

CILINDROS, CONES E ESFERAS

RICARDO BIANCONI

RESUMO. Apresentamos propriedades básicas de cilindros, cones e esferas. Calculamos a área de uma superfície esférica (seguindo Arquimedes) e de um triângulo esférico (Teorema de Girard), e aplicamos à teoria dos poliedros convexos (fórmula de Euler e Teorema de Descartes).

SUMÁRIO

1. Introdução: Circunferências	1
1.1. Perímetro de uma Circunferência	3
1.2. Área de um Círculo	4
2. Cones e Cilindros	4
3. Esferas	6
3.1. A Área de uma Superfície Esférica	7
3.2. Volume da Esfera	9
3.3. Ângulos Sólidos, Polígonos e o Teorema de Jordan	11
3.4. Triângulos e Polígonos Esféricos	13
3.5. Triângulo Polar	14
3.6. O Teorema de Girard	15
4. Aplicação aos Poliedros Convexos	16
4.1. O Teorema de Euler	16
4.2. O Teorema de Descartes	17
5. Exercícios	17
Referências	18

1. INTRODUÇÃO: CIRCUNFERÊNCIAS

Estudamos neste texto propriedades métricas de cones cilindros e esferas. Como isto depende de propriedades métricas de círculos e circunferências, apresentamo-las nesta introdução.

Para fixarmos a nomenclatura, definimos uma *circunferência* de centro C e raio $\rho > 0$ em um plano β como o conjunto $\{P \in \beta : CP = \rho\}$ e o *círculo* de centro C e raio ρ no plano β como o conjunto $\{P \in \beta : CP \leq \rho\}$.

Calculamos perímetros e áreas pelo método da exaustão, ou limites. Para isto precisamos de algumas estimativas, tiradas da obra *Da esfera e do Cilindro I* de Arquimedes, [1]. Começemos com uma simples observação.

Observação 1. Seja $B_1 \dots B_{km}$ ($m \geq 3$, $k \geq 2$) um polígono regular inscrito (respectivamente, circunscrito) em uma circunferência. O perímetro do polígono $B_1 B_{m+1} \dots B_{(k-1)m+1}$ tem perímetro menor (respectivamente, maior) que o daquele. Isto é uma consequência imediata da desigualdade triangular (a soma de dois lados de um triângulo é maior que o terceiro lado).

Proposição 1. Sejam $A_1 \dots A_n$ e $B_1 \dots B_m$ dois polígonos convexos regulares, sendo que o primeiro está inscrito em uma circunferência e o outro está circunscrito à mesma circunferência. Então o perímetro do primeiro é menor que o do segundo.

Demonstração. Vamos considerar primeiramente o caso em que $m = n$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que os vértices do polígono inscrito são os pontos médios das arestas do polígono circunscrito (estes pontos serão os pontos em que as arestas do circunscrito tangenciam a circunferência). Aqui, a desigualdade triangular implica o resultado.

Pela observação acima, o polígono regular inscrito de mn lados tem perímetro maior que o de $B_1 \dots B_m$ e o polígono regular circunscrito de mn lados tem perímetro menor que o de $A_1 \dots A_n$. Comparamos todos estes e concluímos o resultado, no caso geral. \square

O resultado a seguir é útil nas aproximações de comprimento da circunferência e área do círculo.

Proposição 2 (Arquimedes, [1, Prop. 3, pp. 405-406]). Dados o número real $\lambda > 1$ e uma circunferência, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_0$, a razão do lado do polígono regular circunscrito de 2^n arestas sobre o do inscrito com mesmo número de arestas é menor que λ .

Demonstração. Acompanhe a demonstração com a Figura 1.

Construir um triângulo retângulo com um cateto \overline{PQ} medindo 1 e hipotenusa \overline{PR} medindo λ . Transportar o ângulo $\angle RPQ$ entre este cateto e a hipotenusa para a circunferência (con vértice no centro O da mesma). Subdividir a circunferência em 4, 8, 16, \dots , 2^n partes iguais, até que o ângulo entre dois vértices adjacentes seja menor que o dobro do ângulo $\angle RPQ$. Sejam \overline{AB} e \overline{CD} arestas do polígono inscrito e circunscrito, respectivamente, e $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{CD}$ os respectivos pontos médios. Os triângulos retângulos $\triangle OAM$ e $\triangle OCN$ são semelhantes. O ângulo $\angle AOM = \angle CON$ é menor que o ângulo $\angle RPQ$. Daí, $CD/AB = CN/AM = ON/OM = OA/OM < PR/PQ = \lambda$, como queríamos. \square

Observação 2. Uma consequência imediata deste resultado é que a razão do perímetro do polígono circunscrito sobre o inscrito é menor que λ .

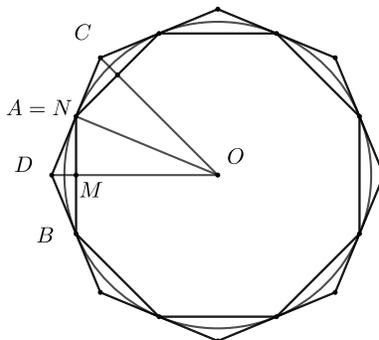


FIGURA 1. Aproximando a circunferência por polígonos inscritos e circunscritos.

1.1. **Perímetro de uma Circunferência.** Mostramos agora que os perímetros dos polígonos regulares de 2^n arestas inscritos e circunscritos a uma circunferência convergem para um mesmo valor, quando n cresce indefinidamente. Parafraseamos a Proposição 6 da obra de Arquimedes citada acima, [1, Prop. 6, pp. 407-408].

Proposição 3. Dados um número real $\varepsilon > 0$ e uma circunferência, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_0$, o perímetro do polígono regular de 2^n arestas menos o do inscrito de mesmo número de arestas é menor que ε .

Demonstração. Seja ρ o raio da circunferência dada. O perímetro do quadrado circunscrito é $4 \times 2\rho = 8\rho$. Os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos de 2^n arestas ($n \geq 2$) são menores ou iguais que a deste quadrado. Sejam \mathfrak{P}_n e \mathfrak{p}_n os perímetros dos polígonos circunscritos e inscritos na circunferência dada, respectivamente.

