# Introdução à Análise de Algoritmos

Quanto tempo leva a execução de determinado algoritmo?

Quando dois algoritmos fazem a mesma coisa, qual deles leva menos tempo?

É possível fazer a análise baseada no fluxo do algoritmo?

A análise do algoritmo preocupa-se com as questões acima.

É sempre conveniente conhecer ou ter uma medida da eficiência de um algoritmo que será usado para resolver um problema.

###### O comportamento de alguns algoritmos

**Raízes de equação do 2. grau**

**def raiz(a, b, c):**

**...**

**x1 = (-b+sqrt(b\*b-4\*a\*c))/(2\*a)**

**x1 = (-b+sqrt(b\*b-4\*a\*c))/(2\*a)**

**return x1, x2**

Se desconsiderarmos os casos particulares (delta negativo, a = 0, etc.), esse algoritmo realiza sempre o mesmo número de operações.

Podemos afirmar então que o tempo que esse algoritmo leva é uma constante.

t = k

**Máximo entre os elementos de uma lista**

**def max(a, N):**

**m = a[0]**

**for i in range(1, N):**

**if m < a[i]: m = a[i]**

**return m**

Esse algoritmo sempre repete um conjunto de operações N-1 vezes.

Podemos afirmar então que seu tempo é proporcional a N mais uma constante.

t = k1 + k2 \* (N - 1) = (k1 – k2) + k2.N

Podemos dizer simplesmente que o tempo é proporcional a N. Quando N é grande a constante é desprezível.

**Contar a quantidade de nulos numa lista de N elementos**

**def nulos(a, N):**

**c = 0**

**for i in range(N):**

**if a[i]) == 0: c += 1**

**return c**

Idem ao anterior. Repetindo N vezes. Portanto o seu tempo é da forma:

t = k1 + k2 \* N

Portanto, proporcional a N.

**Verifica se duas listas de N elementos são iguais**

**# devolve True se iguais e False se diferentes**

**def compara(a, b, N):**

**if len(a) != N or len(b)!= N: return False**

**for i in range(N):**

**if a[i] != b[i]: return False**

**return True**

Neste caso o resultado depende dos dados, pois termina no primeiro elemento diferente encontrado. No pior caso (todos iguais ou o último diferente) também é proporcional a N. Mesmo considerando um caso médio de N/2, será proporcional a N.

t = k1 + k2 \* N

**Contar quantos bits significativos tem um inteiro**

**def num\_bits(N):**

**c = 0**

**while N != 0:**

**c += 1**

**N //= 2 # ou N = N >> 1**

**return c**

O resultado c é o menor inteiro maior que lg N (base 2).

2c-1 <= N <= 2c

O tempo é então proporcional a lg N.

t = k1 + k2 \* lg(N)

**Notação:**

log x - (base 10)

lg x - (base 2)

ln x - (base e) – logaritmo natural

Observe que podemos dizer que os dois últimos exemplos acima são proporcionais ao logaritmo, sem mencionar a base, pois:

log N = lg N/lg 10 ou log N = k.lg N

**Imprimir tabela de i / j (1 ≤ i, j ≤ N)**

**def imp\_tabela (N, M):**

**for i in range(1, N + 1):**

**for j in range(1, N + 1):**

**print(i / j, end = "")**

**print()**

O tempo é proporcional a N\*N.

t = k1 + k2 \* N2.

**Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]**

Faça o algoritmo. São dois comandos **for** encaixados:

O tempo é proporcional a N\*M. Um limitante superior é N\*N, supondo N o maior deles.

t = k1 + k2 \* N2.

**Idem imprimindo a tabela i \* j \* k (1 ≤ i ≤ N; 1 ≤ j ≤ M; 1 ≤ k ≤ P)**

Serão três comandos **for** encaixados. Neste caso será proporcional a N\*M\*P.

Podemos considerar N\*N\*N, supondo N o maior deles.

t = k1 + k2 \* N3.

**Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]**

Faça o algoritmo. Serão três comandos **for** encaixados:

O tempo é proporcional a N\*M\*P. Um limitante superior é N\*N\*N, supondo N o maior deles.

t = k1 + k2 \* N3.

**Proporcionalidade dos algoritmos anteriores:**

Os algoritmos acima são proporcionais a:

1 – sempre executam as mesmas instruções uma só vez. Dizemos que o tempo de execução neste caso é uma constante.

N – dependem apenas de um parâmetro que é o número de vezes que um determinado laço é executado.

log N – Não importa a base, pois log N, lg N ou ln N são proporcionais. Assim não vamos indicar a base. Vamos dizer apenas que o algoritmo leva um tempo logarítmico para ser executado. Note também que um algoritmo com essa característica é muito interessante. Quando N é 1.000 o tempo é proporcional a 3. Quando N fica 1.000 vezes maior (1.000.000) o tempo apenas dobra (proporcional a 6).

