

POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES

RICARDO BIANCONI

RESUMO. Apresentamos os poliedros estritamente convexos de faces regulares e uniformes, que compreendem os prismas, antiprismas, poliedros platônicos, os de Arquimedes e os de Johnson. São seguidas de perto as obras de Euclides (*Elementos*, Livros XI, XII e XIII) e de Johannes Kepler (*Harmonices Mundi*, Livro II).

Terceira versão (2019): corrigida e ampliada.

1. INTRODUÇÃO

Poliedros ocupam um campo importante e vasto em Geometria Euclidiana, com aplicações em Cristalografia e até em Física Matemática. Aqui tocamos em uma pequena parte do tema, os poliedros estritamente convexos com faces polígonos regulares. Estes formam duas famílias infinitas, os prismas e antiprismas de bases polígonos regulares de $n \geq 3$ lados, os poliedros regulares (os cinco platônicos) os semirregulares (os 13 de Arquimedes) e os não uniformes (os 92 de Johnson; consulte seu artigo [6]). O teorema principal do artigo [5] de Huybers e Coxeter afirma que poliedros convexos com faces regulares que não sejam prismas e nem antiprismas podem ter somente faces triangulares, quadradas, pentagonais, hexagonais, octogonais ou decagonais, e que tais poliedros podem ter no máximo 120 vértices, o que implica que existe uma quantidade finita de tais poliedros. Mostramos a existência dos prismas, antiprismas, dos regulares e semirregulares, mas não estudaremos os 92 de Johnson (consulte o verbete *Sólidos de Johnson* na *Wikipedia* para a listagem destes, acompanhada das figuras). A demonstração de que não há outros requer quase 100 páginas de enumeração de possibilidades e impossibilidades, além de requerer auxílio de computador para tal feito (quem se interessar, poderá consultar o livro [11]). A monografia (em alemão) [4] estuda o uso de poliedros platônicos e arquimedianos na sala de aula.

Notação: \overline{AB} denota o segmento entre os pontos A e B , e AB denota sua medida; $\leftrightarrow AB$ denota a reta determinada por A e B ; \overrightarrow{AB} é a semirreta de vértice A e contendo o ponto B ; o ângulo $\angle AOB$ é o conjunto composto pela união das semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} ; $A - B - C$ significa que os três pontos são colineares e distintos, e B está entre A e C (ou B está no interior do segmento \overline{AC}). Abusamos da notação com as funções trigonométricas

Date: 2018.

escrevendo, por exemplo, $\cos(\pi/5)$ e $\cos(36^\circ)$ (radianos e graus) como tendo o mesmo significado.

As figuras foram feitas com o programa *Geogebra*TM.

2. GENERALIDADES

A construção e a demonstração de impossibilidade de construção de poliedros com determinada configuração de faces requerem argumentos gerais que se repetem em cada caso. Coletamos aqui tais resultados gerais (tirados de Euclides e de Kepler, [3, 7]).

Lembramos que um ângulo diedral é o conjunto dos pontos de uma reta e de dois semiplanos não coplanares determinados por esta reta em dois planos distintos que a contenha. Esta é uma definição análoga a de ângulo no plano, como sendo a união de duas semirretas não colineares partindo do mesmo ponto.

No Livro XI dos *Elementos*, [3, Definição 11, p. 482], Euclides define *ângulo sólido* como sendo a união de mais de dois ângulos planos que não estejam no mesmo plano e construídos a partir do mesmo ponto. Euclides não estuda poliedros não convexos nos *Elementos* (mas Kepler estuda também poliedros estrelados, que não são convexos). Assim, para evitar problemas conceituais de ambiguidade, definimos mais precisamente o que seja um ângulo sólido.

Definição 1 (Ângulo Sólido). Um *ângulo sólido* é o conjunto dos pontos das semirretas que compõem pelo menos três ângulos planos (união de duas semirretas) com mesmo vértice, três a três não coplanares, de modo que, para cada ângulo, os interiores das outras semirretas estão em um mesmo semi-espaco determinado pelo plano contendo aquele ângulo. O *interior* deste ângulo sólido será a intersecção dos semiespaços determinados pelos planos dos ângulos que o compõem e que contenham os interiores das semirretas remanescentes. As *faces* do ângulo sólido são os pontos dos semirretas e do interior dos ângulos que o compõem. Exige-se que cada semirreta seja parte de duas faces adjacentes do ângulo sólido (a figura “fecha”).

Observação 1. Decorre da definição que o interior de um ângulo sólido é um conjunto convexo e não vazio.

O lema a seguir é condição necessária nas demonstrações de existência dos poliedros aqui considerados. Ele junta as Proposições 20 e 21 do Livro XI dos *Elementos* de Euclides, [3, pp. 498–500].

Lema 1 (Condição dos Ângulos). A soma das medidas dos ângulos planos que compõem um ângulo sólido é menor que 360° . Se um vértice pertencer a n ângulos planos de um ângulo sólido, então a soma dos ângulos internos de cada conjunto de $n - 1$ ângulos será maior que a medida do ângulo remanescente.

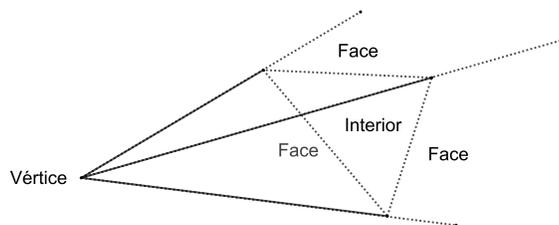


FIGURA 1. Representação de um ângulo sólido com três faces.

Demonstração. Seja dado um ângulo sólido, cujo vértice seja o ponto O , e suas faces sejam determinadas pelos ângulos $\angle A_1OA_2, \dots, \angle A_{n-1}OA_n$ e $\angle A_nOA_1$.

Escolhemos um ponto qualquer P no interior do ângulo sólido e consideremos o plano π contendo P e perpendicular à reta determinada por P e pelo vértice O do ângulo sólido. A intersecção deste plano com as faces do ângulo sólido forma um polígono convexo $B_1 \dots B_n$ e P é um ponto de seu interior. Observe que a medida de $\angle A_iOA_{i+1}$ é menor do que a de $\angle B_iPB_{i+1}$ (considere o ângulo diedral determinado pela reta \overrightarrow{OP} e os pontos B_i e B_{i+1}). Daí a soma das medidas dos ângulos $\angle A_1OA_2, \dots, \angle A_{n-1}OA_n$ e $\angle A_nOA_1$ será menor que a soma das medidas dos ângulos $\angle B_1PB_2, \dots, \angle B_{n-1}PB_n$ e $\angle B_nPB_1$, que é 360° .

A segunda parte deste lema decorre do caso dos ângulos sólidos formados por três ângulos planos, pois podemos considerar sucessivamente os ângulos sólidos $OA_1A_iA_{i+1}$.

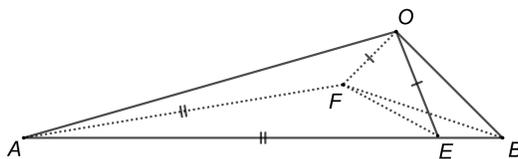


FIGURA 2. Soma de dois ângulos é maior que o terceiro em um ângulo sólido.

Consideremos o ângulo sólido de vértice O e ângulos planos $\angle AOB, \angle BOC$ e $\angle COA$. Se os três ângulos forem congruentes, então a condição da soma de dois deles ser maior que o terceiro é evidente. Se dois deles forem

congruentes e o terceiro menor, então a condição também será satisfeita. Caso contrário, um deles é maior que os outros dois, digamos que este seja $\angle AOB$. Seja E , tal que $A - E - B$ e $\angle AOE \equiv \angle AOD$. Seja F o ponto da semirreta \vec{OC} , tal que $OE = OF$. Por LAL, $\triangle OAE \equiv \triangle OAF$ e, portanto, $AE = AF$. Como o triângulo $\triangle AEF$ é isóscele¹, o ângulo $\angle AEF$ é agudo e, daí, seu suplementar, $\angle BEF$, é obtuso. Como o maior lado de um triângulo é oposto a seu maior ângulo, o lado \overline{BF} é maior que \overline{EB} do triângulo $\triangle EBF$. Comparemos os triângulos $\triangle OEB$ e $\triangle OFB$. O lado \overline{OB} é comum, $OE = OF$, por construção, e $EB < BF$. Daí, o ângulo $\angle OEB$ é menor que $\angle OBF$, sendo que este último é o ângulo $\angle OBC$. Como a soma de $\angle OAE$ com $\angle OEB$ é o ângulo $\angle OAB$, fica demonstrada a desigualdade desejada. \square

Para a construção do icosaedro e do dodecaedro, precisamos de algumas propriedades métricas do pentágono regular, que coletamos a seguir.

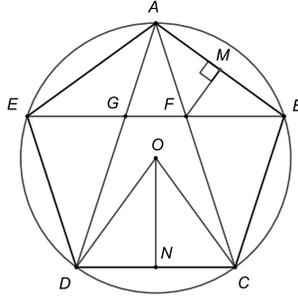


FIGURA 3. Pentágono $ABCDE$ inscrito na circunferência de centro O .

