# Árvores Binárias de Busca

**1. Um breve comentário sobre os algoritmos de busca em tabelas**

De uma maneira geral, são realizadas operações de busca, inserção e remoção de elementos numa tabela.

A busca sequencial tradicional é O(N). Não é eficiente, mas permite inserções e remoções rápidas. A inserção pode ser feita no final da tabela, pois a ordem não precisa ser preservada. A remoção de um elemento deveria ser seguida de uma compactação da tabela que é demorada. Podemos simplesmente marcar o elemento removido, substituindo-o por um valor especial que nunca fará parte da tabela. A remoção fica mais simples, mas não diminuímos o tamanho da tabela.

A busca binária é O(logN). É muito eficiente, mas a tabela deve estar em ordem crescente ou decrescente. Portanto inserções e remoções são muito ineficientes. Para inserir ou remover mantendo a ordem, é necessário deslocar parte da tabela.

A busca em tabela hash sequencial depende da função de hash e da variedade dos dados. Uma vantagem é que permite inserção de novos elementos. A remoção não é permitida, pois altera a estrutura da tabela. Entretanto podemos simplesmente marcar o elemento removido como na busca sequencial acima. Ele permanece na tabela, mas com status de removido.

No caso geral, pouco se pode afirmar sobre a eficiência do hash em tabela sequencial. Depende da função de hash e dos dados. No pior caso é O(N).

Outro inconveniente é que no hash a tabela ocupa mais espaço.

No caso do hash com lista ligada, inserção e remoção são facilitadas com a ocupação ideal de memória. Entretanto no pior caso, a busca continua sendo O(N).

A situação ideal seria um algoritmo que tivesse a eficiência da busca binária O(logN), permitisse inserções e remoções rápidas e que a tabela ocupasse somente o espaço necessário.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Algoritmo | Busca | Inserção | Remoção |
| Sequencial | O(n) | O(1) | O(1) – [1]O(n) – [2] |
| Binária | O(log n) | O(n) – [3] | O(1) – [1]O(n) – [2] |
| Hash | O(1) – [4]O(n) – [5] | O(1) – [4]O(n) – [5] | O(1) – [1]O(n) – [6] |
| Hash com Lista Ligada | O(1) – [4]O(n) – [5] | O(1) – [7]O(n) – [8] | O(1) – [4]O(n) – [5] |
| Ideal | O(log n) | Melhor que O(n) | Melhor que O(n) |

Observações:

[1] – Marcando o elemento. Sem compactar a tabela

[2] – Compactando a tabela

[3] – Para manter a classificação, tem que colocar o elemento em sua devida posição

[4] – Se for possível uma função de hash que garanta uma boa distribuição de forma

 a limitar a quantidade elementos por sub-lista

[5] – O pior caso ocorre quando os elementos estão todos contíguos

[6] – Ao remover um elemento é necessário verificar os seguintes para manter a estrutura

 da tabela

[7] – Se a inserção for no primeiro elemento

[8] – Se a inserção for no final e eventualmente todos estão na mesma lista

A situação ideal é conseguida quando a tabela tem uma estrutura em **árvore de busca**.

Dentre os vários tipos de árvores de busca, as mais simples são as árvores binárias de busca que veremos a seguir.

**2. Árvores binárias**

Chamamos de Árvores Binárias (AB), um conjunto finito T de nós ou vértices, onde existe um nó especial chamado **raiz** e os restantes podem ser divididos em dois subconjuntos disjuntos, chamados de sub-árvores esquerda e direita que também são Árvores Binárias. Em particular T pode ser vazio.

Exemplos:

9

7

5

4

8

2

5

8

7

9

3

1

8

8

9

Cada nó numa AB pode ter então 0, 1 ou 2 filhos. Portanto, existe uma hierarquia entre os nós. Com exceção da raiz, todo nó tem um nó pai.

Dizemos que o nível da raiz é 1 e que o nível de um nó é o nível de seu pai mais 1. A altura de uma AB é o maior dos níveis de seus nós.

Dizemos que um nó é folha da AB se não tem filhos.

**3. Árvores binárias de busca**

Seja T uma AB. Se v é um nó de T, chamamos de info(v) a informação armazenada em v.

