Lista 1

NATALIIA GOLOSHCHAPOVA

MAT5721 - 1° semestre de 2017

Observação: Os alunos que não fizeram o curso de "Medida e Integração"podem ignorar os exercícios com espaço $L^p[a, b]$.

Exercício 1.
Verifique se as seguintes funções definam uma métrica em $\mathbb{R}$:

(a) $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$;

(b) $\rho(x, y) = |\cos(x) - \cos(y)|$.

Exercício 2.
Seja $f(x)$ uma função continua em $\mathbb{R}$ tal que

(a) $f(0) = 0$;

(b) $f(x)$ cresce em $\mathbb{R}$;

(c) $f(x)$ tem segunda derivada em $(0, \infty)$ e $f''(x) < 0$ para todo $x \in (0, \infty)$.

Mostre que se $\rho(x, y)$ é uma métrica em X, assim $f(\rho(x, y))$ é métrica também.

Exercício 3.
Mostre que uma métrica d num espaço vetorial X é induzida por uma norma se, e somente se, $d(\xi + \zeta, \eta + \zeta) = d(\xi, \eta)$ e $d(\alpha\xi, \alpha\eta) = |\alpha| d(\xi, \eta)$, para todos $\xi, \psi, \eta \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exercício 4.

Def. 1. 1) Um subconjunto S de um espaço métrico $X = (X, d)$ diz-se *denso* em X se o fechamento de S contém X.

2) Um espaço métrico $X = (X, d)$ diz-se *separável* se possui um subconjunto S enumerável denso em X.

(a) Mostre que um espaço métrico (X, d) com a métrica discreta é separável, se e somente se X é contável.

(b) Mostre que l_p é separável para $1 \le p < \infty$ e não é para $p = \infty$.

(c) Mostre que $C[a, b]$ é separável, e use-o para mostrar que $L^p[a, b]$ é separável para $1 \le p < \infty$.

Exercício 5.
Prove que a função $\|(x, y)\|_{E,F} = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$ define uma norma em $E \times F$. Prove que $(E \times F, \|\cdot\|_{E,F})$ é completo se, e somente se, E e F são completos.

Exercício 6.

Def. 2. Um subconjunto C de um espaço vetorial é *convexo* se, para todo escalar $\lambda \in [0, 1]$ e $x, y \in C$ temos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Mostre que as bolas de um espaço normado são convexas.

Exercício 7.
Mostre que a desigualdade triangular (em definição da norma) é equivalente a convexidade de bola $\bar{B}(0, 1)$.

Exercício 8.
Mostre que $\|\cdot\|_p$ não é norma em l_p para $0 < p < 1$.

Exercício 9.
Denote por $C^1[a,b]$ o conjunto das funções continuamente diferenciáveis $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ com a norma:

$$\|\psi\|_{C^1[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |\psi(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\psi'(t)|.$$

Verifique que $\|\cdot\|_{C^1[a,b]}$ é uma norma e $C^1[a,b]$ é Banach.

Exercício 10.
Verifique se os seguintes funções definam uma norma em $C^1[a,b]$:

(a) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

(b) $\int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

Exercício 11.
Mostre que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ é uma norma em $C[0,1]$ mas é apenas uma semi-norma (a condição $\|f\|_1 = 0$ não implica $f \equiv 0$) no espaço vetorial das funções Riemann-integráveis. Verifique se $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.

Exercício 12.
Sejam X, Y os espaços de Banach, $A : X \to Y$ operador linear limitado com $D(A) = X$. Verifique se os seguintes igualdades definam a norma:

(a) $\|x\|_1 = \|Ax\|_Y$;

(b) $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$.

Caso sim, $(X, \|\cdot\|_1)$ é espaço de Banach?

Exercício 13.
Sejam c e c_0 os conjuntos das sequencias $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{C}$ cujos limites $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ respetivamente. Mostre que esses conjuntos são subespaços fechados de l_∞ e, portanto, são Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Exercício 14.
Seja $P(\mathbb{C})$ o espaço vetorial de todos os polinômios $P_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

(a) Prove que $\|P_n(x)\| = \sum\limits_{j=0}^{n} |a_j|$ é uma norma em $P(\mathbb{C})$;

(b) Prove que $P(\mathbb{C})$ com está norma não é completo.

(c) Prove que o completamento de $P(\mathbb{C})$ com está norma, é isometricamente isomorfo a l_1.

Exercício 15.
Prove que em $C[a,b]$ a norma $\|\cdot\|_{L^2[a,b]}$ é equivalente à norma

$$\|f\|_v = \left(\int\limits_a^b v(t)f^2(t)dt\right)^{1/2},$$

onde $v(t) \in C[a,b]$ e $v(t) \geq c > 0$ em $[a,b]$.

Exercício 16.
Verifique se ou não as normas $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ e $\|\cdot\|_{L^2[a,b]}$ são equivalentes em $C[a,b]$.

Exercício 17.
Verefique se ou não a sequencia
$$x_n = \left(\frac{n}{1+n}, \frac{n}{1+2n}, \dots, \frac{n}{1+kn}, \dots\right)$$
converge em

(a) l_1;

(b) l_p, com $1 < p < \infty$;

(c) l_∞.

Exercício 18.
Verifique se ou não a aplicação $f(x(t)) = x^2(t)$ é continua como aplicação entre

(a) $C[0,1]$ e $C[0,1]$;

(b) $L^2[0,1]$ e $L^2[0,1]$;

(c) $C[0,1]$ e $L^2[0,1]$.

Exercício 19.
No espaço l_2 para elemento $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ definimos as sequencias dos operadores:
$$A_n(x) = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots\right),$$
$$B_n(x) = (0, 0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots).$$

Como elas convergem (uniforme ou forte)?

Exercício 20.
Estude a convergência (uniforme ou forte) da sequencia dos operadores $T_n : C[0,1] \to C[0,1]$ definida pela formula $(T_n x)(t) = t^n(1-t)x(t)$.

Exercício 21.
Em espaço l_1 considere operador A tal que transforma $x = (x_1, x_2, \dots)$ ao elemento $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, onde $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_n\| < \infty$. Quando existe A^{-1} algebrico ? Será que ele é limitado?

Exercício 22.
Sejam X, Y espaços normados, $A : X \to Y$ o operador linear limitado. Mostre que $N(A)$ é subespaço fechado. Será que $R(A)$ sempre um subespaço fechado em Y?