Sejam $\lambda = 1 + \varepsilon/8\rho$ e n_0 , tais que se $n \geq n_0$, $\mathfrak{P}_n/\mathfrak{p}_n < \lambda$. Daí, $\mathfrak{P}_n < \lambda\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_n + \varepsilon\mathfrak{p}_n/8\rho < \mathfrak{p}_n + \varepsilon$, ou seja, $\mathfrak{P}_n - \mathfrak{p}_n < \varepsilon$. \square

Com isto, podemos definir o *perímetro da circunferência* de raio ρ como o limite dos perímetros dos polígonos regulares inscritos ou circunscritos, com o número de lados tendendo ao infinito. Por semelhança de polígonos, sabemos que este perímetro é um múltiplo do diâmetro da circunferência. A constante multiplicativa é nomeada pela letra grega π . Arquimedes fez a estimativa

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

na Proposição 3 de sua obra *Da Medida do Círculo*, [1, Prop. 3, p. 448-451]. O erro de aproximação é menor que $223/71 - 22/7 < 0,0020121$. Uma outra

aproximação aparentemente conhecida na época é

$$0 < \frac{355}{113} - \pi < 3 \times 10^{-7}.$$

1.2. Área de um Círculo. Apresentamos a aproximação da área de um círculo segundo Arquimedes, [1, *Da Esfera e do Cilindro I*, Prop. 6, pp. 407-408].

Começemos com a observação de que a razão entre as áreas de dois polígonos regulares com mesma quantidade de arestas é igual à razão entre os quadrados de seus lados.

De fato, se o polígono tem n arestas, circunscreva-o em uma circunferência. Sua área pode ser calculada como a soma das áreas dos triângulos com um vértice no centro da circunferência e base uma aresta do polígono (a altura do triângulo é o raio ρ da circunferência). O lado do polígono mede $\ell = 2\rho \sin(\pi/n)$, donde retiramos $\rho = \ell/2 \sin(\pi/n)$. A área do polígono será, então, $A = n\ell\rho/2 = n\ell^2/4 \sin^2(\pi/n)$. Assim, se as medidas dos lados de dois polígonos regulares de n arestas forem ℓ_1 e ℓ_2 , então a razão da área do primeiro sobre a do segundo será ℓ_1^2/ℓ_2^2 .

Proposição 4. Dados um número real $\varepsilon > 0$ e uma circunferência de raio ρ , existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_0$, a área do polígono regular de 2^n arestas circunscrito à circunferência menos a dos inscrito de mesmo número de arestas é menor que ε .

Demonstração. Começamos observando que as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos à circunferência não são maiores do que a do quadrado circunscrito, que é $4\rho^2$.

Sejam $\lambda = \sqrt{1 + \varepsilon/4\rho^2}$ e n_0 , tais que se $n \geq n_0$, $L_n/\ell_n < \lambda$, onde L_n e ℓ_n são os lados dos polígonos regulares de 2^n arestas circunscritos e inscritos, respectivamente. Se as respectivas áreas forem \mathfrak{A}_n e \mathfrak{a}_n , então $\mathfrak{A}_n/\mathfrak{a}_n = L_n^2/\ell_n^2 < \lambda^2 = 1 + \varepsilon/4\rho^2$. assim,

$$\mathfrak{A}_n = \lambda^2 \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_n + \varepsilon \frac{\mathfrak{a}_n}{4\rho^2} < \mathfrak{a}_n + \varepsilon,$$

ou seja, $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{a}_n < \varepsilon$. □

Assim, a área do círculo de raio ρ é o limite das áreas dos polígonos inscritos, quando a quantidade de arestas tende ao infinito. No limite, esta área será igual à metade do perímetro da circunferência vezes o raio, ou seja $A = \pi\rho^2$.

2. CONES E CILINDROS

Estudamos aqui propriedades métricas de cones e cilindros. São úteis para o estudo da esfera, mais adiante.

Definição 1. Dados um plano β , um ponto $V \notin \beta$ e uma circunferência $\mathcal{S} \subset \beta$, o conjunto dos pontos contidos nas retas \overleftrightarrow{VP} , $P \in \mathcal{S}$, é chamado de

superfície cônica de vértice V e seção \mathcal{S} . As retas \overleftrightarrow{VP} , $P \in \mathcal{S}$, são chamadas de *geratrizes* da superfície cônica e a reta \overleftrightarrow{VC} , C o centro de \mathcal{S} , é o *eixo* da superfície cônica. Se o eixo for perpendicular ao plano β , então a superfície chama-se *superfície cônica circular reta*.

Nesta seção estudamos apenas os cones circulares retos. No estudo das seções cônicas encontramos cones não retos (obliquos).

Definição 2. O conjunto dos pontos contidos nos segmentos retas \overline{VP} , $P \in \mathcal{S} \cup \text{int } \mathcal{S}$, é chamado de *cone* (de vértice V e base o círculo $\mathcal{S} \cup \text{int } \mathcal{S}$).

O conjunto dos pontos de um cone entre o plano da base e outro plano paralelo ao da base, não contendo o vértice, mas intersectando o cone, chama-se de um *tronco do cone*.

No caso do tronco do cone, se β_1 for o plano da base e β_2 for o outro plano que o define, a interseção do cone com β_2 também é chamada de base do tronco de cone.

Daqui em diante, assumimos que os cones considerados são circulares retos.

Proposição 5. O volume de um cone é $Ah/3$, onde A é a área do círculo da base e h é a altura (distância do vértice ao plano da base). A área da superfícies lateral de um cone (sem contar a base) é $a\pi\rho$, onde ρ é o raio do círculo da base e a é a *apótema* do cone (a distância do vértice a qualquer ponto da circunferência da base).

Demonstração. Inscrevemos uma pirâmide de vértice V e como base um polígono regular inscrito na circunferência da base e fazemos a quantidade de lados deste polígono crescer indefinidamente. Os limites do volume e da área lateral da pirâmide fornece as fórmulas supracitadas. \square

Disso deduzimos as fórmulas para o volume e área lateral de um tronco de cone.

Proposição 6. O Volume de um tronco de cone de altura h , raios das bases ρ_1 e ρ_2 , é $\text{Vol} = h(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2)/3$.

Demonstração. Completamos o cone para obtermos a fórmula desejada. Para especificarmos, suporemos que $\rho_1 > \rho_2$.

Se x for a altura do cone de base com raio ρ_2 e $(x + h)$ a altura do cone de base com raio ρ_1 . Assim, $(x + h)/\rho_1 = x/\rho_2$, donde segue que $x = h\rho_2/(\rho_1 - \rho_2)$ e $(x + h) = h\rho_1/(\rho_1 - \rho_2)$. Daí, o volume do tronco do cone é a diferença entre os volumes dos dois cones, ou seja

$$\text{Vol} = \frac{h\pi}{3} \left(\rho_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} - \rho_2^2 \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \right) = \frac{h\pi}{3} (\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2),$$

pois $(\rho_1^3 - \rho_2^3) = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)$. \square

Para a proposição seguinte precisamos definir o que é o lado de um tronco de cone.