Observação 2. O lado de um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio ρ mede $\ell = 2\rho \sin(\pi/5)$. Como $\sin(\pi/5) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi/5)}$, basta calcularmos $\cos(\pi/5)$. Para isto, acompanhe a Figura 3 e considere um pentágono regular $ABCDE$ inscrito em uma circunferência de centro O . As diagonais \overline{AC} e \overline{BD} têm o ponto F em comum. Os triângulos $\triangle FAB$ e $\triangle BAC$ são isósceles e semelhantes entre si (têm mesmo ângulo nas bases) e, daí $AB/AC = AF/AB$, ou $AB^2 = AF \cdot AC$; além disso, o triângulo $\triangle CBF$ é isósceles, pois $\angle FBA$ mede 36° e, portanto $\angle BFA$ mede 108° ; daí, $\angle CBF$ e $\angle CFB$ ambos medem 72° . Portanto $AB^2 = AF \cdot (AB + AF)$, ou $AF^2 + AB \cdot AF - AB^2 = 0$, que tem a solução positiva $AF = AB(-1 + \sqrt{5})/2$. Assim, se M for o ponto médio de \overline{AB} ,

$$\cos(\pi/5) = \cos(36^\circ) = \frac{AM}{AF} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ e } \sin(\pi/5) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

¹Ambas as grafias *isóscele* e *isósceles* são corretas.

Daí, obtemos que $\ell = \rho \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$. Note que $\rho = \ell \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}$.

O segmento \overline{ON} da Figura 3 liga o centro O com o ponto médio N de \overline{CD} . Como o triângulo $\triangle OCD$ é isóscele, $\overline{ON} \perp \overline{CD}$. Daí, $ON = OC \cos(\pi/5) = \rho(1 + \sqrt{5})/4 = \ell\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/10$.

Em particular, a área do pentágono regular é $A_5 = 5\rho^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/8 = \ell^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/8$.

3. PIRÂMIDES, PRISMAS E ANTIPRISMAS

Definição 2. Uma *pirâmide regular* é um poliedro com uma face (a *base*) um polígono regular qualquer, e faces laterais triangulares (equiláteras). O ponto de encontro destas faces triangulares é o *vértice* da pirâmide.

Observação 3. A base de uma pirâmide regular pode ser um triângulo equilátero, um quadrado ou um pentágono regular, pois duas das faces em cada vértice serão triângulos equiláteros, cujos ângulo somam 120° , que tem que ser maior que o ângulo da base, pelo Lema 1 da condição de ângulos, e os polígonos regulares de 6 ou mais lados tem ângulo maior ou igual a 120° .

Observação 4. A altura de uma pirâmide de faces triângulos equiláteros e base um pentágono regular de aresta ℓ tem altura igual a

$$h = \sqrt{\ell^2 - \rho^2} = \ell \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} = \rho \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

onde $\rho = \ell\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}/10$ é o raio da circunferência que circunscreve o pentágono.

Definição 3. Um *prisma com faces regulares* é um poliedro com duas faces paralelas de $n \geq 3$ lados conectadas por faces quadradas.

Um *antiprisma com faces regulares* é um poliedro com duas faces paralelas de $n \geq 3$ lados conectadas por faces triangulares.

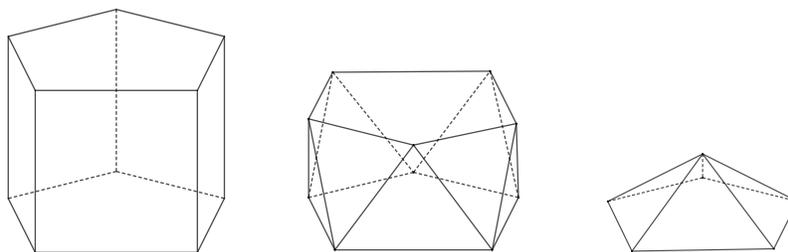


FIGURA 4. Prisma, antiprisma e pirâmide regulares de bases pentagonais.

Observação 5. A construção de prismas com faces regulares não tem nenhum segredo.

Proposição 1 (Antiprismas). Um antiprisma de faces regulares, cuja base seja um polígono regular de $n \geq 3$ arestas, todas de comprimento ℓ , pode ser inscrito no tronco de cilindro de raio $\rho = \ell/[2 \operatorname{sen}(\pi/n)]$ (o lado mede $\ell = 2\rho \operatorname{sen}(\pi/n)$) e altura

$$h = \ell \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sec^2(\pi/2n)}.$$

Em outras palavras, a altura é um dos catetos do triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede $\ell\sqrt{3}/2$ (a medida da altura de um triângulo equilátero) e outro cateto mede a diferença $\rho - \rho \cos(2\pi/n)$.

Demonstração. A demonstração fica mais clara se usarmos como referência o raio ρ da circunferência que circunscribe os dois polígonos. Assim, $\ell_n = 2\rho \operatorname{sen}(\pi/n)$.

A construção do antiprisma faz-se da seguinte maneira (veja a Figura 5, que dá uma visão do caso $n = 5$; consulte também [10]). Inscrevemos o polígono regular de n lados na base do tronco de cilindro, com vértices enumerados sequencialmente $A_1 \dots A_n$. Inscrevemos na mesma base o polígono regular de $2n$ lados e enumeramos seus vértices $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_n B_n$. Traçamos os segmentos $\overline{B_k B'_k}$ ($1 \leq k \leq n$) perpendiculares ao plano da base do tronco do cilindro e medindo a sua altura. Deste modo, os pontos B'_1, \dots, B'_n pertencem à circunferência da outra base do tronco de cilindro. As arestas do antiprisma consistem nas arestas dos polígonos regulares de n lados $\overline{A_1 \dots A_n}$, $\overline{B_1 \dots B_n}$ e as arestas laterais $\overline{A_1 B'_1}, \dots, \overline{A_n B'_n}, \overline{A_2 B'_1}, \dots, \overline{A_n B'_{n-1}}$ e $\overline{A_1 B'_n}$.

Sabemos que $(1 - \cos \theta) = 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$, $\operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2)$ e que $\operatorname{tg}^2 \theta = -1 + \sec^2 \theta$. Assim, altura será

$$h = \sqrt{\frac{3}{4} \ell^2 - \rho^2 (1 - \cos(\pi/n))^2} = \ell \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2(\pi/2n)}{4}} = \ell \sqrt{1 - \frac{\sec^2(\pi/2n)}{4}},$$

como queríamos. \square

Observação 6. Em particular, a altura do antiprisma (de faces regulares) de base pentagonal é

$$h = \ell \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} = \rho,$$

onde ℓ é a medida de cada aresta e ρ é o raio da circunferência que circunscribe o pentágono da base.

Com isto podemos deduzir que este antiprisma pode ser inscrito em uma esfera de raio

$$\sigma = \sqrt{\rho^2 + h^2/4} = \rho \frac{\sqrt{5}}{2} = \ell \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

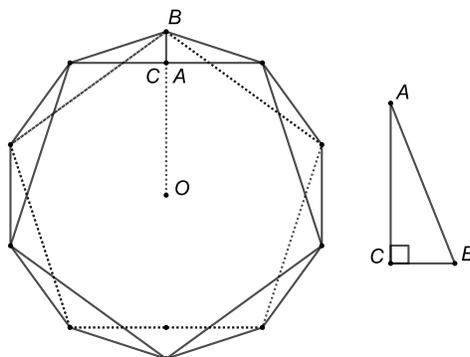


FIGURA 5. Antiprisma de base pentagonal visto de cima: o ponto A está na face de cima e o ponto C na de baixo; O é o centro da circunferência que circunscreve o pentágono de baixo.

4. SÓLIDOS DE PLATÃO

Os sólidos de Platão são os poliedros convexos, cujas faces são todas o mesmo polígono regular. Embora já conhecidos anteriormente, são assim chamados por sua referência no diálogo *Crítias*.

A única restrição à suas construções é a soma dos ângulos das faces em cada vértice do poliedro.

Lema 2. As únicas possibilidades de poliedros regulares são:

- (1) três triângulos em cada vértice (tetraedro);
- (2) quatro triângulos em cada vértice (octaedro);
- (3) cinco triângulos em cada vértice (icosaedro);
- (4) três quadrados em cada vértice (cubo);
- (5) três pentágonos em cada vértice (dodecaedro).

Demonstração. Com triângulos (ângulo interno medindo 60°) só temos as três possibilidades listadas, somando em cada vértice $3 \times 60^\circ = 180^\circ$, $4 \times 60^\circ = 240^\circ$ e $5 \times 60^\circ = 300^\circ$, respectivamente.

Com quadrados (ângulo interno medindo 90°), somente uma possibilidade, somando em cada vértice $3 \times 90^\circ = 270^\circ$.

Com pentágonos (ângulo interno medindo 108°), somente uma possibilidade, somando em cada vértice $3 \times 108^\circ = 324^\circ$.

Como o ângulo interno de um polígono regular de mais do que cinco lados é pelo menos 120° , somando pelo menos 360° em cada vértice, não pode existir nenhum polígono regular com faces com mais do que 5 arestas. \square

Mostremos que tais sólidos existem. Descrevemos as construções contidas no Livro XIII dos *Elementos* de Euclides. Estas construções dão mais do

que sua existência, elas indicam o tamanho das aresta que permitem que seja inscritos em uma esfera (que, para simplificar, assumimos ter raio 1).

