

Uma Conjectura Refutada sobre Satisfazibilidade Probabilística

Marcelo Finger
Glauber De Bona

Instituto de Matemática e Estatística - USP

Dezembro de 2009

1 Introdução

O estudo do raciocínio sob incerteza é de interesse de diversas áreas e, nas ciências da computação, tem aplicações úteis na análise de programas probabilísticos e sistemas distribuídos. Ainda no século XIX, Boole [1] já estudava a atribuição de probabilidades a sentenças lógicas, tendo influenciado de Finetti em sua teoria da probabilidade subjetiva no século seguinte. Em 1965 Hailperin [2] revisitou o problema, trazendo-o para a programação linear. Já em 1986, Nilsson [3] formalizou o problema da satisfazibilidade probabilística como o conhecemos hoje: dadas sentenças lógicas, e probabilidades atribuídas a elas, deseja-se saber se esta atribuição é consistente. As principais soluções analíticas e numéricas desse problema, além de seu histórico detalhado, podem ser vistas em [4].

O problema da satisfazibilidade probabilística (PSAT) é NP-completo. Logo, o teorema de Cook-Levin [5] garante a existência de uma redução polinomial do PSAT para o problema da satisfazibilidade clássica (SAT), outro NP-completo. Tal redução é atraente devido à existência de bons algoritmos para se resolver o SAT, estes em contínua pesquisa. Outro interesse em reduzir o PSAT ao SAT vem da busca por um melhor entendimento da relação entre a lógica e a probabilidade. Este trabalho tem por objetivo investigar a relação entre o PSAT e o SAT, procurando por caminhos que possibilitem a redução desejada. Embora tal redução não seja alcançada nesse relatório, ele traz resultados significativos da pesquisa, como uma forma normal para o PSAT e uma relação de acarretamento probabilístico, que se mostraram úteis no estudo da satisfazibilidade probabilística.

A seção 2 apresenta formalmente o problema PSAT, na sua formulação via programação linear de Nilsson [3], e demonstra sua NP-completude. A seção 3 traz a Forma Normal Atômica para o PSAT, que particiona o problema em um SAT clássico e uma atribuição de probabilidades a átomos. Na seção 4 é introduzida uma relação de acarretamento probabilístico, e um teorema evidencia sua utilidade na ligação entre o PSAT e o SAT. Continuamos apresentando um conjunto de fórmulas com fácil verificação de seu acarretamento probabilístico e mostramos algumas propriedades inerentes a essas fórmulas. Então, na seção 5

apresentamos uma conjectura, sob o ferramental desenvolvido nas seções anteriores, sobre uma possível redução do PSAT ao SAT. Tal conjectura é refutada exaustivamente, com a apresentação de um contra-exemplo.

2 O problema

A satisfazibilidade probabilística (PSAT) é um problema de decisão, onde se pergunta se há consistência em um conjunto de probabilidades atribuídas a fórmulas lógicas. Seja $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ um conjunto de k sentenças lógicas sobre um conjunto de n variáveis booleanas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, com os operadores usuais da lógica proposicional clássica. Dado um conjunto de probabilidades, $P = \{p_i | 0 \leq p_i \leq 1, 1 \leq i \leq k\}$, dizemos que a instância do problema PSAT formada pelo conjunto S e por $p(s_i) = p_i$, com $1 \leq i \leq k$, é satisfazível se, e somente se, esta atribuição de probabilidades é consistente.

Uma valoração v é definida inicialmente como uma função que associa valor verdade a variáveis booleanas, formalmente $v : X \rightarrow \{0, 1\}$. Podemos então estender o domínio das valorações para o conjunto de fórmulas S , à maneira usual da lógica clássica¹, $v : S \rightarrow \{0, 1\}$. Seja $V = \{v_1, \dots, v_{2^n}\}$ o conjunto das valorações possíveis sobre X , e π , uma distribuição de probabilidade sobre V . A probabilidade de uma fórmula s de acordo com π é dada por $p_\pi(s) = \sum \{\pi(v_j) | v_j(s) = 1\}$. Assim, as probabilidades p_i atribuídas às fórmulas de S serão consistentes se houver uma distribuição π sobre V que faça $p_\pi(s_i) = p_i, 1 \leq i \leq k$.

Agora o PSAT pode ser expressado matematicamente como um problema de programação linear, como introduzido em [3]. Seja Δ a instância do problema PSAT formada pela atribuição das probabilidades do conjunto P às k fórmulas do conjunto S , $\Delta = \{p(s_i) = p_i | 1 \leq i \leq k\}$. Definimos a matriz $A_{k \times 2^n} = [a_{ij}]$, tal que $a_{ij} = v_j(s_i)$, e a matriz $\vec{p}_{k \times 1} = [p_{ij}]$, tal que $p_{ij} = p_i$. Temos que Δ é satisfazível sse há um vetor π que satisfaz as restrições:

$$A\pi = \vec{p} \quad (1)$$

$$\pi \geq 0 \quad (2)$$

$$\sum \pi = 1 \quad (3)$$

Se existir tal solução, dizemos que π satisfaz Δ , caso contrário dizemos que Δ é insatisfazível. As restrições (2) e (3) forçam que π seja uma distribuição de probabilidade. A restrição (3) pode ser omitida se adicionarmos a A uma linha inteira de 1's, de tal maneira que $a_{k+1,j} = 1, 1 \leq j \leq 2^n$, e adicionarmos a $\vec{p}$ um elemento $p_{k+1,1} = 1$, o que faremos no restante deste relatório.

