Lista 3

NATALIIA GOLOSHCHAPOVA

MAT5721 - 1° semestre de 2017

Exercício 1.
Determine se ou não a igualdade

$$f(x) = \int_{-1}^{1} [x(t)\cos(t) + x'(t)\sin(t)]dt,$$

defina um funcional continuo em $H^1[-1,1]$ definido como o completamento do $C^1[-1,1]$ respeito a norma induzida pelo produto interno do Ex. 12 da lista 2. Caso sim, encontre a função $y(t) \in H^1[-1,1]$ tal que $f(x) = (x, y)$.

Exercício 2.
Sejam H espaço de Hilbert, $L \subset H$ um subespaço, f funcional limitado linear em L. Mostre que existe única continuação de f para todo H que preserva a norma.

Exercício 3.
Seja X um espaço vetorial e h uma forma Hermitiana no $X \times X$. Forma h chama-se *positivamente semidefinida* se $h(x, x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Mostre que neste caso h safistaz:

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y).$$

Exercício 4.
Mostre que operador linear limitado $T : H \to H$ em espaço de Hilbert H tem imagem da dimensão finita se e somente se T pode ser apresentado na forma

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} (x, v_j)w_j, \qquad v_j, w_j \in H.$$

Exercício 5.
Dada sequencia ortonormal F num espaço de Hilbert separável. Mostre que existe a sequencia total ortonormal $\widehat{F}$ que contem F.

Exercício 6.
Seja M um conjunto num espaço de Hilbert H, e seja $v, w \in H$. Suponha que $(v, x) = (w, x)$ para todos $x \in M$ implica que $v = w$. Se isso é verdade para todos $v, w \in H$ mostre que M é total em H.

Exercício 7.
Seja X espaço vetorial e $M_0 \subset X$ um subespaço. Mostre que para cado $T_0 : M_0 \to l_\infty$ tal que $T_0 \in B(M_0, l_\infty)$ existe $T : X \to \infty$ tal que $T \in B(X, l_\infty)$ e:

a) $Tx = T_0x, x \in M_0$.

b) $\|T\| = \|T_0\|$.

Exercício 8.
Seja $c = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty : x_n \in \mathbb{R},\ e\ \{x_n\} \text{ converge}\}$. Mostre usando corolário do teorema de Hahn-Banach que $c_0 \subset c$ é um subespaço que não é denso.

Exercício 9.
Mostre que c_0, l_1 e $C[a, b]$ não são reflexivos.

Exercício 10.
Para $x(t) \in C[-1,1]$ definamos
$$f(x) = \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} tx(t)dt.$$

a) Mostre que f é funcional limitado.

b) Encontre uma função $g(t)$ da variação limitada em $[-1,1]$ tal que
$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)dg(t).$$

Exercício 11.
Mostre que o funcional linear continuo $f(x) = x(0)$ em $C[-1,1]$ não pode ser apresentado na forma
$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)g(t)dt.$$
com $g(t) \in C[-1,1]$. Encontre uma função $g(t)$ da variação limitada em $[-1,1]$ tal que
$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)dg(t).$$

Exercício 12.
Mostre que q.q. funcional não nulo limitado definido em todo espaço de Hilbert H atinge a sua norma em único ponto da bola unitária fechada.

Exercício 13.
Seja $x_0(t) \in C[0,1]$ fixo com $||x_0|| = 1$. Considere em $C[0,1]$ subespaço $L = \text{span}\{\lambda x_0(t)\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Definamos em L funcional f como $f(x) = \lambda$ caso $x = \lambda x_0$.

a) Mostre que $\|f\| = 1$.

b) f pode ser continuado para todo $C[0,1]$ com a norma preservada. Ache as continuações se:
1) $x_0(t) = t$; 2) $x_0(t) = 1 - 2t$.

Exercício 14.
Em espaço $\mathbb{C}^2$ dado subespaço $L = \{x \in \mathbb{C}^2 : \ 2x_1 - x_2 = 0\}$. Em L definido funcional linear limitado $f(x) = x_1$. Mostre que existe única continuação de f para todo $\mathbb{C}^2$ com a norma preservada. Ache essa continuação.