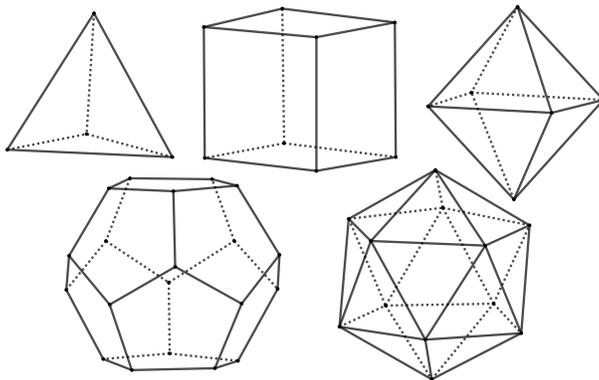


FIGURA 6. Os sólidos platônicos: tetraedro; cubo; octaedro; dodecaedro; icosaedro.

Proposição 2 (Tetraedro). Existe um poliedro convexo regular com três faces triangulares em cada vértice. Possui quatro vértices, seis arestas e quatro faces, e chama-se tetraedro regular. O tetraedro regular de aresta medindo $\ell = 2\rho\sqrt{6}/3$ inscreve-se em uma esfera de raio ρ .

Demonstração. Dado o triângulo equilátero $\triangle ABC$, com arestas medindo ℓ , seja M o ponto médio de \overline{AB} e seja $N \in \overline{CM}$, tal que $CM = 3MN$ (N é o baricentro do triângulo $\triangle ABC$ e, portanto, $AN = BN = CN$). Seja D um ponto da reta perpendicular ao plano ABC e que contenha o ponto N , escolhido de tal modo que $DN = \ell\sqrt{6}/3$.

Afirmamos que $ABCD$ é um tetraedro regular. Por LAL, $\triangle AND \equiv \triangle BND \equiv \triangle CND$, donde segue a igualdade $AD = BD = CD$. Aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle MND$ e obtemos $DM = \ell\sqrt{3}/2$ e, portanto, $DA = \ell$, ou seja, todas as faces são triângulos equiláteros.

A seguir, seja $O \in \overline{DN}$, tal que $ON = DN/4$. Este ponto O é o centro da esfera que circunscreve o tetraedro $ABCD$, pois N é o baricentro de $\triangle ABC$ e, daí, $OA = OB = OC$ e $AN = BN = CN = \ell\sqrt{3}/3$ e a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ONA$ fornece $OA = OB = OC = OD = \ell\sqrt{6}/4$.

Por fim, para que o tetraedro esteja inscrito em uma esfera de raio ρ , as arestas medem $\ell = 2\rho\sqrt{6}/3$. \square

Observação 7. Para saber como chegamos às medidas usadas na demonstração, façamos um raciocínio reverso.

Supomos que a figura exista. Seja $\triangle ABC$ o triângulo da base do tetraedro regular e D o outro vértice. Então $ABCD$ é uma pirâmide com base triangular e o vértice D pertence a um plano perpendicular ao da base. Escolhemos o plano que também contém o ponto C . Seja M o ponto médio de \overline{AB} . O plano DCM é perpendicular ao plano ABC , pois este contém a reta \overline{AB} , que é perpendicular às retas \overline{DM} e \overline{CM} , ambas contidas no plano DCM . Seja $N \in \overline{CM}$, tal que \overline{DN} seja perpendicular a \overline{CM} , ou seja, o baricentro do triângulo $\triangle ABC$. Pelo Teorema de Pitágoras, $CM = \ell\sqrt{3}/2$; daí $MN = \ell\sqrt{3}/6$ e, portanto, $DN = \ell\sqrt{6}/3$.

Seja $O \in \overline{DN}$ o ponto que satisfaz $OD = x$ a ser determinado. A condição para isto é $OD = OA = OB = OC$. Pelo fato de N ser o baricentro de $\triangle ABC$, já temos que $OA = OB = OC$ e que $AN = BN = CN = \ell\sqrt{3}/3$. Impomos que $OA = OD = x$ e aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ONA$, obtendo $OA^2 = ON^2 + AN^2$, ou $x^2 = (\ell\sqrt{6}/3 - x)^2 + \ell^2/3$, o que resulta em $x = \ell\sqrt{6}/4$. Assim, o baricentro do tetraedro $ABCD$ é o centro da esfera que o circunscreve.

Proposição 3 (Octaedro). Existe um poliedro regular com quatro faces triangulares encontrando-se em cada vértice. Possui seis vértices, doze arestas e oito faces, e chama-se octaedro regular. O octaedro regular de aresta medindo $\ell = \rho\sqrt{2}$ inscreve-se em uma esfera de raio ρ .

Demonstração. Dado o quadrado $ABCD$ de aresta medindo ℓ , sejam O o ponto comum às diagonais \overline{AC} e \overline{BD} e E e F os pontos pertencentes à reta perpendicular ao plano ABC que contenha O , tais que $E - O - F$ e $EO = FO = \ell\sqrt{2}/2$.

Afirmamos que $ABCDEFGH$ é um octaedro regular. Por LAL nos diversos triângulos que contêm o vértice O , já temos que $AE = BE = CE = DE = AF = BF = CF = DF$. Aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle AOE$ e obtemos $AE = \ell$, ou seja, todas as faces são triângulos equiláteros.

Por construção, o ponto O é equidistante dos vértices do octaedro e, portanto é o centro da esfera que o circunscreve. Se o raio dessa esfera for ρ , $\ell = \rho\sqrt{2}$. \square

Observação 8. Com a notação da demonstração acima, as faces ABE e CDF são paralelas e, portanto, o octaedro regular também é um antiprisma de base triangular.

Proposição 4 (Icosaedro). Existe um poliedro regular com cinco faces triangulares encontrando-se em cada vértice. Possui 12 vértices, 30 arestas e 20 faces, e chama-se icosaedro regular. O icosaedro regular de aresta medindo $\ell = \sigma\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}/5$ inscreve-se em uma esfera de raio σ . (Portanto, $\sigma = \ell\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$.)

Demonstração. Seguimos a construção dos *Elementos* de Euclides, [3, Livro XIII, Prop. 16, pp. 582–586].

A construção deste poliedro é simples. Basta colocarmos uma pirâmide de base pentagonal sobre cada uma das duas faces pentagonais de um antiprisma pentagonal de faces regulares. O poliedro será convexo e regular.

Mostremos que ele pode ser inscrito em uma esfera. Para simplificar as contas, façamos tudo em função de ρ , o raio da circunferência que circunscreve os pentágonos que servem de bases para o antiprisma e as pirâmides. A altura do antiprisma é ρ (veja a Observação 6, na página 6 acima) e a das pirâmides é $\rho(-1 + \sqrt{5})/2$ (veja a Observação 4, na página 5 acima). Assim, a distância do centro do antiprisma (o ponto médio do segmento que liga os centros das circunferências) que circunscrevem as bases pentagonais) e o vértice de cada pirâmide será $\sigma = \rho\sqrt{5}/2$, que é o raio da esfera que circunscreve o antiprisma. \square

Isto acaba com os casos de faces triangulares. Passemos às faces quadradas.

Proposição 5 (Cubo). Existe um poliedro regular com três faces quadradas por vértice, chamado de cubo. Possui 8 vértices, 6 faces e 12 arestas. O cubo de aresta ℓ pode ser inscrito em uma esfera de raio $\rho = \ell\sqrt{3}/2$.

Demonstração. A construção é simples. Basta construir faces quadradas em planos perpendiculares a de um quadrado de base, etc.

Se a aresta do cubo for ℓ , o Teorema de Pitágoras implica que a diagonal do cubo mede $\ell\sqrt{3}$ e seu ponto médio será o centro da esfera procurada. \square

O cubo tem uma participação importante na construção do dodecaedro regular que se segue.

Proposição 6 (Dodecaedro). Existe um poliedro regular com três faces pentagonais encontrando-se em cada vértice, chamado de dodecaedro. Possui 20 vértices, 30 arestas e 12 faces. Ele pode ser inscrito na esfera de raio $\rho = \ell(\sqrt{3} + \sqrt{15})/4$, onde ℓ é a medida de cada aresta do dodecaedro.

Demonstração. Seguimos a construção dos *Elementos* de Euclides, [3, Livro XIII, Prop. 17, pp. 586–589]. Acompanhe a demonstração pela Figura 7.

Sejam $ECGF$ e $ECHL$ duas faces adjacentes de um cubo. Sejam M , N , R e T os pontos médios das arestas \overline{EG} , \overline{CF} , \overline{EC} e \overline{HL} , respectivamente, e O o ponto médio de \overline{MN} . Sejam $P, Q \in \overline{MN}$ e $S \in \overline{RT}$, tais que $MP = QN = RS = (3 - \sqrt{5})MO/2$. Esta relação surge do cruzamento de duas diagonais de um pentágono, como deduzida na Observação 2, página 4 acima. Sejam A e B no plano perpendicular à face $CEFG$ contendo os pontos M e N , e no exterior do cubo, de modo que $\overline{AP} \perp \overline{MN}$, $\overline{BQ} \perp \overline{MN}$ e $AP = BQ = OP = (-1 + \sqrt{5})MO/2$; e D no plano perpendicular à face $ECHL$, contendo R e T , no exterior do cubo e de modo que $\overline{DS} \perp \overline{RT}$ e $DS = AP = (-1 + \sqrt{5})MO/2$.

Afirmamos que $ABCDE$ é um pentágono regular. Para isto, devemos mostrar que todos os lados têm mesma medida, os vértices são coplanares e todos os ângulos nos vértices são congruentes entre si.