N2 – em geral esses algoritmos têm um for encaixado em outro for. Quando N é 1.000, o tempo é proporcional a 1.000.000. Quando N dobra o tempo multiplica por 4.

N3 - em geral possuem um for dentro dum um for dentro de um for. Quando N dobra, o tempo se multiplica por 8.

Outros algoritmos podem ainda serem proporcionais a N.log N, ou exponenciais, proporcionais a 2N ou 10N.

**Um pouco de intuição**

É intuitivo que para valores de N grandes, quanto maior a ordem do expoente, mais tempo leva o algoritmo.

1(constante) log N N N.log N N2 N3

mais tempo

**Sobre os algoritmos**

O tempo depende dos dados em cada execução do algoritmo. Pode ser que para um conjunto de dados o algoritmo A1 seja mais rápido que o A2. Para outro conjunto o tempo pode se inverter.

Um algoritmo pode levar um tempo pequeno quando N é pequeno, mas demorar muito quando N é grande. Por exemplo, um algoritmo que tem um tempo proporcional a N3.

Às vezes não interessa muito se o algoritmo leva um tempo maior ou menor, pois a execução numa máquina é tão rápida que não faz diferença usarmos o algoritmo A1 ou A2. Isso ocorre principalmente se o algoritmo não requer muito tempo de CPU.

O comportamento de dois algoritmos pode ser diferente em CPUs diferentes.

O que realmente dá para se afirmar de maneira absoluta a respeito do tempo que um algoritmo vai demorar?

**A notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou notação Grande-O**

Para expressar essa idéia de tempo proporcional a alguma função, foi proposta a notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou ainda notação Grande-O (big-O notation).

**Definição:**

Dizemos que g(N) é O(f(N)) se existirem constantes c0 e N0 tais que g(N) < c0f(N) para todo N>N0. Ou seja, a partir de um determinado N, a função f(N) multiplicada por uma constante é sempre maior que g(N). Veja o gráfico abaixo.

Outra forma é definir O(f(N)) como um conjunto:

O(f(N)) = { g(N) se existem constantes c0 e N0 tais que g(N) < c0f(N) para todo N>N0 }

Podemos dizer livremente que g(N) = O(f(N)), mas o mais correto é dizer:

g(N) é O(f(N)) ou g(N) ∈ O(f(N)).

Com essa notação, podemos desprezar os termos que contribuem em menor grau para o tempo total, obtendo assim um limitante superior mais simplificado para o tempo total.

Veja que c0 eN0 escondem coisas importantes sobre o funcionamento do algoritmo:

* Nada sabemos para N < N0.
* c0 pode esconder uma enorme ineficiência do algoritmo – por exemplo, é melhor N2 nano-segundos que log N séculos. Ou seja, a unidade N é importante.

**Só interessa o termo de maior ordem. Podemos desprezar os termos de menor grau.**

O(1) é o mesmo que O(2) que é o mesmo que O(K) – constante

O(1 + N + N2) é O(N2)

Observe que 1 + N + N2 < N2 + N2 + N2 = 3.N2 para N > N0

O(N.logN + N2) é O(N2)

Observe que N.logN + N2 <N2 + N2 = 2.N2 para N > N0

Propriedades:

1. O(f(N)) + O(g(N)) é O(max{f(N), g(N)})
2. O(f(N)).O(g(N)) é O(f(N).g(N))
3. O(k.f(N)) é O(f(N)) desde que k ≠ 0

c0f(N)

g(N)

f(N)

N0

**Exemplo de análise de algoritmos**

Vejamos um algoritmo simples e algumas características de sua análise.

Algoritmo de busca sequencial:

**# procura x em a[0], a[1], ... a[N-1]**

**# devolve o índice do primeiro elemento encontrado**

**def busca(a, x, N):**

**for i in range(N):**

**if a[i] == x return i**

**return -1**

A função index do Python faz algo parecido com a função acima. Mas, a única forma de procurar um elemento numa lista é varrer a lista comparando um a um.

Existem muitas variações deste algoritmo, mas todas elas têm que percorrer a lista.

Quantas comparações são necessárias até encontrar o elemento procurado ou concluir que ele não está na tabela?

Melhor caso: 1 - uma só comparação quando x == a[0].

Pior caso: N – quando não encontra ou x == a[N-1].

Caso médio: (1+N) / 2 – média entre o pior e o melhor ?

Para considerarmos a média entre o melhor e o pior caso, estamos assumindo uma hipótese importante. A probabilidade de ser qualquer valor entre 1 e N é a mesma. Isso normalmente não é verdade.

