MAT0105: Gabaritos da Prova Sub

Professora Nataliia Goloshchapova

Ex. 1. (2.5 pt) Dado um hexágono regular $ABCDEF$ de centro O. Sejam $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$.

a) **(1.5 pt)** Escreva os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, onde $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{FD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}$.

b) **(1 pt)** Verifique se os vetores nos pares $(\vec{u}, \vec{w})$ e $(\vec{v}, \vec{w})$ são linearmente independentes usando o fato que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes.

Solução

a) Temos $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Alem disso, usando igualdades $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{EB} = -2\overrightarrow{AF} = -2\vec{b}$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, obtemos $\vec{w} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

b) Vetores $\vec{u}, \vec{w}$ são LD se e somente se $\vec{u} = \lambda\vec{w}$ para algum λ real, ou $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(2\vec{a} + \vec{b})$. Então $1 = 2\lambda$ e $1 = \lambda$, que é um absurdo, assim $\vec{u}, \vec{w}$ são LI. Caso $(\vec{v}, \vec{w})$ é similar.

Ex. 2. (2.5 pt) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta!

a) **(1 pt)** Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores no espaço, então

$$||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 = |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 + ||\vec{u} \times \vec{v}||^2.$$

b) **(0.5 pt)** A reta $r : x = -1 + 2t, y = 2 - t, z = -2t$ é perpendicular ao plano $\pi : 4x - 2y - 4z + 3 = 0$.

c) **(1 pt)** Os pontos $A = (4, 3, 1)$ e $B = (1, -1, 2)$ são equidistantes do plano $\pi : 3x + 4y - z - 10 = 0$.

Solução

a) Verdadeiro. Usando os fatos $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ e $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, chegamos ao conclusão.

b) Verdadeiro. Temos $\vec{r} = (2, -1, -2) = \frac{1}{2}(4, -2, -4) = \vec{n}$, onde $\vec{r}$ é vetor diretor da r, e $\vec{n}$ é vetor normal da π. Assim, $\vec{r}||\vec{n}$ e $r \perp \pi$.

c) Verdadeiro. Usando a formula $d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ para distancia entre o plano $ax + by + cz = d$ e ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, chegamos ao conclusão.

Ex. 3. (2.5 pontos) Os eixos coordenados Ox, Oy são girados de um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos.

a) **(1.5 pt)** Determine as novas coordenadas dos pontos $A = (1, -1)$ e $B = (2, 3)$.

b) **(1 pt)** Determine as novas coordenadas do ponto médio do AB.

Solução

a) Lembra-se que uma base ortonormal $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ (da sistema Σ_1) muda-se para base $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ (da sistema Σ_2), onde $\vec{f_1} = \cos\theta\vec{e_1} + \sin\theta\vec{e_2}$ e $\vec{f_2} = -\sin\theta\vec{e_1} + \cos\theta\vec{e_2}$. Assim a matriz de mudança de E para F é $M_{EF} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$, e equação de mudança de sistema tem forma $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_1} = M_{EF}\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_2}$. Da ultima formula nos temos $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_2} = M_{EF}^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_1} = M_{EF}^{\top}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_1}$. Como no nosso caso $\theta = \frac{\pi}{6}$, obtemos $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_1}$. Finalmente $A_{\Sigma_2} = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}_{\Sigma_2}$. O resto do exercicio é similar.

Ex. 4. (2.5 pt) Dada uma cônica l no plano:

$$9x^2 - 16y^2 - 54x + 48y + 81 = 0.$$

a) **(1.5 pt)** Qual é o tipo da cônica? Escreve a equação reduzida de l.

b) **(1 pt)** Encontre os focos e centro de l. No caso de hiperbole, encontre também as equações das assintotas no sistema Oxy.

Solução

a) Para classificar cônica vamos nos completar os quadrados para cada variavel x e y. Deixamos os coeficientes de x^2 e y^2 fora dos parênteses. Assim,

$$\begin{aligned} 9x^2 - 16y^2 - 54x + 48y + 81 &= 9(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) \\ &- 16\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 81 = 9(x-3)^2 - 16\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 36 = 0. \end{aligned}$$

Assim, dividindo por 36, obtemos equação reduzida:

$$\frac{(y - \frac{3}{2})^2}{9/4} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1.$$

Então cônica é uma hipérbole.

b) No primeiro, note que os parâmetros geométricos da hipérbole são $a = 3/2, b = 2$. Assim, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5/2$. O centro da hipérbole é $(3, 3/2) = (p_1, p_2)$. Pois o centro da hipérbole foi transladado para o ponto $(3, 3/2)$, os focos têm que ser transladados também ou seja $F_1 = (0, -c) + (p_1, p_2) = (3, -1)$ e $F_2 = (0, c) + (p_1, p_2) = (3, 4)$. No sistema transladada $O'x'y'$ as equações das assintotas são $y' = \pm\frac{a}{b}x'$, assim, no sistema Oxy temos $(y - \frac{3}{2}) = \pm\frac{3}{4}(x - 3)$.