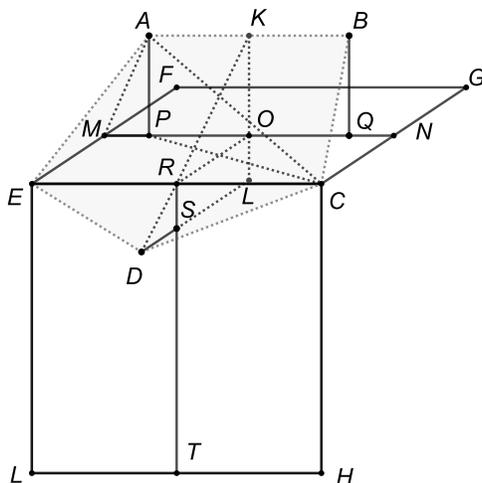


FIGURA 7. Construção do dodecaedro com o auxílio de um cubo.

Pela definição do ponto D , concluímos que $\overline{DR} \perp \overline{EC}$. Como R é o ponto médio de \overline{EC} , o triângulo $\triangle DEC$ é isóscele, ou seja, $CD = DE$. Pela definição do ponto A , obtemos que $\overline{AM} \perp \overline{EF}$. Por LAL, $\triangle AME \equiv \triangle DRE$ e, portanto, $AE = ED$. Analogamente, podemos concluir que $BC = CD$. Agora falta comparar com o lado \overline{AB} , que mede $(-1 + \sqrt{5})MO$. Para isto, usamos o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle APM$ e $\triangle AME$, e obtemos

$$AM^2 = AP^2 + MP^2 = MO^2 \left(\frac{(-1 + \sqrt{5})^2}{4} + \frac{(3 - \sqrt{5})^2}{4} \right) = (5 - 2\sqrt{5})MO^2,$$

$$AE^2 = AM^2 + ME^2 = (5 - 2\sqrt{5} + 1)MO^2 = (-1 + \sqrt{5})^2 MO^2 = AB^2,$$

ou seja, o pentágono é equilátero.

Mostremos que os pontos A, B, C, D e E são coplanares. Seja K o ponto médio de \overline{AB} . Os triângulos (retângulos) $\triangle KOR$ e $\triangle RSD$ estão no mesmo plano que é perpendicular às duas faces do cubo consideradas. As relações

$$\frac{KO}{RS} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ e}$$

$$\frac{OR}{DS} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

mostram que aqueles triângulos são semelhantes e, portanto, os pontos K, R e D são colineares. Como $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, os pontos A, B, C, E, R e, portanto, D são coplanares.

Por fim, mostremos que o pentágono é equiangular. Aplicamos LAL nos triângulos convenientes, concluímos que $AC = BE$ e $AD = BD$.

Para calcularmos AC , usamos os triângulos retângulos $\triangle PNC$ e $\triangle CAP$, e obtemos

$$\begin{aligned} AC^2 &= AP^2 + CP^2 = AP^2 + (PN^2 + CN^2) = \\ &= MO^2 \left(\frac{(-1 + \sqrt{5})^2}{4} + \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} + 1 \right) = 4MO^2 = CE^2. \end{aligned}$$

Para calcularmos AD , usamos o triângulo retângulo $\triangle AKD$, onde KD é a medida da hipotenusa do triângulo $\triangle KLD$, onde L é o ponto de encontro das retas \overleftrightarrow{KO} e \overleftrightarrow{DS} , ou seja,

$$\begin{aligned} KD^2 &= MO^2 \left(1 + \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} \right) = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \\ AD^2 &= AK^2 + KD^2 = MO^2 \left(\frac{(-1 + \sqrt{5})^2}{4} + \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right) = 4MO^2 = CE^2. \end{aligned}$$

Por LLL nos triângulos $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$ e $\triangle EAB$, concluímos que os ângulos $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDE$, $\angle DEA$ e $\angle EAB$ são todos congruentes entre si.

Como esta mesma construção pode ser repetida nas outras faces do cubo, obtemos uma construção do dodecaedro, o que demonstra sua existência.

Para finalizar, precisamos mostrar que a esfera em que o cubo está inscrito também circunscreve o dodecaedro.

O centro X desta esfera está no encontro das diagonais do cubo. A distância de X ao ponto K é $MO(1 + \sqrt{5})/2$. Daí, $AX^2 = AK^2 + KX^2 = 3MO^2$, ou seja, $AX = BX = CX = DX = EX$ e, assim, a esfera de raio $\rho = MO\sqrt{3}$ circunscreve o dodecaedro.

Como $\ell = (-1 + \sqrt{5})MO$ é a medida de cada aresta do dodecaedro, obtemos a relação $\rho = MO\sqrt{3} = \ell(\sqrt{3} + \sqrt{15})/4$. \square

A última proposição do Livro XIII dos *Elementos* de Euclides pede para expor os lados das cinco figuras e compará-las entre si. Como a construção que ele expõe é interessante, apresentamo-la aqui.

Exercício 1. Seja ρ o raio da esfera em que são inscritos os cinco poliedros. Construa em um plano π uma semicircunferência de raio ρ , de centro C e diâmetro \overline{AB} .

- Sejam $D \in \overline{AB}$ e F na semicircunferência, tais que $AD = 2AB/3$ e $\overline{DF} \perp \overline{AB}$. Mostre que AF é o lado do tetraedro e BF é do cubo.
- Seja E na semicircunferência, tal que $\overline{EC} \perp \overline{AB}$. Mostre que AE é o lado do octaedro.
- Seja $G \in \pi$ no mesmo semiplano determinado por \overleftrightarrow{AB} que contenha os pontos da semicircunferência, tal que $\overline{GA} \perp \overline{AB}$ e $GA = AB$, e seja H o ponto da semicircunferência, tal que $G - H - C$. Seja $K \in \overline{AB}$ o pé

da perpendicular $\overline{HK} \perp \overline{AB}$. Seja $L \in \overline{BC}$, tal que $CL = CK$ e M na semicircunferência, tal que $\overline{ML} \perp \overline{BC}$. Mostre que BM é o lado do icosaedro.

- (d) Seja, agora, $N \in \overline{BF}$, tal que $NB^2 = BF \cdot FN$. Mostre que NB é o lado do dodecaedro.

5. INSCREVER UM ICOSAEDRO NUM OCTAEDRO E NUM TETRAEDRO

Mostramos aqui que podemos inscrever um icosaedro em um tetraedro, ambos regulares. Esta ideia vem do trabalho de Cauchy [1]. Baseamos a exposição a partir de observações de Huybers e Coxeter em [5].

Nesta seção, todos os poliedros são regulares.

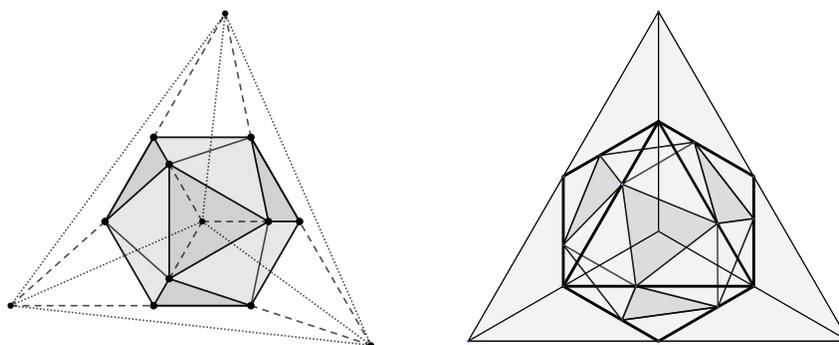


FIGURA 8. Inscrever um icosaedro regular em um tetraedro regular. As linhas pontilhadas representam as arestas do tetraedro e as tracejadas os prolongamentos das arestas das faces escolhidas do icosaedro. Visão a partir de um ponto situado acima de uma face. À direita indicamos a mesma visão, mas contendo as três figuras, icosaedro inscrito no octaedro, que também está inscrito no tetraedro.

Seguimos Cauchy, [1, pp.13–14], com a observação sobre as simetrias em [5, p. 269], na demonstração de que o icosaedro pode ser inscrito no tetraedro (e também no octaedro); acompanhe pela figura 8. O icosaedro possui 10 pares de faces, duas a duas paralelas. Escolhemos um desses pares como bases. Consideremos uma dessas bases. Cada vértice dessa base é comum a dois triângulos não adjacentes. O plano que contém a aresta comum aos dois triângulos e o centro da base é perpendicular à base. Para cada vértice da base fazemos o mesmo, obtendo três planos contendo o centro da base e a reta perpendicular a essa base e contendo seu centro. O prolongamento de cada uma das arestas dos dois triângulos adjacentes contendo apenas um vértice da base encontra-se em um ponto. Esse ponto é um dos vértices do tetraedro. Escolhemos adequadamente um triângulo por vértice (como

indicado na Figura 8) e prolongamos (ciclicamente) suas outras arestas. Esses prolongamentos encontram o plano da base oposta em três pontos, fechando o tetraedro. O mesmo argumento com escolha de outros pares de faces do icosaedro mostram que ele pode ser inscrito em um octaedro (e, neste caso, os vértices do icosaedro estarão nas arestas do octaedro).

Com essas informações, procederemos com a obtenção das medidas exatas desses três poliedros.

A primeira fase consiste em inscrever um octaedro em um tetraedro, o que é bem simples. Basta tomar como vértices do octaedro os pontos médios das arestas do tetraedro. Veja uma representação na Figura 9.