Chamamos T de Árvore Binária de Busca (ABB) quando:

Se v1 pertencente à sub-árvore esquerda de v então info(v1) < info(v).

Se v2 pertencente à sub-árvore direita de v então info(v2) > info(v).

Exemplos:

7

7

1

9

8

3

9

5

8

5

1

3

Os exemplos acima mostram que podemos ter várias ABBs com os mesmos elementos. Conforme veremos à frente o objetivo é sempre termos uma ABB de menor altura. Nesse sentido a primeira ABB acima é melhor que a segunda.

Um exemplo de AB de muitos níveis e poucos elementos:

5

7

8

9

O exemplo abaixo não é ABB. O 2 está à direita do 4.

7

4

8

5

9

2

Uma ABB pode ter elementos repetidos. Podemos colocá-los na sub-árvore esquerda ou direita. Nos algoritmos abaixo vamos considerá-los sempre à direita. Dessa forma, os algoritmos para procurar um determinado elemento caso ele apareça mais vezes ficam mais simples.

**4. Árvores binárias como listas ligadas**

Podemos representar uma ABB com uma lista ligada, onde cada elemento tem os seguintes campos:

 info

eprox dprox

info - campo de informação

eprox - apontador para a sub-árvore esquerda

dprox - apontador para a sub-árvore direita

Portanto, podemos representar uma ABB como um nó que é a raiz e duas referências para as respectivas sub-árvore esquerda e direita:

**class ABB:**

 **def \_\_init\_\_ (self, raiz):**

 **''' cria uma nova ABB com esta raiz e sem filhos.'''**

 **self.\_info = raiz**

 **self.\_eprox = None**

 **self.\_dprox = None**

Podemos agora escrever os seus métodos principais. Em vez disso, vamos escrever os algoritmos como funções independentes.

**5. Algoritmos de busca**

A1

Função que procura elementos com info igual a v numa ABB h. A versão abaixo é recursiva e devolve o primeiro nó encontrado com info igual a v ou None se não encontrou:

**# Procura elemento com info igual a v na ABB h**

**# Versão recursiva**

**def busca(h, v):**

 **if h is None: return None**

 **t = h.\_info**

 **if t == v: return h**

 **if v < t:**

 **return busca(h.\_eprox, v) # procura à esquerda**

 **else:**

 **return busca(h.\_dprox, v) # procura à direita**

**Complexidade da busca**

No pior caso, o número de comparações é igual ao número de nós da árvore, no caso em que a árvore tem tantos níveis quanto o número de elementos. Portanto a complexidade é O(N).

A complexidade é a altura da árvore, portanto é conveniente que a árvore tenha sempre altura mínima.

A árvore que possui tal propriedade é uma AB dita **completa** (todos os nós com filhos vazios estão no último ou penúltimo nível). Neste caso a complexidade é O(log N) ou seja: Se T é uma AB completa com N>0 nós então T possui altura H mínima e H=1+log2 N (considerando o valor de log2 N truncado).

O lema a seguir dá a relação entre altura e número de nós de uma AB completa:

**Lema:**

Seja T uma AB completa com N nós e altura H.

Então 2(H-1) ≤ N ≤ 2H - 1.

**Prova:**

Se a AB completa possui apenas 1 nó no seu nível inferior então N = 2(H-1).

Se a AB completa está cheia N = 2H - 1.

**A2**

Vejamos agora a versão não recursiva para a busca. A chamada buscaNR(r, x) procura elemento com info igual a x na ABB r. Devolve o primeiro nó encontrado com info = x ou None caso não encontre:

**# Procura elemento com info igual a v na ABB h**

**# Versão não recursiva**

**def buscaNR(h, v):**

 **p = h**

 **while p is not None:**

 **t = p.\_info**

 **if v == t: return p # encontrou**

 **if v < t: p = p.\_eprox # à esquerda**

 **else: p = p.\_dprox # à direita**

 **# se chegou aqui é porque não encontrou**

 **return None**

**6. Outros algoritmos**

**A3**

A função a seguir conta o número de nós de uma AB com determinado valor de info. A chamada conta(r, x) devolve o número de elementos iguais a x da AB r.