Definição 3. O *lado* de um tronco de cone é o comprimento de um segmento contido na face lateral do tronco de cone e em um plano que contenha os centros dos círculos das duas bases (este plano é perpendicular a ambas as bases).

Proposição 7. A área lateral de um tronco de cone de lado a , raios das bases ρ_1 e ρ_2 é $A = a\pi(\rho_1 + \rho_2)$.

Demonstração. Completamos o cone como acima. Assumimos novamente que $\rho_1 > \rho_2$.

Seja y o lado do cone de base com raio ρ_2 e $y+a$ o de cuja base tem raio ρ_1 . Daí, $y/\rho_2 = (y+a)/\rho_1$, ou seja, $y = a\rho_2/(\rho_1 - \rho_2)$ e $(y+a) = a\rho_1/(\rho_1 - \rho_2)$.

A área lateral do tronco de cone será a diferença entre a área lateral do cone maior e a do menor.

$$A = a\pi \left(\rho_1 \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} - \rho_2 \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \right) = a\pi(\rho_1 + \rho_2) = 2a\pi \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

□

Consideramos agora cilindros.

Definição 4. Dados um plano β , um ponto $V \notin \beta$ e uma circunferência $\mathcal{S} \subset \beta$ de centro C , o conjunto dos pontos contidos nas retas $r \parallel \overleftrightarrow{VC}$, $r \ni P \in \mathcal{S}$, é chamado de *superfície cilíndrica* de seção \mathcal{S} e eixo \overleftrightarrow{VC} . O *cilindro* de seção \mathcal{S} e eixo \overleftrightarrow{VC} é o conjunto dos pontos contidos nas retas $r \parallel \overleftrightarrow{VC}$, $r \ni P \in \mathcal{S} \cap \text{int } \mathcal{S}$. Se o eixo for perpendicular ao plano β , então o conjunto chamar-se-á *cilindro circular reto*. O *interior* de um cilindro é o conjunto dos pontos do cilindro que não estão na sua superfície cilíndrica. Um *tronco de cilindro* é a parte de um cilindro entre dois planos paralelos. Se não houver menção em contrário, tais planos serão perpendiculares ao eixo do cilindro (circular reto). Os círculos determinados pela interseção do cilindro com os planos são as *bases* do tronco de cilindro.

Proposição 8. O volume de um tronco de cilindro circular reto é $\text{Vol} = h\pi\rho^2$, onde ρ é o raio dos círculos das bases e h é sua altura. A área lateral de um tronco de cilindro circular reto (sem as bases) é $A = 2h\pi\rho$.

Demonstração. Inscrevemos em uma base polígonos regulares de 2^n arestas e sobre ele construímos um prisma reto entre as duas bases do tronco de cilindro. Fazendo o número de arestas tender ao infinito, obtemos os resultados. □

3. ESFERAS

Definição 5. Dado um ponto C e um número real $\rho > 0$, a *esfera* de centro C e raio ρ é o conjunto dos pontos $\mathbb{B} = \mathbb{B}(C, \rho) = \{P : CP \leq \rho\}$. A *superfície esférica* de centro C e raio ρ é o conjunto $\mathbb{S} = \mathbb{S}(C, \rho) = \{P : CP = \rho\}$. O conjunto $\text{int } \mathbb{B} = \{P : CP < \rho\}$ é o *interior da esfera* e o conjunto $\{P : CP > \rho\}$ é o *exterior da esfera*. Para cada $P \in \mathbb{S}$, o segmento \overline{CP} será

chamado de *raio* da esfera e se $P, Q \in \mathbb{S}$ forem tais que $P - C - Q$, então o segmento \overline{PQ} será chamado de *diâmetro* da esfera.

Definição 6. Um plano β será *tangente à esfera* \mathbb{B} (ou à superfície esférica \mathbb{S}), se $\beta \cap \mathbb{B}$ contiver um único ponto $P \in \mathbb{S}$, chamado de *ponto de tangência*. Se esta interseção contiver mais de um ponto, então o plano será *secante* à esfera.

Proposição 9. O plano β será tangente à superfície esférica \mathbb{S} (da esfera \mathbb{B}) no ponto P se, e somente se, $\overline{CP} \perp \beta$, onde C é o centro de \mathbb{S} .

Demonstração. Suponhamos que $\overline{CP} \perp \beta$. Seja $Q \in \beta, Q \neq P$. O triângulo $\triangle CPQ$ é um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é \overline{CQ} . Ela é maior que o cateto \overline{CP} , que mede ρ , o raio de \mathbb{S} e, portanto, Q pertence ao exterior da esfera. Daí, β será tangente a \mathbb{S} no ponto P .

Suponhamos agora que $P \in \mathbb{S} \cap \beta$, mas $\overline{CP} \not\perp \beta$. Seja $Q \in \beta$, tal que $\overline{CQ} \perp \beta$. Então o triângulo $\triangle CPQ$ será retângulo com hipotenusa \overline{CP} , um raio da esfera, que será maior que o cateto \overline{CQ} . Portanto Q estará no interior da esfera e, portanto $\beta \cap \mathbb{B}$ conterá mais de um ponto e, assim, o plano β não poderá ser tangente à esfera. \square

Proposição 10. Seja β um plano secante à esfera \mathbb{B} (ou superfície esférica \mathbb{S}). Então $\beta \cap \mathbb{S}$ será uma circunferência.

Demonstração. Seja $P \in \beta \cap \mathbb{S}$.

Se o centro C de \mathbb{S} estiver em β , então a circunferência $\{Q \in \beta : CQ = CP\}$ estará contida em $\beta \cap \mathbb{S}$. Por outro lado, se $Q \in \beta \cap \mathbb{S}$, então $CQ = CP$ e, portanto, Q estará naquela circunferência.

Se o centro C de \mathbb{S} não estiver em β , seja $O \in \beta$ o pé da perpendicular $\overline{CO} \perp \beta$. Para cada $P \in \beta \cap \mathbb{S}$, o triângulo $\triangle COP$ será retângulo com hipotenusa \overline{CP} medindo ρ , o raio da esfera, o que implica que o cateto \overline{OP} terá sempre a mesma medida, independentemente da escolha do ponto P . Portanto, o conjunto $\beta \cap \mathbb{S}$ estará contido na circunferência de centro O e raio OP no plano β . Seja agora Q um ponto pertencente à circunferência de centro O e raio OP no plano β . O triângulo $\triangle COQ$ tem catetos \overline{CO} e \overline{OQ} , sendo que este último é congruente a \overline{OP} considerado anteriormente. Assim, a hipotenusa \overline{CQ} tem a mesma medida que \overline{CP} , o raio da esfera. Assim, $Q \in \beta \cap \mathbb{S}$. Isto mostra que a interseção de β com \mathbb{S} é uma circunferência. \square

Definição 7. Se o plano β contiver o centro da esfera \mathbb{B} (ou superfície esférica correspondente \mathbb{S}), a circunferência (ou, respectivamente, círculo) $\mathbb{S} \cap \beta$ (ou, respectivamente, $\mathbb{B} \cap \beta$) chama-se *circunferência máxima* (ou, respectivamente, *círculo máximo*) da esfera. Cada circunferência máxima divide a esfera em duas partes disjuntas, dadas pelas interseções da superfície esférica com os dois semiespaços determinado pelo plano da circunferência máxima. Cada uma destas partes é um *hemisfério*.