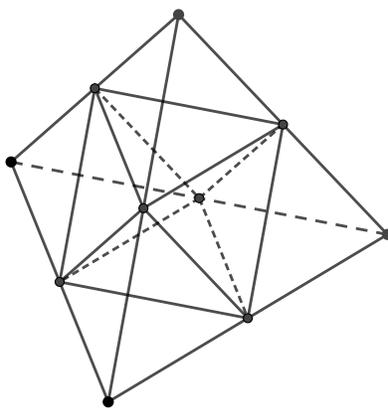


FIGURA 9. Inscrever um octaedro regular em um tetraedro regular. Os pontos médios das arestas do tetraedro são os vértices do octaedro.

Em seguida vamos inscrever um icosaedro no octaedro, usando a informação de que as arestas da face do icosaedro estão alinhadas com os vértices da face do tetraedro que a contém. Acompanhe a argumentação com a figura 10.

Sejam $\triangle ABC$ uma face do tetraedro, $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$ e $F \in \overline{CA}$ os pontos médios, ou seja, $\triangle DEF$ é uma das faces do octaedro inscrito. Queremos localizar os vértices $G \in \overline{DF}$, $H \in \overline{DE}$ e $I \in \overline{EF}$ da face $\triangle GHI$ do icosaedro inscrito. Para que essa face seja um triângulo equilátero, devemos ter as igualdade $DG = IF = EH$ e para determinarmos seus comprimentos precisamos impor as relações

$$\frac{DG}{GF} = \frac{FI}{IE} = \frac{EH}{HD},$$

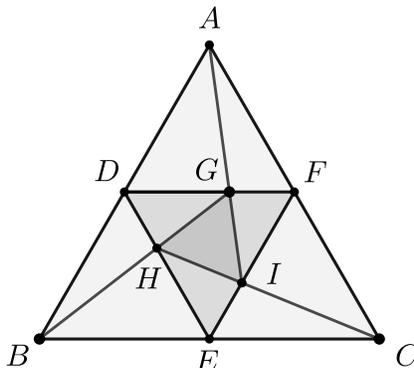


FIGURA 10. Visão de uma das faces do tetraedro, contendo uma das faces do octaedro e do icosaedro inscritos.

e como temos que respeitar os alinhamentos $A - G - I$, $B - H - G$ e $C - I - H$, obteremos o valor dessas razões por um argumento de semelhança de triângulos.

Temos que $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ e, daí, $\overline{FI} \parallel \overline{AD}$. Assim, $\triangle GAD \sim \triangle GIF$. Assim, vale a igualdade

$$\frac{AD}{IF} = \frac{DG}{GF} = \frac{AD}{DG},$$

pois $IF = DG$. Sejam $AD = \ell$, $DG = x$ e $GF = \ell - x$. O valor de x deve resolver a equação $DG^2 = AD \cdot GF$, ou $x^2 - \ell x + \ell^2 = 0$, cuja solução positiva é $x = \phi \ell$, onde

$$\phi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

a razão áurea.

Finalmente, mostremos que duas das faces triangulares assim obtidas inscritas em faces adjacentes do octaedro conectam-se por um triângulo equilátero. Acompanhe o raciocínio pela Figura 11.

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle CBG$ duas faces adjacentes do octaedro, e $\triangle DEF$ e $\triangle FHI$ as faces triangulares inscritas nelas (com $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{CB}$, $H \in \overline{CG}$ e $I \in \overline{BG}$). Mostremos que $\triangle DFH$ também é equilátero.

Primeiramente aplicamos a *Lei dos Cossenos* ao triângulo $\triangle ADE$, sabendo-se que o ângulo \hat{DAE} mede 60 graus (seu cosseno é $1/2$). Para simplificar, assumimos que \overline{AB} mede 1, donde segue que $AE = 1 - \phi = \phi^2$, $AD = \phi$, onde $\phi = (-1 + \sqrt{5})/2$. Assim,

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - AD \cdot AE \cos(60) = \phi^2 + \phi^4 - \phi^3 = \phi^4 + \phi^2(1 - \phi) = 2\phi^4,$$

ou seja, $DE = \phi^2\sqrt{2} = DF = FH$.

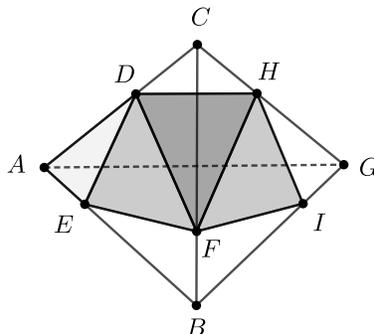


FIGURA 11. Duas faces adjacentes do octaedro contendo duas faces do icosaedro conectadas por uma terceira face.

Para calcularmos DH observamos que $\triangle CDH \sim \triangle CAG$. Como $AG = \sqrt{2}$, $AC = 1$ e $CG = \phi^2$, obtemos que $DH = \phi^2\sqrt{2}$, como queríamos.

6. SÓLIDOS DE ARQUIMEDES

Um sólido de Arquimedes é um poliedro convexo com faces regulares, tais que para cada par de vértices existe uma congruência do poliedro sobre si mesmo, mapeando um vértice no outro, e que não seja nem um prisma e nem um antiprisma.

Não chegou até nós obra de Arquimedes que trata dos 13 poliedros que levam seu nome. Sabemos disso apenas por Pappus, na segunda parte Livro V de suas *Coleções* [8, pp. 351 e seguintes]. Johannes Kepler demonstrou a existência desses 13 sólidos e deu-lhes os nomes atuais, em sua obra *Harmonices Mundi*, [7, Livro II, Prop. XXVIII, pp. 61–65].

A proposição a seguir traz uma limitação sobre a existência destes, devida a Kepler [7, Prop.XVII, p. 51].

Proposição 7. Não é possível obter um poliedro de Arquimedes em que uma das faces tem uma quantidade ímpar de arestas e que tenha arestas comuns a dois tipos de polígonos.

Demonstração. Esta é uma simples questão de contagem, usando a condição da congruência entre cada par de vértices. \square

6.1. Dois tipos de faces. Consideramos as diversas possibilidades e impossibilidades de configuração das faces que contêm um vértice, começando com poliedros que contêm dois tipos de faces.

6.1.1. Faces triangulares e quadradas. Começemos com faces triangulares e quadradas em cada vértice.

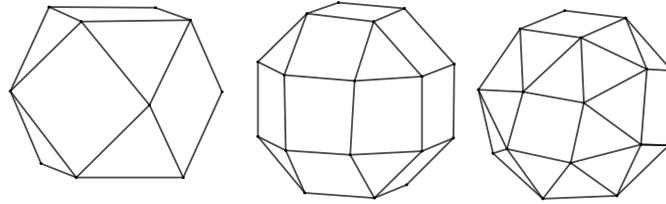


FIGURA 12. *Cuboctaedro* (dois triângulos e dois quadrados por vértice); *rombicuboctaedro* (um triângulo e três quadrados por vértice); *cubo achatado* (um quadrado e quatro triângulos por vértice).

Proposição 8 (Cuboctaedro). Existe um poliedro semirregular com dois quadrados e dois triângulos por vértice. Possui 8 faces triangulares e 6 quadradas. Veja a Figura 12.

Demonstração. A condição de ângulos está satisfeita ($2 \times 60^\circ + 2 \times 90^\circ = 300^\circ < 360^\circ$).

Sua construção a partir de um cubo é simples. Basta usar como vértices os pontos médios das arestas do cubo como vértices do sólido.

A cada um dos 8 vértices do cubo corresponde uma face triangular e a cada uma das 6 faces do cubo, uma face quadrada. \square

Observação 9. Um triângulo e dois quadrados por vértice corresponde a um prisma de base triangular.

Proposição 9 (Rombicuboctaedro). Existe um poliedro semirregular com três quadrados e um triângulo por vértice. Possui 8 faces triangulares e 18 faces quadradas. Veja a Figura 12.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita.

A construção a partir de um cubo é simples. Colocam-se centrados em cada face do cubo quadrados com arestas paralelas às da face e medindo $\ell(-1 + \sqrt{2})$, sendo ℓ a medida da aresta do cubo. Os quadrados centrados em duas faces adjacentes do cubo são ligados por quadrados. (É assim que se calcula a medida da aresta do sólido.)

A cada um dos 8 vértices do cubo corresponde uma face triangular e a cada uma das 6 faces e a cada uma das 12 arestas do cubo, uma face quadrada, totalizando 18 faces quadradas. \square

Proposição 10 (Cubo Achatado). Existe um poliedro semirregular com quatro triângulos e um quadrado por vértice. Possui 6 faces quadradas e 32 faces triangulares. Veja a Figura 12

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($4 \times 60^\circ + 1 \times 90^\circ = 330^\circ < 360^\circ$).

Uma análise análoga àquela feita para o icosaedro inscrito no tetraedro na Seção 5, páginas 13 e seguintes, aplicada a uma face quadrada rodeada de faces triangulares, sugere que certas faces triangulares que tenham apenas um vértice em comum com uma face quadrada estejam contidas em faces do octaedro. As faces quadradas estariam em planos perpendiculares às retas que ligam o centro aos vértices e, portanto, estariam em faces de um cubo (com uma rotação em relação às arestas do cubo). Assim, faremos a construção a seguir a partir do cubo.