**# conta elementos com info igual a v na ABB h**

**def conta(h, v):**

 **if h is None: return 0**

 **# verifica se conta este nó**

 **if v == h.\_info: a = 1**

 **else: a = 0**

 **# conta esta nó mais as ABBs esquerda e direita**

 **return a + conta(h.\_eprox, v) + conta(h.\_dprox, v)**

Estamos supondo neste caso que os elementos iguais podem estar à direita ou à esquerda.

O algoritmo acima percorre toda a ABB.

Exercícios:

1. Refaça, supondo que elementos iguais, estarão sempre à direita.
2. Refaça novamente usando algoritmo não recursivo. Nas duas formas, recursivo ou não recursivo.

**A4**

Transformar um vetor de n elementos, já ordenado, numa ABB mais ou menos equilibrada. A idéia é sempre pegar um elemento médio como raiz da sub-árvore. Para facilitar as chamadas recursivas vamos fazer a função de modo que a mesma se aplique a qualquer trecho contíguo do vetor. Assim, a chamada raiz = monta(a, 0, n-1) faz a montagem da árvore com os elementos a[0] até a[n-1], devolvendo uma referência para a raiz da árvore. A chamada raiz = monta(a, n1, n2) faz o mesmo para os elementos a[n1] até a[n2].

**# Monta uma ABB a partir de uma lista já classificada**

**# Elementos repetidos podem ficar tanto a esquerda quanto a direita**

**def montaABB(a, iesq, idir):**

 **# verifica se há elementos na lista**

 **if iesq > idir: return None**

 **m = (iesq + idir) // 2 # element médio**

 **abb = ABB(a[m])**

 **abb\_esq = montaABB(a, iesq, m - 1)**

 **abb\_dir = montaABB(a, m + 1, idir)**

 **abb.\_eprox = abb\_esq**

 **abb.\_dprox = abb\_dir**

 **return abb**

O trecho abaixo cria duas ABBs a partir de listas classificadas.

**lista = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]**

**outralista = [0,1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,5,5,6,7,8,9]**

**mabb = montaABB(lista, 0, 6)**

**moabb = montaABB(outralista, 0, 18)**

Exercícios:

1. Desenhe a ABB construída pelo algoritmo acima para as listas:

**[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]**

**[0, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 6, 6]**

1. Refaça a função montaABB acima usando sub-listas do Python. A função terá então um só parâmetro montaABB(a).

**A5**

Função que conta o número de nós de uma AB. A chamada conta(r), devolve o número de nós da AB apontada por r.

**# Conta o número de nós de uma ABB h**

**def contaNN(h):**

 **if h is None: return 0**

 **return 1 + contaNN(h.\_eprox) + contaNN(h.\_dprox)**

**Exercícios**

Baseado na solução acima escreva as seguintes funções:

1. Função conta1(h) que conta o número de folhas de uma AB h.

2. Função conta2(h) que conta o número de nós que tenham pelo menos um filho de uma AB h.

3. Função conta3(h, x) que conta número de elementos com info >= x de uma ABB h.

4. Idem ao problema A4 acima, considerando uma ABB onde elementos iguais ficam à direita.

**A6**

Função que devolve uma lista com todos os campos de informação (info) dos nós de certo nível da ABB. A chamada **listaniveis(h, lista, 3, 0)** lista todos os nós de nível 3 da ABB h. Vamos convencionar que a raiz tem nível zero. O último parâmetro é usado apenas para controle e na chamada inicial tem que ser igual ao nível da raiz.