De uma maneira geral, a determinação do pior caso dá uma boa informação de como o algoritmo se comporta e oferece um limitante superior para o tempo que o algoritmo demandará.

O caso médio é o mais interessante de ser determinado, mas nem sempre é possível, pois muitas vezes depende de hipóteses adicionais sobre os dados.

Supondo então o pior caso, o algoritmo acima é O(N) (linear). Mesmo considerando a média de N/2 repetições, esse algoritmo seria O(N).

**Outro exemplo - 1**

Determinar qual o último elemento igual a x de uma lista.

A melhor solução é a busca sequencial do fim para o começo do vetor.

**# procura x a partir do fim da lista**

**def busca(a, x):**

**N = len(a)**

**for i in range(N - 1, -1, -1):**

**if a[i] == x: return i**

**return -1**

É uma solução O(N). O pior caso, é repetição N vezes e mesmo num caso médio, seria sempre proporcional a N.

Se a busca for realizada do início para o fim, o algoritmo é menos eficiente na média, mas continua sendo O(N).

**# procura x a partir do início da lista**

**def busca1(a, x):**

**N = len(a)**

**k = -1**

**for i in range(N):**

**if a[i] == x: k = i**

**return k**

**Outro exemplo - 2**

Função que recebe um inteiro n > 0 e devolve lista com os dígitos que se repetem em n.

Solução 1 – compara cada dígito de n com todos os demais:

**def repetidos(n):**

**st = str(n) # transforma n numa string**

**rept = []**

**# para cada dígito de n varre todos os dígitos de n**

**for i in range(len(st)):**

**for j in range(len(st)):**

**if i != j and st[i] == st[j] and int(st[i]) not in rept:**

**rept.append(int(st[i]))**

**return rept**

Se n tem N dígitos, o comando if acima é repetido N x N vezes. Portanto o algoritmo é O(N2).

Há outras soluções para esse mesmo problema. Abaixo, uma delas onde a repetição é feita somente N vezes, sendo portanto o algoritmo O(N). Nesta solução usamos uma lista com 10 contadores. Um para cada dígito de n.

**def repetidos1(n):**

**rept = []**

**digitos = [0 for k in range(10)] # contadores de cada dígito**

**# isola cada dígito de n e conta**

**while n > 0:**

**dig = n % 10**

**digitos[dig] += 1 # conta o dígito**

**n = n // 10**

**# verifica quais digitos aparecem mais de uma vez**

**for k in range(10):**

**if digitos[k] > 1: rept.append(k)**

**return rept**

Podemos dizer também que o algoritmo acima é O(log n) (n minúsculo). Observe que log n é a quantidade de dígitos de n que chamamos acima de N (N maiúsculo).

**A notação O(f(N)) é a complexidade dos algoritmos**

Como já vimos, a notação O(f(N)) ignora pontos importantes sobre o algoritmos:

* Como ele funciona para N menores
* Se vamos rodar num computador lento ou rápido

Mas do ponto de vista de complexidade, o que se pode afirmar e, portanto, o que interessa sobre o algoritmo é o seu comportamento assintótico, isto é, qual a curva que melhor descreve o seu comportamento.

Veremos que existem algoritmos com vários comportamentos:

Constantes – O(1)

Lineares – O(N)

Quadráticos – O(N2)

Polinomiais – O(Nk)

Exponenciais - O(kN)

Logarítmicos – O(lg N) ou O(N.lg N)

Sempre que desenvolvermos um algoritmo a partir de agora neste curso, tentaremos responder sempre a sua complexidade ou o seu comportamento frente a notação O.

**Alguns exemplos**

Vejamos os algoritmos acima:

**Raízes de equação do 2. grau**

**O(1)**

**Máximo de uma sequência de N elementos**

**O(N)**

**Conta a quantidade de nulos num vetor de N elementos**

**O(N)**

**Verifica se dois vetores de N elementos são iguais**

**O(N)**

**Conta os algarismos significativos de um inteiro**

**O(log N)**

**Conta quantos bits significativos tem um inteiro**

**O(log N)**

**Imprimir tabela de i / j (1 ≤ i, j ≤ N)**

**O(N2)**

**Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]**

**O(N.M)** ou **O(N2)** se **N > M**

**Idem imprimindo a tabela i \* j \* k (1 ≤ i ≤ N; 1 ≤ j ≤ M; 1 ≤ k ≤ P)**

**O(N.M.P)** ou **O(N3)** se **N > M,P**

**Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]**

**O(N.M.P)** ou **O(N3)** se **N > M,P**

**Imprimir todos os números inteiros com até N dígitos**

**O(10N)**