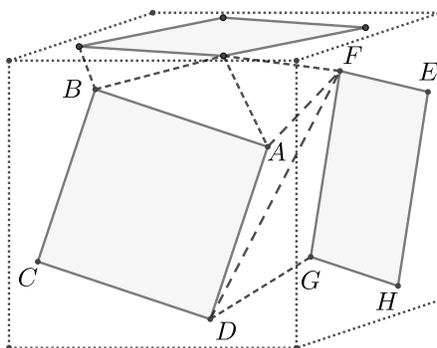


FIGURA 13. Construção do cubo achatado.

Descrevemos a construção a partir de um cubo de lado 2 centrado na origem de um sistema de coordenadas e com faces paralelas aos planos coordenados (consulte também [9]). Colocam-se quadrados centrados em cada face do cubo, com a mesma rotação quando vistos de fora. Na face em que $x = 1$ os vértices são $A = (1, a, b)$, $B = (1, -b, a)$, $C = (1, -a, -b)$ e $D = (1, b, -a)$. Na face $y = 1$ os vértices são $E = (-a, 1, b)$, $F = (b, 1, a)$, $G = (a, 1, -b)$ e $H = (-b, 1, -a)$. As coordenadas a e b calculam-se com a condição de que o triângulo $\triangle ADF$ seja equilátero, ou seja, $AD^2 = AF^2$ e $AD^2 = DF^2$:

$$(a - b)^2 + (b + a)^2 = (1 - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - a)^2 \Rightarrow 2ab + 2a + 2b = 2;$$

$$(a - b)^2 + (b + a)^2 = (1 - b)^2 + (b - 1)^2 + (-2a)^2 \Rightarrow a^2 - 2b = -1.$$

Assim, substituímos $2b = a^2 + 1$ (da segunda equação) na primeira equação e obtemos a equação $a^3 + a^2 + 3a - 1 = 0$, que tem uma única solução entre 0 e 1 (pois se $p(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$, então $p(0) = -1 < 0$ e $p(1) = 4 > 0$, e como $p'(x) = 3x^2 + 2x + 3$ não tem raízes reais, $p'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e, portanto, $p(x)$ define uma função estritamente crescente em \mathbb{R} , etc.).

Essa construção evidencia que para cada uma das 12 arestas do cubo existem dois triângulos equiláteros ligando a face quadrada do cubo achatado

com a face contida na face do cubo adjacente, e para cada um dos 8 vértices do cubo existe um triângulo ligando três faces quadradas do cubo achatado. Assim, o cubo achatado possui $32 = 24 + 8$ faces triangulares e 6 faces quadradas. \square

Observação 10. Para calcular as coordenadas dos vértices de dois dos poliedros de Arquimedes (o cubo achatado, acima, e o dodecaedro achatado, mais adiante), precisam-se resolver equações de terceiro grau. O método de Vieta é fácil de ser aplicado. A equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ transforma-se na equação $t^3 + pt + q = 0$ com a substituição $t = x + a/3$, com $p = b - a^2/3$ e $q = (c - \frac{ab}{3} + 2\frac{a^3}{27})$. A transformação de Vieta faz-se pela substituição $t = w - \frac{p}{3w}$ e resulta na equação $w^6 + qw^3 - p^3/27 = 0$, com soluções $w^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}$.

Exercício 2. Podemos obter o cubo achatado também a partir do octaedro, usando a ideia descrita para o icosaedro na Seção 5, nas páginas 13 e seguintes. Imponha a condição de que cada face triangular inscrita no octaedro tenha suas arestas alinhadas com os vértices da face do octaedro. Calcule as coordenadas dos vértices do cubo achatado.

Observação 11. Um quadrado e três triângulos por vértice corresponde a um antiprisma de base quadrada, e um quadrado e dois triângulos por vértice, à pirâmide de base quadrada. Assim, esgotam-se as possibilidades com triângulos e quadradoa, por causa da condição da soma de ângulos.

6.1.2. *Faces triangulares e pentagonais.* O próximo caso a ser considerado envolve faces triangulares e pentagonais.

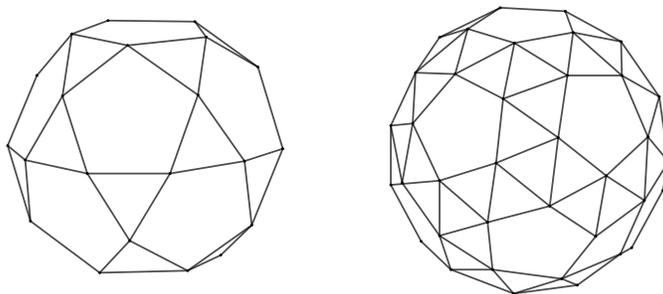


FIGURA 14. *Icosidodecaedro* (dois triângulos e dois pentágonos por vértice); *dodecaedro achatado* (um pentágono e quatro triângulos por vértice).

Proposição 11 (*Icosidodecaedro*). Existe um poliedro semirregular com dois triângulos e dois pentágonos por vértice. Possui 20 faces triangulares e 12 pentagonais. Veja a Figura 14.

Demonstração. A condição da soma de ângulos está satisfeita ($2 \times 60^\circ + 2 \times 108^\circ = 346^\circ < 360^\circ$).

A construção é simples. Basta usar os pontos médios das arestas de um dodecaedro como vértices do sólido.

A cada uma das 12 faces do dodecaedro corresponde uma face pentagonal do sólido e a cada um dos 20 vértices do dodecaedro, uma face triangular. \square

Proposição 12 (Dodecaedro Achatado). Existe um poliedro semirregular com quatro faces triangulares e uma pentagonal por vértice. Possui 80 faces triangulares e 12 pentagonais. Veja a Figura 14.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($4 \times 60^\circ + 108^\circ = 348^\circ < 360^\circ$).

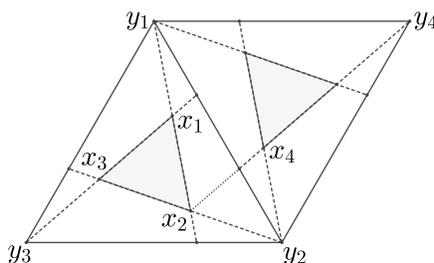


FIGURA 15. Construção do dodecaedro achatado a partir do icosaedro: triângulos rodados, em faces adjacentes do icosaedro.

A construção deste sólido a partir do dodecaedro é bastante complicada. Assim, não imitamos a construção do cubo achatado. Fazemos uma construção a partir do icosaedro, descrita por Huybers e Coxeter [5]. Veja a Seção 5, na página 13 para a descrição da ideia. Colocamos triângulos rotacionados em duas faces triangulares adjacentes e impomos a condição de que certos triângulos resultantes sejam equiláteros.

Acompanhe o raciocínio com a Figura 15. Fixemos um sistema de coordenadas com origem no centro da esfera que circunscreve o icosaedro. Se y_j for um dos vértices do icosaedro, então $\|y_j\|$ será igual ao raio σ da esfera, e se $y_j y_k$ for uma de suas arestas, então o produto escalar $\langle y_j, y_k \rangle$ terá sempre o mesmo valor, igual a $\sigma^2 \cos(2 \arcsen(\ell/2\sigma)) = \sigma^2 \sqrt{5}/5$, onde ℓ é a medida da aresta do icosaedro.

Sejam $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$, $y_1 = (\ell/2)(-1, 0, \tau)$, $y_2 = (\ell/2)(1, 0, \tau)$ e $y_3 = (\ell/2)(0, \tau, 1)$ os vértices de uma das faces do icosaedro, e y_1 , y_2 e $y_4 = (\ell/2)(0, -\tau, 1)$ os vértices de uma face adjacente. Sejam x_1 , x_2 e x_3 os vértices do triângulo equilátero (a ser determinado) contido na face $y_1 y_2 y_3$ e x_4 o vértice do triângulo equilátero contido na face $y_1 y_2 y_4$ mais próximo da aresta

y_1y_2 (veja a Figura 15). Como x_1 , x_2 e x_3 estão no plano que contém y_1 , y_2 e y_3 , temos que (pela simetria das posições) devem existir $a > b > 0$, com $a < 1$, tais que

$$x_1 - y_1 = a(y_2 - y_1) + b(y_3 - y_1) \Rightarrow x_1 = (1 - a - b)y_1 + ay_2 + by_3;$$

$$x_2 - y_2 = a(y_3 - y_2) + b(y_1 - y_2) \Rightarrow x_2 = by_1 + (1 - a - b)y_2 + ay_3;$$

$$x_3 - y_3 = a(y_1 - y_3) + b(y_2 - y_3) \Rightarrow x_3 = ay_1 + by_2 + (1 - a - b)y_3;$$

$$x_4 - y_4 = a(y_1 - y_2) + b(y_4 - y_2) \Rightarrow x_4 = ay_1 + (1 - a - b)y_2 + by_4.$$

Queremos, em particular, que x_2 , x_1 e y_1 estejam alinhados, ou seja, deverá existir $t > 0$, tal que $x_2 - y_1 = t(x_1 - y_1)$. Daí, $a = tb$ e $(1 - a - b) = ta = t^2b$ e, como a soma dos coeficientes $(1 - a - b)$, a e b é 1, devemos ter $b = 1/(1 + t + t^2)$. Assim, $x_1 = b(t^2y_1 + ty_2 + y_3)$, $x_2 = b(y_1 + t^2y_2 + ty_3)$, $x_3 = b(ty_1 + y_2 + t^2y_3)$ e $x_4 = b(ty_1 + t^2y_2 + y_4)$.

Observe que $\|x_1\| = \|x_2\| = \|x_3\| = \|x_4\|$.