O lema de Carathéodory [6] garante que, se o problema de programação linear (1-3) tem solução, então há uma solução com apenas $k + 1$ elementos de π diferentes de zero. Como observado em [7], isso faz com que o PSAT esteja em NP, pois podemos tomar uma matriz $A_{k+1,k+1}$ e um vetor $\pi_{k+1,1}$ como NP-certificado. Além disso, um problema de satisfazibilidade da lógica proposicional (SAT), formado por um conjunto S de k sentenças, pode ser reduzido a um

¹Sejam α e β fórmulas da lógica clássica proposicional, tem-se: $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$; $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$; $v(\neg \alpha) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$; $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$; e $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = v(\beta)$.

PSAT, em tempo polinomial em k , fazendo $p(s_i) = p_i, 1 \leq i \leq k$. Segue que PSAT é NP-difícil e, logo, NP-completo.

3 A Forma Normal Atômica

Seja $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ um conjunto de sentenças da lógica clássica proposicional, sobre o conjunto de variáveis booleanas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dizemos que uma instância do problema PSAT, $\Delta = \{p(s_i) = p_i | 1 \leq i \leq l\}$, $0 \leq p_i \leq 1$, está na *Forma Normal Atômica* se puder ser particionada em dois conjuntos, (Γ, Ψ) , onde $\Gamma = \{p(s_i) = 1 | 1 \leq i \leq m\}$ e $\Psi = \{p(y_i) = p_i | y_i \text{ é um átomo e } 1 \leq i \leq k\}$, com $0 \leq p_i \leq 1$, onde $l = m + k$. A partição Γ é a parte SAT da forma normal atômica, representada geralmente como um conjunto de fórmulas, e a partição Ψ é a parte de atribuição de probabilidades atômicas. O teorema a seguir mostra como qualquer instância do problema PSAT pode ser trazida para a forma normal atômica, adicionando um número linear de novas variáveis.

Teorema 3.1 (Forma Normal Atômica). *Seja $\Delta = \{p(s_i) = p_i | 1 \leq i \leq k\}$ uma instância do problema PSAT, então pode-se construir, em tempo polinomial, uma instância do PSAT na forma normal atômica (Γ, Ψ) , tal que Δ é satisfazível se, e somente se, (Γ, Ψ) também o é.*

Demonstração. Para construirmos, a partir de uma instância do problema PSAT $\Delta = \{p(s_i) = p_i, 1 \leq i \leq k\}$, uma instância do PSAT na forma normal atômica (Γ, Ψ) , primeiramente adicionamos k variáveis, $y_1, \dots, y_k$. Então fazemos $\Gamma = \{p(y_i \leftrightarrow s_i) = 1 | 1 \leq i \leq k\}$ e $\Psi = \{p(y_i) = p_i | 1 \leq i \leq k\}$. Claramente, isso pode ser feito em tempo polinomial sobre k .

Suponha que haja uma distribuição de probabilidade π , sobre as valorações $v : \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \{0, 1\}$, que satisfaça (Γ, Ψ) . Como π satisfaz (Γ, Ψ) , temos que $p_\pi(y_i) = p_i, 1 \leq i \leq k$. Pela construção de Γ , e pelas leis da probabilidade, temos que $p_\pi(y_i) = p_\pi(s_i)$ e, logo, $p_\pi(s_i) = p_i, 1 \leq i \leq k$. Sobre as valorações $v' : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}$, definimos uma distribuição de probabilidade π' :

$$\pi'(v') = \sum \{\pi(v) | v(x_i) = v'(x_i), 1 \leq i \leq n\}$$

Assim π' é uma distribuição de probabilidade sobre $\{x_1, \dots, x_n\}$ que satisfaz $p_{\pi'}(s_i) = p_i, 1 \leq i \leq k$ e, consequentemente, π' satisfaz Δ .

Por outro lado, suponha que haja uma distribuição de probabilidade π' sobre as valorações $v' : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ que satisfaça Δ . Como π' satisfaz Δ , $p_{\pi'}(s_i) = p_i, 1 \leq i \leq k$. Definimos uma distribuição de probabilidade π sobre as valorações $v : \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\pi(v) = \begin{cases} \pi'(v') & \text{, se } v(x_i) = v'(x_i) \text{ e } v(y_j) = v(s_j), 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq k \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Claramente, temos $p_\pi(s_i) = p_{\pi'}(s_i)$ e $p_\pi(y_i) = p_\pi(s_i), 1 \leq i \leq k$. Daí segue que $p_\pi(y_i) = p_{\pi'}(s_i) = p_i, 1 \leq i \leq k$, e então π satisfaz Ψ . Para todo v , tal que $\pi(v) \neq 0$, tem-se $v(y_i) = v(s_i), 1 \leq i \leq k$, então $p_\pi(y_i \leftrightarrow s_i) = 1, 1 \leq i \leq k$, e π satisfaz Γ . Finalmente, π satisfaz (Γ, Ψ) . $\square$

A forma normal atômica permite que vejamos uma instância do problema PSAT (Γ, Ψ) como a interação entre uma atribuição de probabilidades, representada por Ψ , e uma instância do SAT, Γ . Assim, soluções para (Γ, Ψ) podem ser vistas como soluções para Ψ restringidas pela instância Γ do SAT.

