MAT-349: 2ª Prova - IME - 25/06/2012 – GABARITO

Questão 1. (2,0 pontos) Seja M um modelo atípico de $\Gamma = \{A : VL(A) = \varnothing, \text{ e } \mathbb{N} \models A\}$, na assinatura $L = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$. Seja $c \in M$. Mostre que:

1. $M \not\models ((0 < x) \wedge (x < 1))[s|_{x=c}]$, para nenhuma $s : \text{Var} \to M$.

   A fórmula diz que o elemento c deveria estar estritamente entre 0 e 1. Mas isso não vale em $\mathbb{N}$ e, portanto não pode valer em M.

2. se $M \not\models (x = \bar{n})[s|_{x=c}]$, para nenhum $n \in \mathbb{N}$, mostre que $M \models (\bar{n} < x)[s|_{x=c}]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Do mesmo modo que no item anterior, se $c \neq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então não pode valer que $n < c < n+1$, para nenhum $n \in \mathbb{N}$ e nem que $c < 0$. Como "$<$" tem que ser ordem linear em M – devido a isso ser verdade em $\mathbb{N}$ – sobrou apenas $n < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Questão 2. (2,0 pontos) Quais são os modelos possíveis da fórmula $\forall x \forall y (x = y)$?

Para qualquer estrutura com mais de dois elementos, essa fórmula não vale. Portanto, seus modelos serão conjuntos unitários. O conjunto vazio foi descartado na definição de estrutura.

Questão 3. (3,0 pontos) Seja $L = \{c, f\}$, sendo que c é símbolo de constante e f é símbolo de função binária. Seja $c(c) = 1$ e $c(f(t_1, t_2)) = 1 + c(t_1) + c(t_2)$.

Mostre, por indução na complexidade dos termos t que $c(t)$ é um número ímpar.

Aqui temos uma SIMPLES indução na complexidade dos termos. Temos o passo inicial $c(c) = 1$ (e também $c(x) = 1$, se x for variável), que é número ímpar. Agora, a hipótese de indução é que $c(t_1)$ e $c(t_2)$ são números ímpares. Calculando $c(f(t_1, t_2)) = 1 + c(t_1) + c(t_2)$, temos dois números ímpares, cuja soma $c(t_1) + c(t_2)$

dá um número par, e somando 1 ao resultado, voltamos a ter um número ímpar.

Mostre que para cada número ímpar $n = 2k + 1$ existe um termo t, tal que $c(t) = n$.

Agora temos que mostrar que cada número ímpar $n = 2k + 1$ ***é o valor de algum termo. Faremos indução finita em*** $k \geq 0$***. Se*** $k = 0$***,*** $n = 1 = c(c)$***. Suponhamos agora que o resultado valha para*** k ***e seja*** t ***um termo tal que*** $c(t) = 2k + 1$***. Então o termo*** $f(t, c)$ ***satisfaz*** $c(f(t, c)) = 1 + c(t) + c(c) = 1 + 2k + 1 + 1 = 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$***. Ou seja, vale também para o caso de*** $k + 1$***.***

Questão 4. (3,0 pontos) Seja $L = \{0, 1, +\}$ e M a L-estrutura dada por $M = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$, com 0 e 1 interpretados como os números 0 e 1 usuais; $a, b \notin \mathbb{N}$, e $a \neq b$; a soma $+$ em $\mathbb{N}$ é a usual, mas $a + n = n + a = a$, $b + n = n + b = b$, para todo $n \in \mathbb{N}$; $b + a = a + a = a$ e $a + b = b + b = b$. Pede-se

1. $M \models \{\forall x(x + 0) = x, \forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))\}$

   A fórmula $(x + 0 = x)$ ***é válida para*** $x \in \mathbb{N}$***. Para os casos em que*** $x = a$***, ou*** $x = b$***, segue da definição da soma em*** M***. A fórmula*** $((x + y) + z = x + (y + z))\}$ ***vale para*** $x, y, z \in \mathbb{N}$***; consideremos os outros casos: se*** $z \in \{a, b\}$***, então*** $(x + y) + z = z = x + z = x + (y + z)$***; se*** $z \in \mathbb{N}$***, mas*** $y \in \{a, b\}$***, então*** $(x + y) + z = y + z = y = x + y = x + (y + z)$***; por fim, se*** $y, z \in \mathbb{N}$ ***e*** $x \in \{a, b\}$***,*** $(x + y) + z = x + z = x = x + (y + z)$***.***

2. $\{\forall x(x+0) = x, \forall x \forall y \forall z((x+y)+z = x+(y+z))\} \nvdash \forall x \forall y(x+y = y+x)$

   Se tomarmos $x = a$ ***e*** $y = b$***, obteremos*** $a + b = b \neq a = b + a$***, ou seja, a fórmula*** $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ ***não vale em*** M***. Pelo Teorema da Completude, essa fórmula não pode ser deduzida das outras duas.***