A condição de que $\triangle x_1x_2x_4$ seja equilátero expressa-se por $\|x_4 - x_1\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2$ e $\|x_4 - x_2\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2$, que devido às igualdades acima, reduzem-se a $\langle x_1, x_4 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$. Para simplificar as contas, assumimos que $\ell = 4$ e, assim, $\|y_j\|^2 = 10 + 2\sqrt{5}$ e $\langle y_i, y_j \rangle = 2 + 2\sqrt{5}$, se $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, 3$, e $\langle y_3, y_4 \rangle = -2 - 2\sqrt{5}$:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = b^2(t^3 + t^2 + t)(10 + 2\sqrt{5}) + b^2(t^4 + t^3 + t^2 + 2t + 1)(2 + 2\sqrt{5}),$$

$$\langle x_1, x_4 \rangle = b^2(2t^3)(10 + 2\sqrt{5}) + b^2(t^4 + 3t^2 + 2t - 1)(2 + 2\sqrt{5}).$$

Igualando os dois produtos escalares acima obtemos a equação

$$t^3 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4}t^2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{4}t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 0,$$

ou $t^3 - [(\tau - 1)^2/2]t^2 - [(1 + \tau^2)/2]t - \tau = 0$, que tem uma única solução real positiva. \square

Observação 12. Um pentágono e três triângulos por vértice corresponde a um antiprisma pentagonal e um pentágono e dois triângulos, uma pirâmide pentagonal. A condição da soma de ângulos exclui qualquer outra possibilidade.

6.1.3. Faces triangulares e hexagonais.

Observação 13. Uma face hexagonal e três triangulares por vértice corresponde a um antiprisma hexagonal. Uma face hexagonal e duas triangulares não formam um sólido, pois o ângulo interno do hexágono é igual à soma dos dois ângulos internos dos triângulos.

Proposição 13 (Tetraedro Truncado). Existe um sólido semirregular com uma face triangular e duas hexagonais por vértice. Possui 4 faces triangulares e 4 hexagonais. Veja a Figura 16.

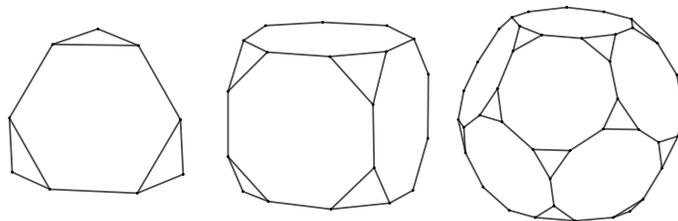


FIGURA 16. *Tetraedro truncado* (um triângulo e dois hexágonos por vértice); *cubo truncado* (um triângulo e dois octógonos por vértice); *dodecaedro truncado* (um triângulo e dois decágonos por vértice).

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($60^\circ + 2 \times 120^\circ = 300^\circ < 360^\circ$).

Sua construção a partir de um tetraedro é simples. Basta dividir cada aresta do tetraedro em 3 partes iguais e usar os pontos internos às arestas assim obtidos como vértices do sólido.

A cada uma das 4 faces do tetraedro corresponde uma face hexagonal do sólido, e a cada um dos 4 vértices, uma triangular. \square

6.1.4. *Faces triangulares e octogonais.*

Observação 14. Com faces heptagonal e triangulares por vértice existe apenas a possibilidade do antiprisma heptagonal, com três triângulos e um heptágono por vértice. Dois heptágonos e um triângulo por vértice não é consistente, pois o heptágono tem um número ímpar de arestas e estaria adjacente a triângulos e heptágonos, incompatível, pela Proposição 7.

Observação 15. Com um octógono e triângulos por vértice existe apenas a possibilidade do antiprisma octogonal.

Proposição 14 (Cubo Truncado). Existe um poliedro semirregular com um triângulo e dois octógonos por vértice. Possui 8 faces triangulares e 6 octogonais. Veja a Figura 16.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($60^\circ + 2 \times 135^\circ = 330^\circ < 360^\circ$).

Sua construção a partir de um cubo é simples. Basta colocar um octaedro em cada face do cubo, com todos os seus vértices nas arestas do cubo.

A cada vértice do cubo corresponde uma face triangular do sólido e a cada face do cubo, uma octogonal. \square

6.1.5. *Faces Triangulares e Decagonais.*

Observação 16. Com eneágono e triângulos por vértice só existe a possibilidade de um antiprisma. Qualquer outra é incompatível com a soma de ângulos, ou com a Proposição 7.

Proposição 15 (Dodecaedro Truncado). Existe um poliedro semirregular com um triângulo e dois decágonos por vértice. Possui 20 faces triangulares e 12 decagonais. Veja a Figura 16.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($60^\circ + 2 \times 144^\circ = 348^\circ < 360^\circ$).

Sua construção parte da inscrição de um decágono regular em cada face, contendo todos os seus vértices e cinco de suas arestas nas arestas de cada face do dodecaedro.

A cada um dos 20 vértices do dodecaedro corresponde uma face triangular e a cada uma das 12 faces do mesmo, uma face decagonal. \square

Observação 17. A condição de soma de ângulos só permite a existência de antiprismas, se forem usados polígonos regulares de mais de 10 lados. Com isto terminam as possibilidades de sólidos com faces triangulares e com outro polígono regular.

6.1.6. Faces Quadradas e Hexagonais.

Observação 18. A única possibilidade de poliedro (com a condição de congruência entre pares de vértices) com faces quadradas e pentagonais é a do prisma de base pentagonal, pela condição da soma de ângulos e pela Proposição 7.

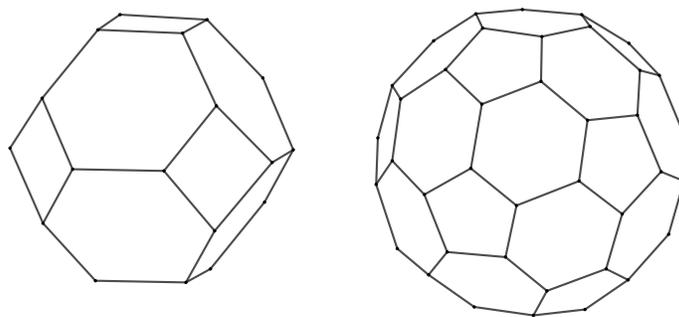


FIGURA 17. *Octaedro truncado* (um quadrado e dois hexágonos por vértice); *dodecaedro truncado* (um pentágono e dois hexágonos por vértice).

Observação 19. A condição de soma de ângulos somente permite prismas usando faces quadradas e pentagonais.

Proposição 16 (Octaedro Truncado). Existe um poliedro semirregular com um quadrado e dois hexágonos por vértice. Possui 6 faces quadradas e 8 hexagonais. Veja a Figura 17.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($90^\circ + 2 \times 120^\circ = 330^\circ < 360^\circ$).

Sua construção é simples. Basta dividir em três partes iguais cada aresta do octaedro regular e usar os pontos interiores às arestas daquele como os vértices do sólido em questão.

A cada um dos 6 vértices do octaedro corresponde uma face quadrada e a cada uma das 8 faces do mesmo, uma face hexagonal. \square

Observação 20. A condição da soma de ângulos permite construir apenas prismas usando quadrados e outro polígono de mais de seis lados.

6.1.7. Faces Pentagonais e Hexagonais.

Proposição 17 (Icosaedro Truncado). Existe um poliedro semirregular com um pentágono e dois hexágonos por vértice. Possui 12 faces pentagonais e 20 hexagonais. Veja a Figura 17.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($108^\circ + 2 \times 120^\circ = 348^\circ < 360^\circ$).

Sua construção é simples. Basta dividir em três partes iguais cada aresta do icosaedro regular e usar os pontos interiores às arestas daquele como os vértices do sólido em questão.

A cada um dos 12 vértices do icosaedro corresponde uma face pentagonal e a cada uma das 20 faces do mesmo, uma face hexagonal. \square

Observação 21. Acabaram-se as possibilidades de dois tipos de polígonos por vértice, pela condição da soma dos ângulos e pela Proposição 7.

6.2. Três tipos de faces. Consideremos agora os poliedros arquimedianos que têm três tipos de polígonos como faces.

6.2.1. Faces Triangulares, Quadradas e Pentagonais.

Proposição 18 (Rombicosidodecaedro). Existe um poliedro semirregular com um triângulo, dois quadrados e um pentágono por vértice. Possui 20 faces triangulares, 30 quadradas e 12 pentagonais. Veja a Figura 17.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($60^\circ + 2 \times 90^\circ + 108^\circ = 348^\circ < 360^\circ$).

Para construir o sólido, inscrever um pentágono em cada face de um dodecaedro regular, com as arestas paralelas às deste e de modo que ligam-se às arestas paralelas contidas em faces adjacentes do dodecaedro formem um quadrado.

A cada uma das 12 faces do dodecaedro corresponde uma face pentagonal do sólido, e a cada um dos 20 vértices, uma face hexagonal. \square

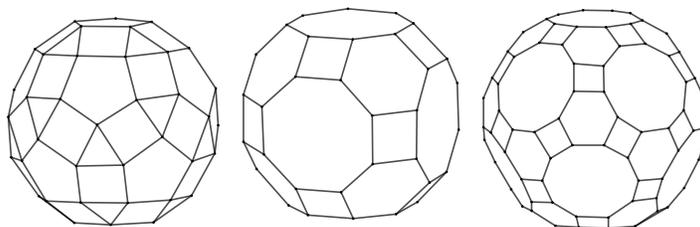


FIGURA 18. *Rombicosidodecaedro* (um triângulo, dois quadrados e um pentágono por vértice); *cuboctedro truncado* (um quadrado, um hexágono e um octógono por vértice); *icosidodecaedro truncado* (um quadrado, um hexágono e um decágono por vértice).

