Lista 2

NATALIIA GOLOSHCHAPOVA

MAT5721 - 1° semestre de 2017

Exercício 1.
Seja X um espaço vetorial normado da dimensão infinita. Construa um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que não seja contínuo.

Exercício 2.
Mostre que um funcional f em espaço vetorial normado é limitado se e só se o núcleo de f é fechado.

Exercício 3.
Mostre que os seguintes funcionais são contínuos, e procure as normas deles.

(a) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt, \quad x \in C[-1,1];$

(b) $f(x) = x_1 + x_2, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2.$

Exercício 4.
Verifique se o funcional $f(x) = x'(0)$ é continuo em

(a) espaço $C^1[-1,1]$ (veja a definição da norma na lista 1, ex. 9);

(b) em $C^1[-1,1]$ com a norma do $C[-1,1]$.

Exercício 5.
Sejam X espaço linear complexo, f um funcional linear não nulo em X. Mostre que a imagem do f é todo $\mathbb{C}$.

Exercício 6.
Sejam X espaço linear normado, f um funcional em X não nulo. Mostre que $X = N(f) \oplus M$, e $\dim M = 1$.

Exercício 7.
Mostre que $(c_0)' = l_1$ (norma em c_0 é a norma do l_∞), i.e. qualquer $f \in (c_0)'$ tem forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

com $x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0$ e $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_1$ e $\|f\| = \|y\|_{l_1}$.

Exercício 8.
Seja funcional $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dado pelo $f(g) := g(1)$ para todos $g \in C[0,1]$.

(i) Prove que f é continuo se em $C[0,1]$ consideramos a norma

$$\|g\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |g(x)|.$$

(ii) Mostre que f não é continuo se em $C[0,1]$ consideramos a norma L^p com $1 \le p < \infty$, i.e.

$$\|g\|_p := \left(\int\limits_0^1 |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Exercício 9.
Mostre que $L^p, p \neq 2$, não é espaço de Hilbert.

Exercício 10.
Sejam H espaço de Hilbert e $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H$ um conjunto ortonormal e $x \in H$. Mostre que a projeção ortogonal de x sobre $M = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ é dada por

$$P_M x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j.$$

Exercício 11.
Aplique o processo de Gram-Schmidt aos vetores $\{1, x, x^2\} \subset L^2[-1, 1]$. Utilize sua resposta para calcular a distancia de x^3 ao espaço gerado por $\{1, x, x^2\}$, i.e., encontre

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx.$$

Exercício 12.
Em espaço vetorial $\widetilde{H}^1[a, b]$ das funções continuamente diferenciáveis reais em $[a, b]$ definamos

$$(x, y) = \int_{a}^{b} (x(t)y(t) + x'(t)y'(t))dt.$$

$\widetilde{H}^1[a, b]$ é espaço de Hilbert?

Exercício 13.
Seja H um espaço de Hilbert. Mostre que elemento $x \in H$ é ortogonal para subespaço fechado $L \subset H$ se e só se para todo $y \in L$ a seguinte desigualdade vale $\|x\| \leq \|x - y\|$.

Exercício 14.
Em espaço linear das sequencias $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ $(x_k \in \mathbb{R})$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

definamos

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k,$$

onde $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_k < 1$. Esse espaço é de Hilbert?

Exercício 15.
Em espaço l_2 considere

$$M = \Big\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2 \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \Big\}.$$

Mostre que M é subespaço denso em l_2.

Exercício 16.
Em variedade M (exer. anterior) encontre os vetores l.i. tais que ortonormalização deles seja uma base ortonormal em l_2.

Exercício 17.
Mostre que para todo n fixo o conjunto

$$M = \Big\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2 \ : \ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Big\}.$$

é subespaço fechado em l_2. Encontre o subespaço N em l_2 tal que $l_2 = N \oplus M$.

Exercício 18.
Em espaço l_2 encontre conjunto M tal que $l_2 \neq M + M^{\perp}$.

Exercício 19.
Seja M conjunto fechado e convexo em espaço de Hilbert H. Mostre que em M existe único elemento com a menor norma.

Exercício 20.
Em espaço l_2 construi um conjunto fechado que não possui o elemento com a menor norma.

Exercício 21.
Seja $E = \{\psi \in L^2[-1,1] \ : \ \int_{-1}^{1} \psi(t)dt = 0\}$. Determine $E^{\perp}$. (Exercício para os alunos que fizeram o curso de "Medida e Integração").