Lista 5

NATALIIA GOLOSHCHAPOVA

MAT5721 - 1° semestre de 2017

Exercício 1.
Sejam T um operador linear compacto e auto-adjunto em espaço de Hilbert H, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$ os autovalores não-nulos de T e para cada j, P_j o projetor ortogonal sobre $N_{\lambda_j}(T)$. Então:

$$T = \sum_j \lambda_j P_j,$$

com a série convergido em $B(H)$.

Exercício 2.
Dada uma sequencia $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha_n \to 0$, prove que existe um operador compacto T tal que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ coincide com o conjunto dos autovalores de T.

Exercício 3.
Sejam H espaço de Hilbert, $K : H \to H$ um operador linear compacto, e $T_n : H \to H$ um operador linear limitado (para todo $n \in \mathbb{N}$). Para cada $x \in H$ temos $T_n x \to Tx$, onde $T : H \to H$ é operador linear e limitado. Mostre que $||T_n K - TK|| \to 0$.

Exercício 4.
Determine se $A : C[0,1] \to C[0,1]$ é compacto nos casos:

a) $(Ax)(t) = \int_0^1 \dfrac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds$;

b) $(Ax)(t) = x(\sqrt{t})$ (**dica**: use o teorema de Arzelà-Ascoli);

c) $(Ax)(t) = \int_0^1 x(s^2) ds$.

Exercício 5.
Seja $T : l_2 \to l_2$ definido por

$$T : (x_1, x_2, x_3, ...) \to (0, x_1, x_2, x_3, ...).$$

a) T é injetivo?

b) T é sobrejetivo?

c) T é compacto?

d) Ache T^*.

Exercício 6.
Seja $T : l_2 \to l_2$ o operador definido por

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots).$$

Prove que T é compacto e auto-adjunto.

Exercício 7.
Seja $(Ax)(t) = \dfrac{dx}{dt}$. Determine se A é compacto nos casos

a) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$;

b) $A : C^2[0,1] \to C^1[0,1]$;

c) $A : C^2[0,1] \to C[0,1]$;

O espaço $C^1[0,1]$ esta definido em Ex. 9 da lista 1, $C^2[0,1]$ é o conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis em $[0,1]$ com a norma

$$||f||_{C^2[0,1]} = ||f||_{C[0,1]} + ||f'||_{C[0,1]} + ||f''||_{C[0,1]}.$$

Dica: use o teorema de Arzelà–Ascoli.

Exercício 8.
Considere operador $T : l_2 \to l_2$ dado por $Tx = y = \{y_j\}$, onde $x = \{x_j\}$ e

$$y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_k, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty.$$

Mostre que T é compacto.

Exercício 9.
Mostre que espaço metrico X é compacto se e somente se ele é completo e totalmente limitado.

Exercício 10.
Sejam dois espaços normados E_1, E_2. Mostre que $B_0(E_1, E_2)$ é completo se, e somente, se E_2 é Banach.

Exercício 11.
Se $0 \neq \phi \in L^2[0,2\pi]$ é limitada, mostre que o operador de multiplicação por ϕ, $M_\phi : L^2[0,2\pi] \to L^2[0,2\pi]$, $(M_\phi f)(t) = \phi(t)f(t)$, $f \in L^2[0,2\pi]$ não é um operador compacto.

Dica: use o fato que a sequencia $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ é ortonormal em $L^2[0,2\pi]$.

Exercício 12.
Encontre sequencia dos operadores compactos que converge fortemente mas o limite dela não é operador compacto.

Exercício 13.
Sejam E_1, E_2 os espaços de Banach e seja

$$T : E_1 \to E_2$$

o operador compacto. Mostre o seguinte:

a) Se T tem imagem fechada, assim $\dim T(E_1) < \infty$ (**dica**: use o teorema da Aplicação Aberta e o fato que a bola unitária fechada no espaço da dimensão infinita não é compacta);

b) A imagem de T é subespaço separável de E_2;

c) Suponha que E_2 é espaço separável. Encontre o exemplo de E_1 e operador compacto $T : E_1 \to E_2$ tal que $\overline{T(E_1)} = E_2$.