Observação 22. A Proposição 7 e a condição da soma de ângulos vedam qualquer outra combinação de faces quadradas, pentagonais e hexagonais.

6.2.2. Faces Quadradas, Hexagonais e octogonais.

Proposição 19 (Cuboctaedro Truncado). Existe um poliedro semirregular com um quadrado, um hexágono e um octógono por vértice. Possui 12 faces quadradas, 8 hexagonais e 6 octogonais. Veja a Figura 18.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($90^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 345^\circ < 360^\circ$).

Para sua construção, colocar em cada face quadrada do cuboctaedro um octaedro regular, com quatro de suas faces paralelas às do quadrado, de modo que os octógonos sobre lados quadrados adjacentes liguem-se por quadrados. As faces hexagonais aparecerão naturalmente. \square

6.2.3. Faces Quadradas, Hexagonais e Decagonais.

Proposição 20 (Icosidodecaedro Truncado). Existe um poliedro semirregular com um quadrado, um hexágono e um decágono por vértice. Possui 30 faces quadradas, 20 hexagonais e 12 decagonais. Veja a Figura 18.

Demonstração. A condição de soma de ângulos está satisfeita ($90^\circ + 120^\circ + 144^\circ = 354^\circ < 360^\circ$).

Para sua construção, colocar um decágono regular em cada face pentagonal do icosidodecaedro de modo que seja ligado ao dodecaedro de cada face pentagonal adjacente por um quadrado. As faces hexagonais aparecerão naturalmente. \square

Observação 23. A condição da soma de ângulos veda a existência de qualquer outra combinação de faces.

6.2.4. *Quiralidade dos Sólidos Achatados.* O cubo achatado e o dodecaedro achatado envolvem uma rotação das faces quadradas e pentagonais, respectivamente. Esta rotação pode ser tanto no sentido horário quanto no anti-horário. Isto permite formar dois pares de sólidos achatados que são congruentes, mas não diretamente congruentes entre si.

Quiralidade (derivado do grego antigo, $\chi\epsilon\acute{\iota}\rho$, *quir*, mão) é a orientação do sólido em relação à rotação aplicada àquelas faces (anti-horário, *regra da mão direita*; horário, *regra da mão esquerda*). Tanto o cubo achatado quanto o dodecaedro achatado admitem duas orientações, que são *enantiomórficas* (formas opostas, uma é a imagem especular da outra, mas não são diretamente congruentes).

Na construção do cubo achatado a partir do cubo, podemos colocar os quadrados em cada face rotacionados nos dois sentidos, horário ou anti-horário, como indicado na Figura 19.

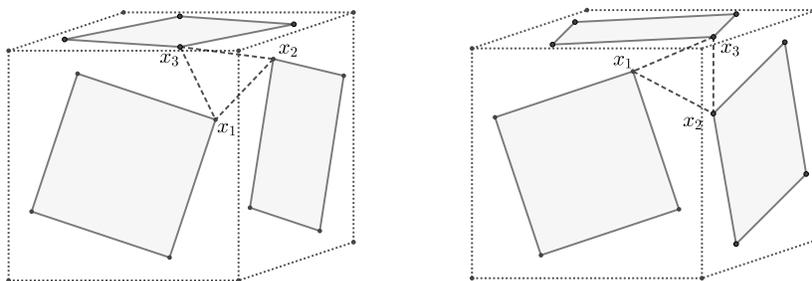


FIGURA 19. Duas formas enantiomórficas do cubo achatado.

Na construção do dodecaedro achatado, podemos rotacionar os triângulos nas faces do icosaedro de duas maneiras, como indicadas na Figura 20.

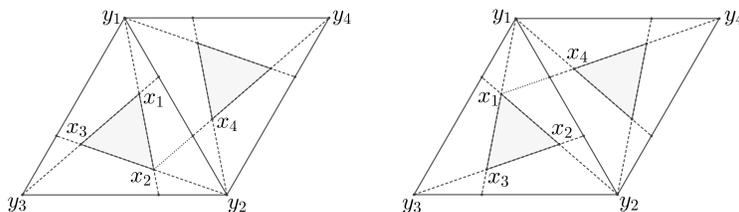


FIGURA 20. Duas formas enantiomórficas do dodecaedro achatado.

Esta dualidade de orientações aparece na estrutura de moléculas mais complexas, estudadas em química orgânica.

7. EXERCÍCIOS

Exercício 3. Sabendo-se que o volume de uma pirâmide é $V = A_b h/3$, onde A_b é a área da base e h é sua altura, calcule o volume de uma pirâmide cuja base seja um pentágono regular com aresta medindo a e suas faces laterais sejam triângulos isósceles com lados iguais a b e base a .

Exercício 4. Calcule o volume de um antiprisma de faces regulares, com arestas medindo ℓ . [Sugestão: seja O o centro da esfera que o circunscreve; se $\triangle ABC$ for uma das faces laterais, calcule o volume do tetraedro (pirâmide de base triangular) $OABC$; mostre que se M for o centróide (encontro das medianas) do triângulo $\triangle ABC$, mostre que \overline{OM} é perpendicular ao triângulo e, portanto, sua media será a altura da pirâmide. Faça isto com as faces triangulares do antiprisma. O antiprisma será decomposto como a união de dez tetraedros e duas pirâmides de vértice O e bases pentagonais.]

Exercício 5. Calcule o raio da esfera inscrita em cada sólido platônico em função da medida da aresta ℓ .

Exercício 6. Calcule as áreas das faces e os volumes dos cinco sólidos platônicos em função da medida ℓ de suas arestas.

Exercício 7. Calcule o raio da esfera inscrita em cada sólido de Arquimedes em função da medida ℓ das arestas. [Sugestão: observe que cada sólido arquimediano foi construído direta ou indiretamente a partir de um sólido platônico.]

Exercício 8. Calcule as áreas das faces e os volumes dos treze sólidos arquimedianos em função da medida ℓ de suas arestas.

Exercício 9. Calcule os cossenos dos ângulos diedrais entre cada par de faces adjacentes dos sólidos platônicos e arquimedianos.

Exercício 10 (Dualidade entre os Sólidos Platônicos). Mostre que os circuncentros das faces de um tetraedro regular são os vértices de outro tetraedro regular; que os do cubo são de um octaedro regular; que os do octaedro regular são de um cubo; que os de um dodecaedro regular são os de um icosaedro regular; que os de um icosaedro regular são os de um dodecaedro regular. [Observe a quantidade de vértices e de faces em cada caso.]

REFERÊNCIAS

- [1] Augustin-Louis Cauchy. Recherches sur les polyèdres : premier mémoire. *Journal de l'École polytechnique*, XVIe cahier, t. IX, p. 68; 1813. Œuvres Complètes Série 2 Tome 1, Paris, Gauthier-Villars (1905), p.7–25. Disponível em <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f13>
- [2] B. Grünbaum, N. W. Johnson. The Faces of a Regular-faced Polyhedron. *Journal London Math. Soc.*, 40 (1965), 477–486.
- [3] Euclides, *Os Elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Editora UNESP, São Paulo, 2009.

- [4] Kathrin Hofacker. *Konvexe Polyeder und ihre Behandlung im Unterricht* (Poliedros convexos e seu uso na sala de aula). Lehrstuhl für Geometrie und Visualisierung der Technischen Universität München Orientador: Prof. Dr. Gerd Fischer, Garching, 21 de março 2007. Disponível (e acessado em março de 2018) em <https://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehrstuhl/GerdFischer/KonvexePolyeder.pdf>
- [5] Pieter Huybers, Harold Scott Macdonald Coxeter. A new approach to the chiral Archimedean solids. *C. R. Math. Reports Acad. Sci. Canada*, Volume 1 (1979), 259–274.
- [6] Norman W. Johnson. Convex polyhedra with Regular Faces. *Canadian Journal of Mathematics*, Volume 18 (1966), 169–200.
- [7] Johannes Kepler. *Harmonices Mundi, Libri V*. Impresso às expensas de Gottfried Tampach, livreiro de Frankfurt, por Johannes Planck, Linz, Alemanha, 1616. Disponível (e acessado em março de 2018) em <https://archive.org>.
- [8] Pappus de Alexandria. *Collectionis*. Texto grego com tradução latina de Friedrich Hultsch, Volume I, contendo os Livros II, III, IV e V. Berolini: *apud* Weidmannos, Berlim, Alemanha, 1876. Disponível (e acessado em março de 2018) em <https://archive.org>.
- [9] Bernulf Weissbach, Horst Martini. On the Chiral Archimedean Solids *Beiträge zur Algebra und Geometrie. Contributions to Algebra and Geometry*, Volume 43 (2002), No. 1, 121–133.
- [10] Weisstein, Eric W. “Antiprism.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Antiprism.html>
- [11] Viktor A. Zalgaller. *Convex Polyhedra with Regular faces*. Seminars in Mathematics, Volume 2, Springer, New York, EUA, 1969.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RUA DO MATÃO, 1010, CIDADE UNIVERSITÁRIA, CEP 05508-090, SÃO PAULO, SP, BRAZIL
E-mail address: bianconi@ime.usp.br