Seja v' uma valoração sobre $\{y_1, \dots, y_k\}$. Dizemos que v' é consistente com Γ , uma instância do problema SAT sobre as variáveis $\{y_1, \dots, y_k\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$, se existe uma valoração $v : \{y_1, \dots, y_k\} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ que satisfaça Γ , tal que $v(y_i) = v'(y_i)$, $1 \leq i \leq k$.

Lema 3.2. *Seja (Γ, Ψ) uma instância do problema PSAT na forma normal atômica, onde $\Psi = \{p(y_i) = p_i, 1 \leq i \leq k\}$, e Γ , uma instância do SAT sobre as variáveis $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$. Se (Γ, Ψ) é satisfeito pela distribuição de probabilidade π , então toda valoração $v : \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \{0, 1\}$, tal que $\pi(v) > 0$, estende uma valoração $v' : \{y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \{0, 1\}$, com $v(y_i) = v'(y_i)$, $1 \leq i \leq k$, tal que v' é consistente com Γ .*

Demonstração. Para toda fórmula $s_i \in \Gamma$, tem-se $p_\pi(s_i) = 1$. Logo, se uma valoração $v : \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \{0, 1\}$ tem $\pi(v) > 0$, v deve satisfazer todas fórmulas $s_i \in \Gamma$, pois se v não satisfizesse algum $s_i \in \Gamma$, teríamos $p_\pi(s_i) < 1$, o que é uma contradição. Construindo uma valoração $v' : \{y_1, \dots, y_k\} \rightarrow \{0, 1\}$, com $v'(y_i) = v(y_i)$, $1 \leq i \leq k$, v' deve ser consistente com Γ por definição, já que v satisfaz Γ . $\square$

Teorema 3.3. *Seja $\Psi = \{p(y_i) = p_i | 1 \leq i \leq k\}$. Uma instância PSAT na forma normal atômica (Γ, Ψ) é satisfazível sse existe uma matriz A_Ψ , com $k+1$ linhas e até $k+1$ colunas, que, junto de um vetor π , atende às restrições (1) e (2), tal que cada coluna de A_Ψ (a menos da última linha) corresponde a uma valoração sobre $\{y_1, \dots, y_k\}$ consistente com Γ .*

Demonstração. Suponha que Γ contenha m fórmulas sobre as variáveis $x_1, \dots, x_n$. Como (Γ, Ψ) é satisfazível, existe uma matriz A , $(m+k+1) \times (2^{n+k})$, e uma distribuição de probabilidade π , sobre as 2^{n+k} valorações, que satisfazem as restrições (1) e (2). Construimos A' retirando de A todas as colunas referentes a valorações v_j , tal que $\pi(v_j) = 0$, e construimos π' eliminando os π_j nulos, referentes a $\pi(v_j) = 0$. Claramente, A' e π' satisfazem (1) e (2). Para toda fórmula $s_i \in \Gamma$, temos $p_{\pi'}(s_i) = 1 = p_i$, mas, para representar a restrição (3), adicionamos $p_{m+k+1} = 1$. Como as colunas de A' representam valorações v_j , tal que $\pi(v_j) > 0$, estas valorações devem satisfazer Γ . Assim, as linhas referentes às fórmulas de Γ devem ser iguais a $(m+k+1)$ -ésima linha, composta somente de 1's, e podem ser excluídas de A' , juntamente com os p_i 's correspondentes. Assim obtemos a matriz A'' , com $(k+1)$ linhas, que com π' satisfaz (1) e (2). Então, pelo lema de Carathéodory [6], existe uma matriz A_Ψ com $k+1$ linhas e até $k+1$ colunas que satisfaz (1) e (2). E, pelo lema (3.2), as valorações correspondentes às colunas de A_Ψ devem ser consistentes com Γ .

Agora suponha que existe uma matriz quadrada A_Ψ , de dimensão $k+1$, que atende às restrições (1) e (2), com solução π , e com colunas representando valorações sobre $y_1, \dots, y_k$ consistentes com Γ . Construimos A' adicionando m linhas com 1's, correspondendo às fórmulas de Γ , e adicionamos os m 1's correspondentes a $\vec{p}$. Assim, cada coluna de A' representa uma valoração que satisfaz Γ . Então montamos A'' , a partir de A' , adicionando m colunas com 1's, e incluímos m 0's em π correspondentes a essas colunas, chegando a π' .

Claramente, A'' e π' satisfazem as restrições (1) e (2), logo (Γ, Ψ) é satisfazível. $\square$

4 Uma Relação de Acarretamento Probabilístico

Diz-se que um conjunto de fórmulas Γ acarreta uma fórmula α (ou implica logicamente), $\Gamma \models \alpha$, quando toda valoração que satisfaz Γ também satisfizer α , o que equivale a dizer que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ é insatisfazível. Nesta seção, procuramos um acarretamento análogo para a lógica probabilística, aqui chamado de acarretamento probabilístico, explorando instâncias do problema PSAT na forma normal atômica.

Seja Ψ uma atribuição de probabilidades sobre átomos, e α , uma fórmula. Dizemos que Ψ acarreta probabilisticamente α , denotando por $\Psi \models \alpha$, sse a instância do problema PSAT na forma atômica $(\{\neg\alpha\}, \Psi)$ é (probabilisticamente) insatisfazível. Em outras palavras, sendo $(\{\neg\alpha\}, \Psi)$ insatisfazível, isso significa que $p(\neg\alpha) = 1$, logo também $p(\alpha) = 0$, são inconsistentes com Ψ , e como as probabilidades são não-negativas temos que $\Psi \models \alpha$ implica $p(\alpha) > 0$, para qualquer distribuição de probabilidade que satisfizer Ψ .