**# Devolve lista com todos os nós de um certo nivel niv**

**def listaniveis(h, listnos, niv, niv\_atual):**

 **if niv == niv\_atual:**

 **if h is not None: listnos.append(h.\_info)**

 **else: listnos.append(None)**

 **return**

 **# ainda não chegou neste nível**

 **if h is not None:**

 **listaniveis(h.\_eprox, listnos, niv, niv\_atual + 1)**

 **listaniveis(h.\_dprox, listnos, niv, niv\_atual + 1)**

 **else:**

 **listaniveis(None, listnos, niv, niv\_atual + 1)**

 **listaniveis(None, listnos, niv, niv\_atual + 1)**

O trecho abaixo lista todos os níveis de uma ABB:

**# lista cada um dos níveis da ABB mabb**

**k = 0**

**while True:**

 **ln = []**

 **listaniveis(mabb, ln, k, 0)**

 **if ln.count(None) == 2 \*\* k: break**

 **print("nivel ", k,":", ln)**

 **k = k + 1**

**print("Esta ABB tem", k, "níveis")**

**A7**

Transformando o trecho acima numa função:

**def ImprimeNiveisABB(h, nomeABB):**

 **print("\n\nLista a ABB:", nomeABB, "nível a nível")**

 **k = 0**

 **while True:**

 **ln = []**

 **listaniveis(h, ln, k, 0)**

 **if ln.count(None) == 2 \*\* k: break**

 **print("nivel ", k,":", ln)**

 **k = k + 1**

 **print("ABB", nomeABB, "com", k, "níveis")**

**A8**

Função que percorre a ABB, visitando a sub-árvore esquerda, a raiz e a sub-árvore direita. Nesta ordem, os nós serão visitados em ordem crescente do campo info.

**def ImprimeABB(h):**

 **if h is None: return**

 **ImprimeABB(h.\_eprox)**

 **print(h.\_info)**

 **ImprimeABB(h.\_dprox)**

Exercícios:

1. Idem visitando primeiro a raiz, sub-árvore esquerda e direita (ordem pré-fixa)
2. Idem visitando primeiro a sub-árvore esquerda, a direita e a raiz (ordem pós-fixa)

**7. Algoritmos de inserção numa ABB**

Um novo elemento é inserido sempre como uma folha de uma ABB. É necessário descer na ABB até encontrar o nó que será o pai deste novo nó.

**A9**

Uma versão não recursiva para a inserção numa ABB. A função insere(h, x), insere elemento com info igual a x em seu devido lugar dentro da ABB h. Se o parâmetro h for None, a ABB não existe ainda e este é o primeiro elemento. Se x já estiver em algum nó da ABB, a inserção será à direita.

**# Insere elemento com info x na ABB h**

**# Elementos iguais sempre a direita**

**def insere(h, x):**

 **# verifica se será o primeiro**

 **if h is None:**

 **h = ABB(x)**

 **return h**

 **# procura o lugar para inserir x**

 **# percorre a ABB até achar um nó com o filho None**

 **p, q = h, h**

 **while q is not None:**

 **v = q.\_info**

 **p = q**

 **# à esquerda ou à direita**

 **if x < v: q = q.\_eprox # esquerda**

 **else: q = q.\_dprox # direita**

 **# Neste ponto, p é o pai do nó a ser inserido**

 **# Verificar novamente se é a esquerda ou direita**

 **q = ABB(x)**

 **if x < p.\_info: p.\_eprox = q**

 **else: p.\_dprox = q**

 **return h**

O trecho abaixo constrói uma ABB por inserções sucessivas:

**abb = None**

**for k in [4, 7, 85, 98, 4, 5, 6]: abb = insere(abb, k)**

Exercício:

1. A versão acima usa duas referências (p e q) para percorrer a ABB. Refaça usando apenas uma referência.
2. Escreva uma versão recursiva da inserção

**Complexidade da construção de uma ABB por inserções sucessivas**

Para inserir elemento é necessário achar o seu lugar. Portanto a complexidade é a mesma da busca.

Usando-se o algoritmo acima e inserindo-se um a um, podemos no pior caso (ABB com um só elemento por nível - tudo à esquerda, tudo à direita ou ziguezague) chegar a:

1+2+3+...+n = n.(n+1)/2 acessos para construir toda a árvore. Portanto O(n2).

Se os elementos a serem inseridos estiverem ordenados, usando o algoritmo A4, a complexidade é O(N). Observe que não é necessário percorrer a ABB no algoritmo A4.

Porém, seria necessário ordenar antes a lista de elementos a serem inseridos.

**Complexidade da inserção em uma ABB**

No pior caso é O(n).