Observação 3. Se dois pontos estiverem em dois hemisférios distintos de uma superfície esférica, então o arco de círculo máximo entre eles intersecta a circunferência que determina os hemisférios.

3.1. A Área de uma Superfície Esférica. Usamos troncos de cone para aproximar a área de uma superfície esférica.

Definição 8. Dizemos que um tronco de cone está inscrito em uma esfera se a interseção de suas duas bases com a superfície esférica forem as circunferências dos círculos que formam essas bases. O tronco de cone está circunscrito à esfera se sua face lateral intersectar a superfície da esfera em uma circunferência e o restante da face lateral do tronco de cone estiver no exterior da esfera.

O lado de um tronco de cone inscrito ou circunscrito à esfera é um dos segmentos da interseção da faces lateral do tronco de cone com um plano contendo seu eixo. Observe que tal plano também contém o centro da esfera.

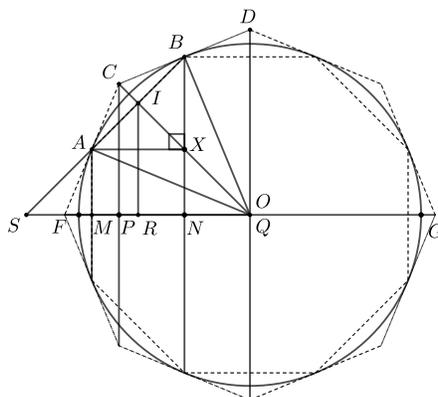


FIGURA 2. Aproximando a esfera por troncos de cones ou de cilindros inscritos e circunscritos.

Para as duas proposições abaixo, acompanhe a Figura 2.

Proposição 11. A área lateral de um tronco de cone inscrito em uma esfera de raio ρ , com lado a e altura h é $A = 2\pi h\sigma$ e $\text{Vol} = 2h\pi\sigma^2/3$, onde σ é o raio da esfera inscrita neste tronco de cone.

Demonstração. Intersectamos a esfera com o tronco de cone inscrito por um plano contendo seu eixo. Sejam \overline{AB} um dos lados do tronco de cone neste plano; \overline{FG} o diâmetro da circunferência (que é a intersecção da superfície esférica com o plano) contendo o eixo e cujo centro seja o ponto O ; $M, N \in \overline{FG}$ os pés das perpendiculares $\overline{AM}, \overline{BN} \perp \overline{FG}$; $X \in \overline{BN}$ o pé da perpendicular $\overline{AX} \perp \overline{BN}$; $I \in \overline{AB}$ o pé da perpendicular $\overline{OI} \perp \overline{AB}$; e, finalmente, $R \in \overline{FG}$ o pé da perpendicular $\overline{IR} \perp \overline{FG}$. (Veja a Figura 2.)

A fórmula da área lateral do tronco de cone é

$$A = 2AB\pi \frac{AM + BN}{2} = AB(2\pi IR).$$

Os triângulos $\triangle AXB$ e $\triangle IRO$ e, portanto, $AB/AX = OI/IR$, ou seja, $ABIR = AXOI = MNOI$. Como $MN = h$, a altura do tronco do cone, obtemos a área lateral deste tronco de cone $A = h(2\pi OI)$, ou seja, a área lateral é o produto da altura do tronco de cone pelo raio da esfera inscrita neste cone. \square

Como consequência desta proposição, temos a fórmula para a área da superfície esférica.

Proposição 12 (Área da Superfície Esférica). A área de uma superfície esférica de raio ρ é $A = 4\pi\rho^2$.

Demonstração. Inscrevemos um polígono regular de $2n$ arestas na circunferência de uma das seções da superfície esférica com um plano contendo o seu centro. Os troncos de cones e cilindros determinados por tal polígono somados têm área total $(2\pi OI)(2\rho)$, onde OI é o raio da circunferência inscrita no polígono. Se fizermos n tender ao infinito, OI tenderá ao raio ρ e, portanto, a área da superfície esférica é $A = 4\pi\rho^2$. \square

3.2. Volume da Esfera. Para calcularmos o volume da esfera, precisamos calcular os volumes de algumas figuras auxiliares. A Primeira figura é obtida pela rotação de um triângulo em tronco de uma reta.

Proposição 13. Seja \mathcal{X} um conjunto tal que existe uma reta m (o eixo de \mathcal{X} tal que as interseções de \mathcal{X} com os planos $\beta \supset m$ são triângulos com um mesmo vértice $C \in M$ e os outros dois mantendo a mesma distância à reta m (ou seja, rodamos o triângulo $\triangle ABC$ em torno de m). Então o volume de \mathcal{X} é $\text{Vol} = 4\pi\tau\alpha/3$, onde α é a área do triângulo $\triangle ABC$ e τ é a distância do pont médio $I \in \overline{AB}$ à reta m .

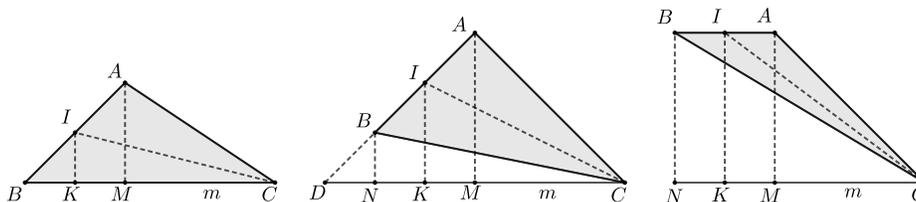


FIGURA 3. Cálculo do volume de sólido de revolução.

Demonstração. Acompanhe a argumentação com a Figura 3, em que descrevemos as três possibilidades: o vértice B pertence à reta m ; o segmento

\overline{AB} não intersecta e nem é paralelo à reta m ; o segmento \overline{AB} é paralelo à reta m .

No caso em que $B \in M$, se $\overline{AB} \perp m$, então a figura é um cone de altura BC e raio da base AB , e seu volume é

$$\text{Vol} = \pi BC AB^2 / 3 = 4\pi AB (AB BC / 2) / 3,$$

como esperávamos.