Denotamos por $\Psi^{\approx}$ o conjunto de todas as fórmulas α tais que $\Psi \models \alpha$. O papel deste conjunto, e do acarretamento probabilístico no estudo do problema PSAT fica claro no seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Seja $\Sigma = (\Gamma, \Psi)$ uma instância do problema PSAT na forma normal atômica. Σ é satisfazível sse para todo $\alpha \in \Psi^{\approx}$, $\Gamma \cup \{\alpha\}$ é classicamente satisfazível.*

Demonstração. Suponha que exista $\alpha \in \Psi^{\approx}$, mas $\Gamma \cup \{\alpha\}$ não seja classicamente satisfazível, então $\Gamma \models \neg\alpha$. Como $\alpha \in \Psi^{\approx}$, obtemos que $(\{\neg\alpha\}, \Psi)$ é probabilisticamente insatisfazível, logo (Γ, Ψ) também o é.

Agora suponha que (Γ, Ψ) seja insatisfazível. Seja γ a conjunção das fórmulas pertencentes a Γ . É óbvio que $(\{\gamma\}, \Psi)$ também será insatisfazível. Daí, segue que $\neg\gamma \in \Psi^{\approx}$, e $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ é claramente insatisfazível. $\square$

Isso nos motiva a estudar as propriedades do acarretamento probabilístico.

4.1 Propriedades do Acarretamento Probabilístico

Notemos, primeiramente, a relação entre $\models$ e $\models$:

Lema 4.2. *Se $\Psi \models \alpha$ e $\alpha \models \beta$, então $\Psi \models \beta$.*

Demonstração. Como $\Psi \models \alpha$, temos $p(\alpha) > 0$, e $\alpha \models \beta$ leva a $p(\alpha) \leq p(\beta)$. Então, tem-se $p(\beta) > 0$ e, logo, $\Psi \models \beta$. $\square$

Entretanto, notamos que $\Psi \models \alpha$ e $\Psi \models \beta$ não implicam $\Psi \models \alpha \wedge \beta$. Como contra-exemplo, tomamos $p(\alpha) = p(\beta) = 0,4$ e $p(\alpha \vee \beta) = 0,8$, donde claramente segue $p(\alpha \wedge \beta) = 0$ e, logo, $\Psi \not\models \alpha \wedge \beta$. Nesse contra-exemplo, fizemos $p(\alpha \vee \beta) = p(\alpha) + p(\beta)$, o que só é possível quando $p(\alpha) + p(\beta) \leq 1$. Isso nos conduz ao próximo lema.

Como, na forma normal atômica do PSAT, as probabilidades são atribuídas a átomos, e consequentemente a suas negações, convém definirmos literal, para

falarmos de probabilidades sobre literais. Um literal x é um átomo ou sua negação, e $\bar{x}$ denota a negação deste literal.

Lema 4.3. *Seja Ψ uma atribuição de probabilidades a átomos, tal que, para os literais y e z , $p(y) + p(z) > 1$. Então $\Psi \models y \wedge z$.*

Demonstração. Como consequência direta dos axiomas da probabilidade de Kolmogorov, sabemos que:

$$p(y) + p(z) = p(y \vee z) + p(y \wedge z)$$

Como $p(y) + p(z) > 1$, e sempre $p(y \vee z) \leq 1$, obtemos que $p(y \wedge z) > 0$ e, logo, $\Psi \models y \wedge z$. $\square$

Porém, como $p(y_1) + \dots + p(y_k) > 1$ não implica $\Psi \models y_1 \wedge \dots \wedge y_k$, buscamos uma generalização adequada para o lema (4.3).

Sejam $y_1, \dots, y_k$ literais, e seja j um inteiro, com $1 \leq j \leq k$. Definimos:

$$C^j(y_1, \dots, y_k) = \bigvee \{y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_j} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k\} \quad (4)$$

Por exemplo, $C^1(y, z, w) = y \vee z \vee w$, $C^2(y, z, w) = (y \wedge z) \vee (y \wedge w) \vee (z \wedge w)$ e $C^3(y, z, w) = y \wedge z \wedge w$. Convém definirmos $C^0(y_1, \dots, y_k) = 1$, sendo o elemento neutro da conjunção. Chamamos uma fórmula no formato (4) de *C-fórmula*.

Devido à comutatividade dos operadores lógicos $\wedge$ e $\vee$, a ordem dos literais em (4) é irrelevante. Além disso, observemos as seguintes propriedades das C-fórmulas, com relação à implicação lógica:

Lema 4.4. *Seja $y_1, \dots, y_k$ um conjunto de literais, e j, j', k e k' números inteiros:*

(a) *se $0 \leq j' < j$, então $C^j(y_1, \dots, y_k) \models C^{j'}(y_1, \dots, y_k)$.*

(b) *se $k' > k$, então $C^j(y_1, \dots, y_k) \models C^j(y_1, \dots, y_{k'})$.*

Demonstração.