No melhor caso, supondo a **árvore completa** (folha da árvore) teremos que percorrer os níveis como na busca. Portanto 1+log n. Temos então um algoritmo O(log n).

**8. Algoritmo de remoção numa ABB**

A remoção é um pouco mais complexa que a busca ou inserção. O problema da remoção física de um nó é que é necessário encontrar outro nó para substituir o removido, caso o nó a ser removido tenha filhos.

Dois casos a considerar:

1. O nó a ser removido não tem filhos esquerdo e/ou direito.

remover remover

substituto não há substituto

 substituto remover

É só alterar o ponteiro para o nó a substituir e remover fisicamente o nó. Se não há filhos, basta mudar o ponteiro do pai para NULL.

1. O nó a ser removido tem filhos direito e esquerdo:

remover

 Novo link

 Novo link

 Candidatos a substitutos

Os candidatos a substituto são obtidos percorrendo-se a ABB:

Um à esquerda e tudo a direita até achar nó com dprox NULL . Ou um a direita e tudo à esquerda até achar nó com eprox NULL. Determinado o candidato a substituir, é preciso então:

1. Substituir o conteúdo (campo info) do nó a ser substituído pelo do candidato.
2. Como o candidato pode ter filhos (apenas esquerdo ou apenas direito), esses filhos serão herdados pelo pai do candidato. Basta então mudar o ponteiro desse nó pai do candidato para o seu filho.

Essas são as linhas gerais para os algoritmos de remoção mas não vamos detalhá-los.

**9. Árvores Binárias de Busca Completas**

Já vimos que o problema das ABB é que ela pode ficar desbalanceada com a inserção e remoção de novos elementos. A situação ideal em uma ABB é que ela se já **completa** (como o menor número possível de níveis).

Como seria possível mantê-la **completa**?

Isso pode ser feito de 2 maneiras:

1. Toda vez que um elemento é inserido ou removido, rearranja-se a ABB para a mesma continue **completa**.
2. Inserir e remover elementos da maneira usual e de tempos em tempos executar um algoritmo que reconstrói a ABB deixando-a **completa**.

Existem vários algoritmos com esses objetivos. **Não serão vistos neste curso**.

Apenas citamos 2 tipos mais comuns abaixo. Nessas ABBs, os algoritmos de inserção e remoção já o fazem deixando a ABB completa ou balanceada.

Com uma ABB **completa**, chegamos a situação ideal de busca, pois temos uma algoritmo equivalente ao da busca binária O(log N), em uma tabela que permite inserções rápidas (O(log N)) e remoções tão rápidas quanto possível (O(N) no pior caso). Além disso, só usa a quantidade de memória necessária.

**10. Outras Árvores Binárias**

Apenas citando os tipos mais importantes:

**10.1 Árvores Binárias de Busca AVL (Adelson-Vesky e Landis (1962))**

Cada nó mantém uma informação adicional, chamada fator de balanceamento que indica a diferença de altura entre as sub-árvores esquerda e direita.

As operações de inserção e remoção mantém o fator de balanceamento entre -1 e +1.

 **10.2 Árvores Binárias de Busca Rubro-Negras**

É uma ABB com as seguintes propriedades:

1. Todo nó é vermelho ou preto.
2. Toda folha é preta.
3. Se um nó é vermelho então seus filhos são pretos.
4. Todo caminho da raiz até qualquer folha tem sempre o mesmo número de nós pretos.

Com essas propriedades, é possível manter a ABB mais ou menos balanceada após inserções e remoções.

**11. Outras Árvores de Busca**

Árvores de Busca, não precisam ser necessariamente binárias. Podemos construir árvores com vários elementos em cada nó (n-árias). Cada elemento possui um ramo esquerdo (menores) e um ramo direito (maiores ou iguais).

Este é o caso das chamadas **B-Árvores**. Também **não serão vistos neste curso.**

São usadas principalmente para arquivos em banco de dados.

No caso de arquivos interessa muito diminuir a quantidade de acessos a disco. Assim, a cada leitura, vários nós estarão disponíveis na memória. A quantidade de níveis da árvore diminui e, portanto, a quantidade de acessos para se procurar um elemento.