Se $B \in m$ e $\overline{AB} \not\perp m$, e o ângulo $\angle CBA$ for agudo, então o volume da figura será a soma dos volumes dos cones de vértices B e C e raio da base comum AM , onde $M \in m$ é o pé da perpendicular $\overline{AM} \perp m$, que suporemos pertencer ao segmento \overline{BC} (o caso em que $B - C - M$ é análogo ao caso em que $\angle CBA$ é obtuso, tratado a seguir). Daí, seu volume será $\text{Vol} = \pi AM^2 (BM + CM) / 3 = 4\pi (AM/2) (AM BC / 2) / 3$, como desejado.

Se $B \in m$ e $\overline{AB} \not\perp m$, e o ângulo $\angle CBA$ for obtuso, então o volume da figura será a diferença dos volumes dos cones de vértices C e B e raio da base comum AM , onde $M \in m$ é o pé da perpendicular $\overline{AM} \perp m$, que suporemos pertencer ao segmento \overline{BC} (o caso em que $B - C - M$ é análogo ao caso em que $\angle CBA$ é obtuso, tratado a seguir). Daí, seu volume será $\text{Vol} = \pi AM^2 (CM - BM) / 3 = 4\pi (AM/2) (AM BC / 2) / 3$, como queríamos.

Se $B \notin m$ e $\overline{AB} \not\parallel m$, prolongamos o segmento \overline{AB} até o ponto $D \in m$. Sejam $M, N \in m$ os pés das perpendiculares $\overline{AM} \perp m$ e $\overline{BN} \perp m$. Suponhamos que a ordem desses pontos em m seja $D - N - M - C$ (no caso de outras configurações, o argumento é análogo). Neste caso, a figura desejada é a união dos cones de vértice C e D , e base comum de raio AM , menos os cones de mesmos vértices e base comum de raio BN (compare com o segundo desenho da Figura 3). Pela parte anterior, sabemos que os volumes das figuras de seções $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$ são $4\pi (AM/2) (CD AM / 2) / 3$ e $4\pi (BN/2) (CD BN / 2) / 3$, respectivamente e sua diferença é o volume procurado

$$\text{Vol} = \frac{\pi}{3} (AM^2 - BN^2) CD = \frac{4\pi}{3} \frac{AM + BN}{2} \frac{AM - BN}{2} CD,$$

que é da forma $4\pi\alpha\tau$ como no enunciado.

Por fim, consideremos o caso em que $\overline{AB} \parallel m$ (veja o terceiro desenho da Figura 3). Neste caso a figura é a união do cone de vértice C e base de raio AM e do cilindro de mesma base e altura MN , menos o cone de vértice C e base de raio BN (onde $M, N \in m$ são os pés das perpendiculares $\overline{AM} \perp m$ e $\overline{BN} \perp m$, respectivamente). O volume da figura resultante será

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \frac{\pi}{3} (AM^2 CM - BN^2 CN) + \pi AM^2 MN = \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{AM^2 MN}{2} = \frac{4\pi}{3} \frac{AM MN}{2} AM, \end{aligned}$$

que é a forma enunciada. Observe que usamos as igualdades $AM = BN$ e $CM - CN = -MN$. \square

Observação 4. Se o triângulo $\triangle ABC$ for isósceles (com $CA = CB$, então sua área será $CI AB/2$, onde I é o ponto médio de \overline{AB} . Seja $K \in m$ o pé da perpendicular $\overline{IK} \perp m$. Na demonstração da Proposição 11, mostramos que $IK AB = CIMN$ e, portanto, o volume da figura será $2\pi AB CI IK/3 = 2\pi CI^2 MN/3$.

Com isto, podemos obter o volume de uma esfera.

Proposição 14. O volume de uma esfera de raio ρ é $\text{Vol} = 4\pi\rho^3/3$.

Demonstração. Se inscrevermos vários troncos de cones e um cilindro, se necessário, na esfera, de modo que sua seção por um plano contendo seus eixos (e o centro da esfera, por consequência) seja um polígono regular com um número par de lados. Ligamos seus vértices ao centro da esfera e obtemos diversos triângulos rodados em torno do eixo, com volume total $\text{Vol} = 2\pi(2\rho)OI^2$. Quando o número de lados deste polígono tender a infinito, OI tenderá ao raio da esfera e o volume da figura tenderá a $\text{Vol} = 4\pi\rho^3/3$, como no enunciado. \square

3.3. Ângulos Sólidos, Polígonos e o Teorema de Jordan. Para definirmos triângulos e polígonos esféricos, precisamos lembrar da definição de ângulo sólido.

Definição 9. Um *ângulo sólido* é a união de pelo menos três ângulos planos de mesmo vértice e com lados adjacentes, $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_{n-1}OA_n, \angle A_nOA_1$, de modo que as semirretas que os definem sejam todas distintas e que o interior de cada ângulo não intersecte nenhuma semirreta destes ângulos e nem os interiores dos outros ângulos. Uma *face* de um ângulo sólido é o conjunto dos pontos de um dos ângulos e de seu interior. Para evitarmos casos patológicos, assumimos que existe um plano contendo o vértice O , tal que os interiores de todos os ângulos estejam no mesmo semiespaço determinado pelo plano.

Observação 5. Se o ângulo sólido tiver apenas três faces, então a interseção com qualquer plano que intersecte todas as faces será um triângulo, que é um polígono convexo. Se possuir mais do que três faces, o polígono pode ser não convexo. Para definirmos o interior de um ângulo sólido, precisamos definir o que seria o interior de um polígono qualquer (não necessariamente convexo). Isto é o conteúdo do Teorema de Jordan, a seguir.

Definição 10. Uma *linha poligonal* entre os pontos P e Q é uma sequência de segmentos $\overline{A_iA_{i+1}}$ ($0 \leq i \leq n$), tal que $P = A_0$ e $Q = A_n$. Um conjunto \mathcal{X} do plano é *conexo por caminhos poligonais* se para cada par de pontos $P, Q \in \mathcal{X}$ existe uma linha poligonal entre P e Q , toda contida no conjunto \mathcal{X} .

Teorema 1 (Jordan: Polígonos). Seja $A_1 \dots A_n$ um polígono em um plano, não necessariamente convexo. Então existem dois conjuntos conexos por caminhos poligonais J_1 e J_2 , tais que J_1, J_2 e as arestas do polígono são

dois a dois disjuntos e cada ponto do plano ou pertence a J_1 , ou a J_2 , ou ao polígono. Ainda mais, se $P \in J_1$ e $Q \in J_2$, então qualquer caminho poligonal entre P e Q deve conter pelo menos um ponto do polígono. Por fim, ou J_1 , ou J_2 está contido no interior de um triângulo e o outro é ilimitado.