- (a) Seja o conjunto $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$. Notemos que uma valoração v satisfaz $C^j(y_1, \dots, y_k)$ sse existir um conjunto $Y' \subseteq Y$, tal que $|Y'| = j$ e $v(y) = 1$ para todo $y \in Y'$. Obviamente, se v satisfaz $C^j(y_1, \dots, y_k)$, então, para todo $1 \leq j' < j$, existe um conjunto $Y'' \subseteq Y' \subseteq Y$, tal que $|Y''| = j'$ e $v(y) = 1$ para todo $y \in Y''$. Então tal valoração v deve também satisfazer $C^{j'}(y_1, \dots, y_k)$.
- (b) Basta notar que, quando $k' > k$, $C^j(y_1, \dots, y_{k'})$ pode ser escrito na forma $\alpha \vee C^j(y_1, \dots, y_k)$. Então toda valoração que satisfaz $C^j(y_1, \dots, y_k)$ também satisfaz $C^j(y_1, \dots, y_{k'})$.

$\square$

Seja $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ um conjunto de literais. Outra importante propriedade das C-fórmulas, a ser usada na seção 5, diz respeito a influência do acréscimo de literais contrários, $z, \bar{z} \notin Y$, em $C^j(Y)$, onde $C^j(Y)$ denota $C^j(y_1, \dots, y_k)$:

Lema 4.5. *Seja Y um conjunto de literais, e seja z um literal, tal que $z, \bar{z} \notin Y$. Então $C^j(Y) \equiv C^{j+1}(Y \cup \{z, \bar{z}\})$.*

Demonstração. Expandido a fórmula $C^{j+1}(Y \cup \{z, \bar{z}\})$ e descartando as conjunções que implicam $z \wedge \bar{z}$, sobram conjunções com $j + 1$ literais, dos quais j literais pertencem a Y , e o literal restante pertence a $\{z, \bar{z}\}$. Em outras palavras, $C^{j+1}(Y \cup \{z, \bar{z}\}) \equiv z \wedge C^j(Y) \vee \bar{z} \wedge C^j(Y) \equiv C^j(Y)$. $\square$

Ainda antes de enunciarmos o próximo teorema, precisamos do seguinte lema, onde C_k^j denota $C^j(y_1, \dots, y_k)$:

Lema 4.6. *Para $0 \leq i < k$, $p(y_{k+1} \wedge C_k^i) + p(C_k^{i+1}) = p(C_{k+1}^{i+1}) + p(y_{k+1} \wedge C_k^{i+1})$*

Demonstração. Diretamente dos axiomas de Kolmogorov, temos:

$$p(y_{k+1} \wedge C_k^i) + p(C_k^{i+1}) = p(y_{k+1} \wedge C_k^i \vee C_k^{i+1}) + p(y_{k+1} \wedge C_k^i \wedge C_k^{i+1})$$

do lema (4.4) temos que $C_k^{i+1} \models C_k^i$, então:

$$p(y_{k+1} \wedge C_k^i \wedge C_k^{i+1}) = p(y_{k+1} \wedge C_k^{i+1})$$

Da definição das C-fórmulas, notamos que:

$$y_{k+1} \wedge C_k^i \vee C_k^{i+1} \equiv C_{k+1}^{i+1}$$

Finalmente, obtemos:

$$p(y_{k+1} \wedge C_k^i) + p(C_k^{i+1}) = p(C_{k+1}^{i+1}) + p(y_{k+1} \wedge C_k^{i+1})$$

$\square$

Teorema 4.7. *Seja $\{y_1, \dots, y_k\}$ um conjunto de literais. Então:*

$$p(y_1) + \dots + p(y_k) = p(C^1(y_1, \dots, y_k)) + \dots + p(C^k(y_1, \dots, y_k))$$

Demonstração. Provaremos por indução em k , com C_k^j denotando $C^j(y_1, \dots, y_k)$:

Base da indução: $k = 1$, $p(y_1) = C^1(y_1)$, trivial.

Hipótese de indução: $k = j \geq 1$, $p(y_1) + \dots + p(y_j) = p(C_j^1) + \dots + p(C_j^j)$.

Passo de indução: $k = j + 1$; partindo da hipótese de indução, somamos $p(y_{j+1})$ a ambos os lados da igualdade:

$$p(y_1) + \dots + p(y_j) + p(y_{j+1}) = p(C_j^1) + \dots + p(C_j^j) + p(y_{j+1})$$

Sendo y_{j+1} equivalente a $y_{j+1} \wedge C_j^0$, aplicamos o lema (4.6):

$$p(C_j^1) + p(y_{j+1}) = p(C_{j+1}^1) + p(y_{j+1} \wedge C_j^1)$$

para então obter:

$$p(y_1) + \dots + p(y_{j+1}) = p(C_{j+1}^1) + p(y_{j+1} \wedge C_j^1) + p(C_j^2) + \dots + p(C_j^j)$$

De maneira análoga, repetimos a aplicação do lema (4.6) $j - 1$ vezes, chegando a:

$$p(y_1) + \dots + p(y_{j+1}) = p(C_{j+1}^1) + \dots + p(C_{j+1}^j) + p(y_{j+1} \wedge C_j^j)$$

Notando que $y_{j+1} \wedge C_j^j = C_{j+1}^{j+1}$, tem-se finalmente:

$$p(y_1) + \dots + p(y_{j+1}) = p(C^1(y_1, \dots, y_{j+1})) + \dots + p(C^{j+1}(y_1, \dots, y_{j+1}))$$

$\square$

Apresentadas as C-fórmulas, e de posse do teorema (4.7), podemos enunciar o teorema que finalmente generaliza o lema (4.3):

Teorema 4.8. *Seja $\{y_1, \dots, y_k\}$ um conjunto de literais, e Ψ , uma atribuição de probabilidades a esses literais (ou a sua negação). Se $\sum_{i=1}^k p(y_i) > j - 1$, então $C^j(y_1, \dots, y_k) \in \Psi^{\approx}$.*

Demonstração. Do teorema (4.7) temos:

$$\sum_{i=1}^k p(y_i) = \sum_{i=1}^k p(C^i(y_1, \dots, y_k)) > j - 1$$

Como $p(\alpha) \leq 1$ para toda fórmula α , $\sum_{i=1}^{j-1} p(C^i(y_1, \dots, y_k)) \leq j - 1$, logo $\sum_{i=j}^k p(C^i(y_1, \dots, y_k)) > 0$.

