}{n}$; $\varphi_n(t) \geq 0$;

b) $\int_a^b \varphi_n(t)dt = 1$.

Mostre que a sequencia dos funcionais
$$f_n(x) = \int_a^b \varphi_n(t)x(t)dt,$$
converge fracamente* ao δ.

Exercício 5.
Estude convergência fraca e forte das sequencias em l_2:

a) $x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$;

b) $x_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-1}}, 1, \frac{1}{2}, \ldots)$;

c) $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{n-1}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots)$.

Exercício 6.
Estude convergência fraca e forte das sequencias em $L^2[0,1]$:

a) $x_n = t^n - t^{n+1}$;

b) $x_n = \begin{cases} 2n(1-nt), & t \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

Exercício 7.
Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ operador linear continuo. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ arbitraria tal que $x_n \overset{w}{\to} x \in X$. Mostre que $T(x_n) \to T(x)$ implica que T é compacto no caso do X reflexivo.

Exercício 8.
Sejam H um espaço de Hilbert, $B \subset H$ uma base ortonormal de H, e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequencia limitada. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $x_n \stackrel{w}{\to} x \in H, n \to \infty$;

b) $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y), \forall y \in H$;

c) $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y), \forall y \in B$.

Exercício 9.
Seja $x(t) \in L^2[-1, 1]$. Definamos

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\cos(n\pi t)dt.$$

a) Mostre que f_n é funcional limitado;

b) Mostre que $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ fracamente* .

c) $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ forte?

Exercício 10.
Diremos que um conjunto M num espaço de Banach E é *fracamente fechado*, se para q.q. sequencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ $(n \to \infty)$, segue-se que $x \in M$.

a) Mostre que se M é fracamente fechado, então M é fechado;

b) Encontre um conjunto fechado que não é fracamente fechado.

Exercício 11.
Seja X um espaço normado separável. Mostre que em X' existe conjunto enumerável denso no sentido de convergência fraca*.