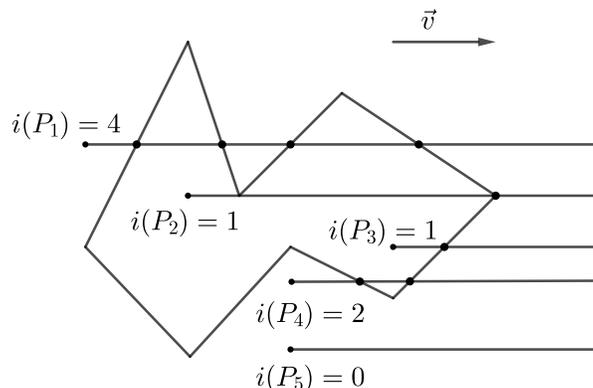


FIGURA 4. Os índices dos pontos. Observe que o índice de P_2 não conta o vértice cujas arestas não estão em lados opostos da reta suporte da semirreta $P_2 + t\vec{v}$.

Demonstração. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$ um vetor do plano que não seja paralelo a nenhuma das arestas do polígono. Para cada ponto P do plano que não pertença ao polígono, seja $i(P)$ (chamado de *índice* do ponto P) a quantidade de pontos na intersecção da semirreta $P + t\vec{v}$ ($t \geq 0$), sendo que sua intersecção com um dos vértices do polígono somente seja contada se as arestas que contêm aquele vértice estejam em lados opostos da reta suporte da semirreta. (Veja a Figura 4.)

Definimos $J_1 = \{P : i(P) \text{ é par}\}$ e $J_2 = \{P : i(P) \text{ é ímpar}\}$. Claramente estes dois conjuntos são disjuntos e não contêm pontos do polígono. Também fica claro que cada ponto do plano ou está no polígono, ou em J_1 , ou em J_2 .

Primeiro observamos que se o segmento \overline{PQ} não intersectar o polígono, então o índice $i(R)$ é o mesmo para todos os pontos R deste segmento.

Mostremos que J_1 é conexo por caminhos poligonais.

Se o segmento \overline{PQ} não intersectar o polígono dado, então os índices $i(R)$ de seus pontos serão sempre pares, pois o índice somente mudaria se a semirreta correspondente cruzasse um vértice do polígono. Para que o índice mude, o vértice tocado pela semirreta deve tocá-la por apenas um dos lados da reta suporte. Daí o índice aumenta ou diminui duas unidades por vértice cruzado e, portanto, não muda a paridade do índice. Portanto, se o caminho

poligonal ligar um ponto de J_1 e um de J_2 , este caminho tem que cruzar o polígono.

Mostremos que J_1 é conexo por caminhos poligonais.

Sejam $P, Q \in J_1$. Seja $\delta > 0$ menor que a distância dos pontos P e Q ao polígono e que as distâncias dos vértices deste polígono a suas arestas não adjacentes. Então o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao polígono seja igual a δ formam dois polígonos (um “dentro” e outro “fora” do polígono dado).

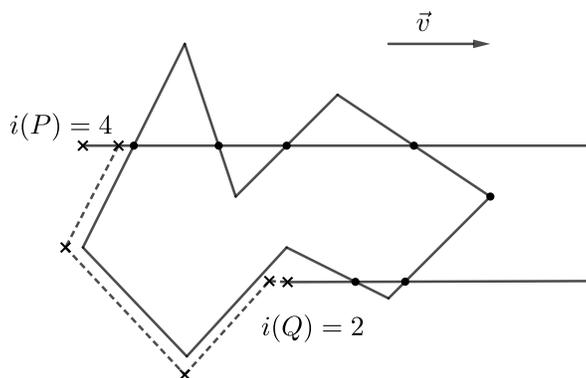


FIGURA 5. Caminho poligonal ligando dois pontos de índices pares.

Criamos um caminho poligonal entre P e Q como indicado na Figura 5. Com isto, todos os pontos do caminho terão índices pares.

De modo análogo, ligamos dois pontos de J_2 .

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo, cujo interior contenha o polígono e P um ponto do plano no exterior do triângulo. Existe, então, um outro ponto $Q_0 = P + t_0\vec{v}$, tal que a semirreta $Q_0 + t\vec{v}$ não intersecta o polígono. Além disso, podemos criar um caminho poligonal entre P e Q e, portanto, $P, Q \in J_1$. Isto implica que J_2 está no interior do $\triangle ABC$. \square

Em vista deste teorema, definiremos o *interior* do polígono como sendo o conjunto J_2 deste teorema.

Observação 6. Esta noção coincide com a de interior de um polígono convexo.

Finalizamos esta seção com a seguinte definição.

Definição 11 (Interior de Ângulo Sólido). Dado o ângulo sólido $OA_1 \dots A_n$, de vértice O , existe um plano $\beta \ni O$, tal que A_1, \dots, A_n estão no mesmo semiplano determinado por β . Se $\eta \parallel \beta$ for um plano contido naquele semiplano, então intersectará todas as semirretas $\overrightarrow{OA_j}$, o que determina um

polígono $B_1 \dots B_n$ em η . Seja J_2 o interior deste polígono, conforme o Teorema de Jordan. Dizemos que $P \neq O$ é um *ponto do interior* do ângulo sólido se existir $Q \in J_2$ tal que P esteja na semirreta \overrightarrow{OQ} .

3.4. Triângulos e Polígonos Esféricos. Com a definição de ângulo sólido dada acima, podemos definir facilmente o que sejam polígonos esféricos.

Definição 12. Uma *lúnula* é a região de uma superfície esférica contida no interior e nas faces de um diedro, cujo eixo seja uma reta que contenha o centro da esfera. Um *triângulo esférico* é a região da superfície esférica contida no interior e nas faces de um ângulo sólido de três faces, cujo vértice esteja no centro da esfera. Um *polígono esférico* é a região da superfície esférica contida no interior e nas faces de um ângulo sólido de interior convexo, cujo vértice esteja no centro da esfera.

Observação 7. Um polígono esférico está contido em um dos hemisférios determinado por um plano contendo o centro da esfera e não intersectando o interior de nenhuma semirreta do ângulo sólido.

Definição 13. A medida de um ângulo entre dois arcos de circunferências máximas da esfera é a medida do ângulo formado pelas semirretas tangentes ao arco, partindo de seu ponto.

Observação 8. As medidas dos ângulos internos de um polígono esférico são as dos ângulos diedrais que formam o ângulo sólido que o origina. Estas medidas coincidem com as dos ângulos obtidos pela interseção do ângulo sólido com um plano tangente à esfera em cada vértice do polígono esférico.