Por outro lado, do lema (4.4), segue que $C^k(y_1, \dots, y_k) \models \dots \models C^j(y_1, \dots, y_k)$, pois $j \leq k$, e logo:

$$\begin{aligned} p(C^j(y_1, \dots, y_k)) &\geq \dots \geq p(C^k(y_1, \dots, y_k)) \\ (k - j + 1)p(C^j(y_1, \dots, y_k)) &\geq \sum_{i=j}^k p(C^i(y_1, \dots, y_k)) > 0 \\ p(C^j(y_1, \dots, y_k)) &> 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $\Psi \models C^j(y_1, \dots, y_k)$ e, por definição, $C^j(y_1, \dots, y_k) \in \Psi^{\approx}$. $\square$

5 Refutação de uma Conjectura sobre Satisfazibilidade Probabilística

Seja (Γ, Ψ) uma instância do problema PSAT. Pelo teorema (4.1), se para alguma C-fórmula α , tal que $\alpha \in \Psi^{\approx}$, $\{\alpha\} \cup \Gamma$ é classicamente insatisfazível, então (Γ, Ψ) é probabilisticamente insatisfazível. Por outro lado, se toda fórmula $\alpha \in \Psi^{\approx}$ fosse implicada por alguma fórmula $C^j(y_1, \dots, y_k)$, tal que $\sum_{i=1}^k p(y_i) > j - 1$, a insatisfazibilidade probabilística de (Γ, Ψ) garantiria a insatisfazibilidade clássica de $\{C^j(y_1, \dots, y_k)\} \cup \Gamma$, para alguma C-fórmula nessa condição. Com isso em mente, conjecturamos que, para toda instância insatisfazível do problema PSAT (Γ, Ψ) , existe uma fórmula $C^j(y_1, \dots, y_k)$, com $\sum_{i=1}^k p(y_i) > j - 1$, tal que $\{C^j(y_1, \dots, y_k)\} \cup \Gamma$ é insatisfazível. O lema seguinte refuta tal conjectura.

Lema 5.1. *Existe uma instância insatisfazível do problema PSAT (Γ, Ψ) tal que, para toda fórmula $C^j(y_1, \dots, y_k)$, com $\sum_{i=1}^k p(y_i) > j - 1$, tem-se que $\{C^j(y_1, \dots, y_k)\} \cup \Gamma$ é classicamente satisfazível.*

Demonstração. Nossa demonstração consiste em apresentar um exemplo, ou seja, uma instância insatisfazível do problema PSAT $\Delta = (\Gamma, \Psi)$ onde, para todas as fórmulas $C^j(y_1, \dots, y_k)$, com $\sum_{i=1}^k p(y_i) > j - 1$, $\{C^j(y_1, \dots, y_k)\} \cup \Gamma$ é classicamente satisfazível.

Consideremos a instância do problema PSAT $\Delta = (\Gamma, \Psi)$, onde Γ é um conjunto com 1 fórmula, da lógica proposicional clássica, sobre as 4 variáveis

booleanas $\{x_1, \dots, x_4\}$. Para simplificar a notação, se α e β são fórmulas, $\alpha\beta$ denota $\alpha \wedge \beta$, e $\bar{\alpha}$ denota $\neg\alpha$:

$$\Gamma = \{x_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4\}$$

E Ψ é a seguinte atribuição de probabilidades às variáveis booleanas:

$$\Psi = \{p(x_1) = 0,47, \quad p(x_2) = 0,40, \quad p(x_3) = 0,46, \quad p(x_4) = 0,05\}$$

donde segue, pelos axiomas de Kolmogorov:

$$p(\bar{x}_1) = 0,53, \quad p(\bar{x}_2) = 0,60, \quad p(\bar{x}_3) = 0,54 \quad \text{e} \quad p(\bar{x}_4) = 0,95$$

Sejam $v_k : \{x_1, \dots, x_4\} \rightarrow \{0, 1\}$, $1 \leq k \leq 5$, as únicas valorações que satisfazem Γ , tal que v_1 satisfaz $x_1x_2x_3x_4$, v_2 satisfaz $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, v_3 satisfaz $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, v_4 satisfaz $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ e v_5 satisfaz $x_1\bar{x}_2x_3x_4$.

Para notar a insatisfazibilidade de $\Delta = (\Gamma, \Psi)$, apresentamos o problema na sua forma de programação linear, onde a matriz $A_{5 \times 5}$ tem como colunas as valorações que satisfazem Γ , $a_{ij} = v_j(x_i)$, com $1 \leq i \leq 4$ e $1 \leq j \leq 5$, acrescentando uma linha de 1's referente à restrição (3):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor $\vec{p}_{5 \times 1} = [p_{ij}]$ é tal que $p_{i,1} = p(x_i)$, $1 \leq i \leq 4$, e $p_{5,1} = 1$ é referente à restrição (3). Se existe uma distribuição de probabilidade π sobre as valorações $v_1, \dots, v_5$ que satisfaz a instância do PSAT $\Delta = (\Gamma, \Psi)$, então o seguinte problema de programação linear dever ter solução:

$$A\pi = \vec{p} \tag{5}$$

$$\pi \geq 0 \tag{6}$$

Resolvendo o sistema linear (5), possível e determinado, obtemos $\pi(v_5) = -0,23$, o que contradiz a restrição (6). Logo, $\Delta = (\Gamma, \Psi)$ é insatisfazível.

