Lista 4

NATALIIA GOLOSHCHAPOVA

MAT5721 - 1° semestre de 2017

Exercício 1.
Sejam E_1, E_2 dois espaços normados e $T : E_1 \to E_2$ operador linear e limitado. Se $T^{-1} : E_2 \to E_1$ é linear e limitado, mostre que $(T^{-1})^\times = (T^\times)^{-1}$.

Exercício 2.
Seja H espaço de Hilbert. Para operador $T : H \to H$ linear continuo ache operador adjunto T^* se,

a) $H = l_2, Tx = (x_3, 0, x_2, 0, x_1, x_4, x_5, x_6, \dots)$.

b) $H = L^2[0,1]$, $(Tx)(t) = tx(t^2)$.

Exercício 3.
Para operador $T : l_1 \to l_1$ linear continuo ache o operador adjunto $T^\times$ se,

a) $Tx = (0, x_1, x_2, \dots)$.

b) $Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$, onde $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $|\lambda_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 4.
Sejam espaço de Banach X, espaço normado Y, e $T_\alpha : X \to Y, \alpha \in J$, operadores lineares e contínuos tais que

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha\| = \infty.$$

Mostre que o conjunto $\mathcal{I} = \{x \in X : \sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| < \infty\}$ é magro em X.

Exercício 5.
Seja $c = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty : \ x_n \in \mathbb{R}, \ \{x_n\} \text{ converge}\}$. Mostre que

a) $c_0 \subset c$ é um subespaço raro em c;

b) $c \subset l_\infty$ é um subespaço raro em l_∞.

Exercício 6.
Seja X espaço vetorial normado. Demostre que qualquer subespaço fechado próprio de X é um conjunto raro em X.

Exercício 7.
Se E_1 e E_2 são espaços de Banach e $T_n : E_1 \to E_2$ são lineares e contínuos, $n = 1, 2, \dots$, mostre que os seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\{\|T_n\|\}$ é limitada;

b) $\{\|T_n x\|\}$ é limitada para todo $x \in E_1$;

c) $\{|g(T_n x)|\}$ é limitada para todo $x \in E_1$ e $g \in E_2'$.

Exercício 8.

Seja $y = \{y_j\}$, $y_j \in \mathbb{C}$, tal que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ converge para todo $x = \{x_j\} \in c_0$. Mostre que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |y_j| < \infty$.

Exercício 9.

Sejam E_1, E_2 espaços de Banach e $a : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo

a) para cada $x \in E_1$ fixo, $y \mapsto a(x, y)$ é continua;

b) para cada $y \in E_2$ fixo, $x \mapsto a(x, y)$ é continua.

Prove que existe constante $C > 0$ tal que

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|.$$

Exercício 10.

Seja $E = C[0, \pi]$ com a norma $\|\cdot\|_{L_1}$. Considere a forma bilinear $a : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(f, g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Utilizando a sequencia

$$f_n = \begin{cases} \sqrt{n}\sin(nt), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{n} \\ 0, & \frac{\pi}{n} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

verifique que a não é continua. Este resultado não contradiz o exer. anterior?

Exercício 11.

Verifique se ou não existe operador inverso continuo ao $T : l_2 \to l_2$ se:

a) $Tx = (x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, \dots)$;

b) $Tx = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \dots)$;

c) $Tx = (x_2 - x_1, x_2 + x_3, 2x_2 - 2x_1, x_4, x_5, \dots)$,

com $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$.

Exercício 12.

Seja $T : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$ dado por $T(\psi)(t) = \int_{-1}^{t} \psi(x)dx$. Verifique que T é limitado e inversível, mas T^{-1} não é continuo. Analise este resultado em termos do Teorema da Aplicação Aberta.

Exercício 13.

Seja $E_1 = E_2 = C[0, 1]$ com as normas

$$\|f\|_{E_1} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_{E_2} = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

Mostre que a transformação de identidade id : $E_1 \to E_2$ é linear, limitada, e bijetora mas inversa dela não é limitada.

Exercício 14.

Seja X espaço de Banach e $X_1, X_2 \subset X$ dois subespaços fechados tais que $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ e $X = X_1 \oplus X_2$. Mostre que existe $c \geq 0$, tal que

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leq c\|x_1 + x_2\|,$$

para todos $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$.

Exercício 15.
Sejam E_1, E_2 espaços de Banach, e $T : D(T) \subset E_1 \to E_2$ operador linear fechado. Verifique se:

a) $D(T)$ é fechado em E_1;

b) $R(T)$ é fechado em E_2.

Exercício 16.
Considere operador $T : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Tx(t) = \frac{dx}{dt},$$

com domínio $D(T)$ que consiste das funções continuamente differenciaveis em $[0,1]$ tais que $x(0) = x(1) = 0$. Mostre que T é fechado.

Exercício 17.
Ache o exemplo do operador:

a) não-fechado e limitado;

b) fechado e não-limitado;

c) não-fechado e não-limitado.

Exercício 18.
Mostre que os Teoremas da Aplicação Aberta e do Grafico Fechado não valem se os espaços vetoriais normados E_1 e/ou E_2 não sejam de Banach (para $T : E_1 \to E_2$ linear).

Exercício 19.
Seja H espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ é linear e simétrico, isto é,

$$(Tx, y) = (x, Ty), \qquad x, y \in H.$$

Mostre que T é limitado.

Exercício 20.
Sejam E espaço de Banach e $f : D(f) \subset E \to \mathbb{C}$ funcional linear. Mostre que f é fechavel sse f é limitado.