As medidas dos lados de um polígono esférico é o raio da esfera multiplicado pela medida em radianos dos ângulos das faces do ângulo sólido que o define.

Proposição 15. A soma dos comprimentos das arestas de um triângulo esférico é menor que o comprimento de uma circunferência máxima. A soma de dois lados de um triângulo esférico é maior do que o terceiro.

Demonstração. A soma das medidas dos ângulos das faces do ângulo sólido que o define é menor que 2π e soma das medidas de dois ângulos das faces é maior que a do terceiro. Isto implica as desigualdades do enunciado. \square

Observação 9. O mesmo vale se o polígono esférico foi obtido de um ângulo sólido de interior convexo: a soma dos comprimentos dos lados de tal polígono esférico é menor que 2π e a soma de $(n - 1)$ lados é maior que o lado remanescente.

Observação 10. Se o interior do ângulo sólido não for convexo, as desigualdades apropriadas são muito mais complicadas e não serão considerados aqui.

3.5. Triângulo Polar. Para obtermos algumas desigualdades em triângulos esféricos é útil falar de polos de circunferências na esfera e de triângulos polares.

Definição 14. Dada uma circunferência máxima em uma esfera, um ponto da esfera é um *polo* desta circunferência se for equidistante de todos os seus pontos.

Observação 11. Toda circunferência máxima tem dois polos, que são os dois extremos de um diâmetro da esfera, perpendicular ao plano da circunferência. Observe que o comprimento do arco de circunferência máxima que liga o polo com um ponto daquela circunferência mede um $\rho\pi/2$.

Observação 12. Seja ρ o raio da esfera. Dado um arco AB de uma circunferência máxima menor que uma semicircunferência, se C for um dos polos desta circunferência, então o ângulo ACB tem medida $\ell(AB)/\rho$, onde $\ell(AB)$ é o comprimento do arco AB .

Proposição 16. Seja ABC um triângulo esférico. Seja DEF o triângulo obtido a partir das circunferências máximas cujos polos sejam os pontos A , B e C , correspondentes aos arcos EF , FD e DE , respectivamente. Então os pontos D , E e F serão polos (das circunferências suportes) dos arcos BC , AC e AB .

Demonstração. Os comprimentos de arco máximos AF e BF são $\rho\pi/2$ e, portanto, F é o polo do arco AB . Analogamente, E é o polo de AC e D o de BC . \square

Proposição 17. Continuando com a notação da proposição precedente, a medida do arco EF , $\ell(EF)$, é igual a $\pi - m(BAC)/\rho$, onde $m(BAC)$ é a medida do ângulo no vértice A do triângulo esférico ABC .

Demonstração. Sejam G e H os pontos da circunferência que suporta o arco EF , tais que AG e AH sejam arcos de circunferências máximas que suportam os lados AB e AC , respectivamente. Eles medem $\rho\pi/2$ (A é um polo daquela circunferência). Então o arco GH mede $m(BAC)\rho$. Como E é polo do arco AC e F um polo do arco AB , EH e FG medem $\rho\pi/2$. Como $\ell(EH) + \ell(FG) = \ell(EF) + \ell(GH) = \rho\pi$, temos que $\ell(EF) = \pi - m(BAC)\rho$. \square

Com isto, podemos obter as desigualdades de somas de ângulos de um triângulo esférico.

Proposição 18. A soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π (ou 180°) e menor que 3π .

Demonstração. Cada ângulo de um triângulo esférico é menor que π e, portanto, a soma dos ângulos de um triângulo esférico é menor que 3π .

Seja DEF o triângulo polar do triângulo ABC . Da proposição acima, obtemos

$$\begin{aligned} m(BAC) + m(ABC) + m(ACB) &= 3\pi - \frac{\ell(DE) + \ell(EF) + \ell(FD)}{\rho} > \\ &> 3\pi - 2\pi = \pi, \end{aligned}$$

pois já mostramos que $\ell(DE) + \ell(EF) + \ell(FD) < 2\pi\rho$. \square

3.6. O Teorema de Girard. Albert Girard (1595–1632) calculou a área de um triângulo esférico na terceira parte de sua obra *Invention Nouvelle en l'Algebre* de 1629, [5]. Sua demonstração é bastante elaborada. Apresentamos uma demonstração bem mais simples, tirada do livro de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), [6, Livre VII, Proposition XXIII, pp. 223-224].

Observação 13. A área de uma lúnula de ângulo θ em cada um de seus dois vértices é $A = 2\theta\rho^2$. Isto decorre de simples regra de três. Se o ângulo da lúnula for $\pi/2$, a área será $A(\pi/2) = \pi\rho^2$ (um quarto da área da superfície esférica) e, portanto, $A(\theta) = \theta A(\pi/2)/(\pi/2)$.

Teorema 2. A área de um triângulo esférico ABC é $\rho^2(m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) - \pi)$, onde ρ é o raio da esfera.

Demonstração. Os planos OAB , OAC e OBC intersectam a esfera em circunferências máximas, formando seis lúnulas, que cobrem toda a esfera e intersectam-se no triângulo ABC e em uma cópia sua oposta na esfera. Assim, somando as áreas destas seis lúnulas, obtemos a área da esfera e mais quatro vezes a área do triângulo esférico ABC (contado duas vezes a mais para a segunda e terceira lúnulas). Os ângulos das lúnulas são os ângulos do triângulo ABC . Assim,

$$4[m(BAC) + m(ABC) + m(ACB)]\rho^2 = 4\pi\rho^2 + 4A(ABC),$$

ou seja, $A(ABC) = [\pi - (m(BAC) + m(ABC) + m(ACB))]\rho^2$. \square

Girard também demonstrou uma fórmula para a área de um polígono esférico.

Proposição 19. A área de um polígono esférico (convexo) é $A = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$, onde n é o número de arestas e α_i é o ângulo no vértice i , $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Ligamos um ponto do interior do poliedro aos vértices e obtemos n triângulos. Basta somar as áreas deste triângulos para obter a fórmula citada. \square

4. APLICAÇÃO AOS POLIEDROS CONVEXOS

4.1. O Teorema de Euler. Leonhard Euler publicou em 1758 um teorema sobre a quantidade de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, [3]. Apresentamos a demonstração de Adrien Marie Legendre, [6, Livre VII, *La Sphère*, Proposition XXX, pp. 246-247].

Teorema 3. Se V for a quantidade de vértices, A a de arestas e F a de faces de um poliedro convexo, então $V + F = A + 2$.