Resta-nos mostrar exaustivamente que, para toda fórmula $C^j(y_1, \dots, y_k)$, com $\sum_{i=1}^k p(y_i) > j - 1$, temos $\{C^j(y_1, \dots, y_k)\} \cup \Gamma$ satisfazível. Relembrando o lema (4.4.a), sendo Y um conjunto de literais, temos que, se $0 \leq j' < j$, $C^j(Y) \models C^{j'}(Y)$. Para cada conjunto de literais $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, definimos $j_{\max}(Y) = \lceil \sum_{i=1}^k p(y_i) \rceil$, e denotamos $C^{j_{\max}(Y)}(Y)$ por $C^{j_{\max}}(Y)$. Assim, se $0 \leq j < j_{\max}(Y)$, então $C^{j_{\max}}(Y) \models C^j(Y)$, e se $j_{\max}(Y) < j$, então $\sum_{i=1}^k p(y_i) \leq j - 1$. Logo, para cada conjunto de literais Y , basta-nos verificar a satisfazibilidade de $\{C^{j_{\max}}(Y)\} \cup \Gamma$.

Com 4 variáveis, temos 8 literais diferentes, que nos levam a $2^8 = 256$ possíveis conjuntos de literais a serem checados. Logo notamos que o conjunto vazio não precisa ser conferido, pois $\sum_{y \in \emptyset} p(y) = 0 = j_{\max}(\emptyset)$, e $C^0(Y) = TRUE$ é satisfeito por qualquer valoração. Por outro lado, se $z, \bar{z} \notin Y$, então temos $j_{\max}(Y \cup \{z, \bar{z}\}) = \lceil p(z) + p(\bar{z}) + \sum_{y \in Y} p(y) \rceil = j_{\max}(Y) + 1$. Logo, pelo lema (4.5), $C^{j_{\max}}(Y \cup \{z, \bar{z}\}) \equiv C^{j_{\max}}(Y)$, e não precisamos checar conjuntos que possuam 2 literais onde um seja a negação do outro. As 4 tabelas abaixo mostram

os 80 conjuntos possíveis restantes de literais sobre $\{x_1, \dots, x_4\}$, organizados pelo tamanho do conjunto. Cada linha da tabela apresenta um conjunto Y de literais, a soma das probabilidades desses literais, $\sum_{y \in Y} p(y)$, o j_{max} desse conjunto e a valoração que satisfaz $\{C^{j_{max}}(Y)\} \cup \Gamma$. Cada valoração é representada pela conjunção que somente ela satisfaz.

Tabela 1: Conjuntos com 4 literais

conjunto de literais Y	$\sum_{y \in Y} p(y)$	j_{max}	$v_i v_i \models \{C^{j_{max}}(Y)\} \cup \Gamma$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	2, 62	3	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4\}$	1, 72	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4\}$	2, 54	3	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4\}$	1, 64	2	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	2, 42	3	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, x_4\}$	1, 52	2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_4\}$	2, 34	3	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4\}$	1, 44	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	2, 56	3	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4\}$	1, 66	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4\}$	2, 48	3	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4\}$	1, 58	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	2, 36	3	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4\}$	1, 46	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4\}$	2, 28	3	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	1, 38	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$

Tabela 2: Conjuntos com 3 literais

conjunto de literais $\mathbf{Y}$	$\sum_{y \in Y} p(y)$	j_{max}	$v_i v_i \models \{C^{j_{max}}(Y)\} \cup \Gamma$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	1,67	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3\}$	1,59	2	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3\}$	1,47	2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, x_3\}$	1,39	2	$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	1,61	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, x_3\}$	1,53	2	$x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, x_2, \bar{x}_3\}$	1,41	2	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	1,33	2	$x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	2,08	3	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_4\}$	1,18	2	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_4\}$	1,88	2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2, x_4\}$	0,98	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	2,02	3	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, \bar{x}_2, x_4\}$	1,12	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, x_2, \bar{x}_4\}$	1,82	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, x_2, x_4\}$	0,92	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	2,02	3	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_3, x_4\}$	1,12	2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_3, \bar{x}_4\}$	1,94	2	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_3, x_4\}$	1,04	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	1,96	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, \bar{x}_3, x_4\}$	1,06	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, x_3, \bar{x}_4\}$	1,88	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, x_3, x_4\}$	0,98	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	2,09	3	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4\}$	1,19	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4\}$	2,01	3	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_2, x_3, x_4\}$	1,11	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	1,89	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_2, \bar{x}_3, x_4\}$	0,99	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_2, x_3, \bar{x}_4\}$	1,81	2	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_2, x_3, x_4\}$	0,91	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$

Tabela 3: Conjuntos com 2 literais

conjunto de literais $\mathbf{Y}$	$\sum_{y \in Y} p(y)$	j_{max}	$v_i v_i \models \{C^{j_{max}}(Y)\} \cup \Gamma$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$	1, 13	2	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_2\}$	0, 93	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, \bar{x}_2\}$	1, 07	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, x_2\}$	0, 87	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$	1, 07	2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_3\}$	0, 99	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, \bar{x}_3\}$	1, 01	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, x_3\}$	0, 93	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_1, \bar{x}_4\}$	1, 48	2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_1, x_4\}$	0, 58	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_1, \bar{x}_4\}$	1, 42	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_1, x_4\}$	0, 52	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	1, 55	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_2, x_4\}$	0, 65	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_2, \bar{x}_4\}$	1, 35	2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_2, x_4\}$	0, 45	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	1, 14	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_2, x_3\}$	1, 06	2	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{x_2, \bar{x}_3\}$	0, 94	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_2, x_3\}$	0, 86	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	1, 49	2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{\bar{x}_3, x_4\}$	0, 59	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{x_3, \bar{x}_4\}$	1, 41	2	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
$\{x_3, x_4\}$	0, 51	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$

Tabela 4: Conjuntos com 1 literal

conjunto de literais $\mathbf{Y}$	$\sum_{y \in Y} p(y)$	j_{max}	$v_i v_i \models \{C^{j_{max}}(Y)\} \cup \Gamma$
$\{x_1\}$	0, 47	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_1\}$	0, 53	1	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_2\}$	0, 40	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_2\}$	0, 60	1	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_3\}$	0, 46	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_3\}$	0, 54	1	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$\{x_4\}$	0, 05	1	$x_1 x_2 x_3 x_4$
$\{\bar{x}_4\}$	0, 95	1	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$

E assim completamos a prova, com uma instância insatisfazível do problema PSAT, (Γ, Ψ) , onde para toda fórmula $C^j(Y)$, tal que $\sum_{y \in Y} p(y) > j - 1$, mostramos uma valoração que satisfaz $\{C^j(Y)\} \cup \Gamma$. $\square$

6 Conclusões

Neste relatório, investigamos a relação entre a satisfazibilidade probabilística e a satisfazibilidade clássica. Para tal, apresentamos a Forma Normal Atômica, que particiona o PSAT em uma atribuição de probabilidade a átomos e um problema SAT. Então pudemos definir uma relação de acarretamento probabilístico ($\approx$) e estudar suas propriedades. Com o teorema (4.1) evidenciamos o papel do acarretamento probabilístico na relação entre o PSAT e o SAT. Definimos as C-fórmulas, que com o teorema (4.8) mostraram utilidade no estudo da satisfazibilidade probabilística. Finalmente, conjecturamos a suficiência de observar apenas as C-fórmulas acarretadas probabilisticamente na decisão da satisfazibilidade de uma instância do problema PSAT e refutamos com um contra-exemplo.

O número exponencial de C-fórmulas a investigar impossibilita seu uso exaustivo em uma possível redução polinomial do PSAT para o SAT, nosso objetivo inicial. Contudo, os resultados encontrados parecem úteis para o estudo do PSAT, o reaproximando da lógica. A Forma Normal Atômica dá um passo importante na separação entre a parte lógica do problema (SAT) e a atribuição de probabilidades. Tal forma normal deve ser útil para padronizar instâncias do PSAT, com intuito de comparar resultados numéricos de algoritmos que resolvem o problema. A relação de acarretamento probabilístico introduzida possibilita a apresentação de uma fórmula "testemunha" da insatisfazibilidade de um problema PSAT. Tal fórmula pode ser usada em provas de insatisfazibilidade probabilística, usando a insatisfazibilidade clássica, ou em algoritmos que resolvam o PSAT.

Como a eficiência dos algoritmos que resolvem o PSAT está ainda muito aquém daqueles que resolvem outros NP-completos (como o SAT), acreditamos que ainda há trabalho a ser feito. Uma possível abordagem seria a redução polinomial para o SAT, que parece mais próxima com a forma normal atômica e a relação de acarretamento probabilístico. Interessante também seria usar os conceitos aqui apresentados juntamente com técnicas de álgebra linear para explorar o PSAT, já que este pode ser visto como um problema de programação linear.

Referências

- [1] G. Boole, An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, Walton and Maberley, Londres, 1854 (reimpressão: Dover, Nova York, 1958).
- [2] T. Hailperin, Best possible inequalities for the probability of a logical function of events, *Amor. Math. Monthly* 72, 343-359 (1965).
- [3] N.J. Nilsson, Probabilistic Logic, *Artificial Intelligence* 28, 71-87 (1986).
- [4] P. Hansen, B. Jaumard, Probabilistic satisfiability, Technical Report G-96-31, Les Cahiers du GERAD, École Polytechnique de Montréal, 1996.
- [5] S. Cook, The Complexity of Theorem Proving Procedures, *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 151-158 (1971).

- [6] V.V. Prasolov, V.M. Tikhomirov, Geometry, Translations of Mathematical Monographs, v. 200, American Mathematical Society, Providence, 2001, 43-44.
- [7] G. Georgakopoulos, D. Kavvadias, C.H. Papadimitriou, Probabilistic Satisfiability, Journal of Complexity 4, 1-11 (1988).
- [8] P. Hansen, B. Jaumard, M.P. Aragao, Booles conditions of possible experience and reasoning under uncertainty, Discrete Applied Mathematics 60, 181-193 (1995).
- [9] P. Hansen, B. Jaumard, G.D. Nguetse, M.P. Aragao, Models and Algorithms for Probabilistic and Bayesian Logic, IJCAI-95 (1995).