Demonstração. Seja O um ponto do interior do poliedro (convexo), e S uma esfera centrada em O (de raio unitário, por conveniência). Para cada vértice A do poliedro, a semirreta \overrightarrow{OA} intersecta a esfera em um ponto A' . Cada aresta é levada na aresta de um polígono esférico. Sejam f_1, \dots, f_F os polígonos esféricos assim obtidos. Eles cobrem toda a esfera. Sejam

n_1, \dots, n_F as quantidades de vértices de cada polígono e $\alpha_{i,j}$ uma enumeração das medidas dos ângulos internos de cada polígono (em radianos), $1 \leq i \leq F$, $1 \leq j \leq n_i$. A área da esfera é a soma das áreas desses polígonos esféricos. Pelo Teorema de Girard,

$$4\pi = \sum_{i=1}^F \left(\left(\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} \right) - (n_i - 2)\pi \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} - \pi \sum_{i=1}^F n_i - \sum_{i=1}^F 2\pi = 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F,$$

pois a primeira soma pode ser rearranjada de modo a somar os ângulos em cada vértice (totalizando 2π em cada um) e na segunda soma cada aresta é contada duas vezes, pois pertence a dois polígonos esféricos adjacentes.

Assim, obtemos a fórmula $2 = V - A + F$, ou $V + F = A + 2$, como desejado. \square

4.2. O Teorema de Descartes. O Teorema de René Descartes refere-se a um número associado a todos os poliedros (um *invariante*), e está em um manuscrito descoberto postumamente (veja a tradução e estudo de P. J. Frederico, [4]). Apresentamos a demonstração de Legendre, que tira como corolário do Teorema de Euler dado acima, [6, Livre VII, *La Sphère*, Proposition XXX, Corollaire, p. 247].

Definição 15. A *deficiência* de um ângulo sólido é a diferença $360^\circ - A$ (ou $2\pi - A$), onde A é a soma das medidas dos ângulos das faces do ângulo sólido em graus (ou em radianos, respectivamente). Esta definição estende-se aos vértices de um poliedro: a *deficiência* de um vértice de um poliedro é a deficiência do ângulo sólido determinado por este vértice.

Teorema 4. A soma das deficiências de todos os vértices de um poliedro convexo é 720° , ou 4π radianos.

Demonstração. Se a face do poliedro for um polígono (convexo) de n arestas, então a soma dos ângulos internos desta face será $(n-2)\pi$. Sejam f_1, \dots, f_F as faces do poliedro, e n_1, \dots, n_F as quantidades de arestas das respectivas faces. Então a soma para todas as faces das somas dos ângulos internos de cada face será $\sum_{j=1}^F (n_j - 2)\pi = 2(A - F)\pi$, onde o termo $2A$ decorre do fato que cada aresta é contada duas vezes, por pertencer a duas faces adjacentes do poliedro.

A fórmula de Euler, $V + F = A + 2$, aplica-se e produz o resultado $\sum_{j=1}^F (n_j - 2)\pi = (2V - 4)\pi$. A deficiência total será $2V\pi - \sum_{j=1}^F (n_j - 2)\pi = 2V\pi - (2V - 4)\pi = 4\pi$, como queríamos. \square

5. EXERCÍCIOS

Exercício 1. Demonstre os critérios de congruência LAL, ALA e LLL para triângulos esféricos.

Exercício 2 (Desigualdades em Triângulos Esféricos). Dado o triângulo esférico ABC , mostre que o ângulo em A será maior que o ângulo em B se, e somente se, o lado BC oposto ao ângulo em A for maior que o lado AC , oposto ao ângulo em B .

Exercício 3. Mostre que o menor arco de circunferência entre dois pontos A e B de uma esfera é o de uma circunferência maximal.

Exercício 4. Mostre que se os triângulos esféricos ABC e DEF tiverem os mesmos ângulos ($\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$), então os dois triângulos serão congruentes.

Exercício 5. Mostre que a soma dos ângulos diedrais entre as faces de um ângulo sólido de interior convexo é igual à soma dos ângulos do polígono esférico que ele define.

Exercício 6. Mostre que a área da parte de uma superfície esférica de raio ρ contida entre dois planos paralelos é $2\pi\rho h$, onde h é a distância entre os planos.

Exercício 7. Mostre que o volume da região interna a uma esfera, entre dois cones com vértices no centro da esfera e mesmo eixo é $2\pi\rho^2 h/3$, onde h é a distância entre os planos das bases dos dois cones.

Exercício 8. Mostre que o volume da região interna a uma esfera de raio ρ entre dois planos paralelos é $\pi a^2 h/6$, onde h é a distância entre os planos e a é a medida de uma das cordas do arco de circunferência obtida pela interseção da superfície esférica com um plano contendo o seu centro e perpendicular aos planos paralelos, entre os dois planos.

Exercício 9. Calcule o volume da parte de um ângulo sólido (de interior convexo) dentro de uma esfera de raio ρ , sendo que seu vértice coincide com o centro da esfera.

Exercício 10. Calcule a deficiência em cada vértice dos sólidos platônicos e dos arquimedianos. Calcule as deficiências em cada vértice dos prismas e antiprismas de faces regulares.

REFERÊNCIAS

- [1] Arquimedes. *The Works of Archimedes*. Traduzido por Thomas L. Heath. Britannica Great Books of the Western World, Volume 11, pp. 397–592, editor-em-chefe Robert Maynard Hutchins, Encyclopædia Britannica, Inc., Chicago, EUA, 1952.
- [2] Euclides, *Os Elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Editora UNESP, São Paulo, 2009.
- [3] Leonhard Euler. *Elementa Doctrinae Solidorum*. (Elementos da Doutrina dos Sólidos). *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4, 1758, 109–141. *Opera Omnia*: Series 1, Volume 26, pp. 71–93. Também disponível como o artigo E230 do *Euler Archive*, <http://eulerarchive.maa.org/> (último acesso em 19 de abril de 2018).

- [4] P. J. Frederico. *Descartes on Polyhedra. A study of the De Solidorum Elementis*. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, 4. Springer Verlag, New York, 1982.
- [5] Albert Girard. *Invention Nouvelle en l'Algebre*. Guillaume Iansson Blaeuw., Amsterdam, Holanda, 1629. Disponível em <https://archive.org> (último acesso em 19 de abril de 2018).
- [6] Adrien-Marie Legendre. *Éléments de Géométrie*, com adições e modificações de A. Blanchet, segunda edição, seguida da décima quinta edição de Legendre, Librairie de Firmin Didot Freres, Paris, 1852. Disponível em <https://archive.org> (último acesso em 6 de abril de 2018).

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RUA DO MATÃO, 1010, CIDADE UNIVERSITÁRIA, CEP 05508-090, SÃO PAULO, SP, BRAZIL
E-mail address: `bianconi@ime.usp.br`