MAT-240- GD II - RESOLUÇÃO DA 1ª PROVA DE 02/04/2020.

Atenção: cada questão vale 2,5 pontos. Indique os resultados que você usar.

1. Calcule a área do quadrilátero (não convexo) $ABCD$, onde $A = (0,0)$, $B = (5,0)$, $C = (3,1)$ e $D = (4,3)$. [Sugestão: divida a região em triângulos; lembre-se de como calcular áreas usando o produto vetorial.]

....

Solução: Quase todos usaram o produto vetorial e acertaram. Por isso, apresento uma solução diferente, em que subtraio a área do $\triangle BCD$ da do $\triangle ABD$. Perceba que $\triangle BCD$ é um triângulo retângulo, com ângulo reto em C. Daí, temos que

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(\triangle ABD) - \text{Área}(\triangle BCD) =$$

$$= \frac{5 \times 3}{2} - \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = 5.$$

---

2. Calcule a área do pentágono convexo $ABCDE$, tal que todos os lados medem ℓ, os ângulos $B\hat{C}D$ e $A\hat{E}D$ são retos, e $E\hat{A}B \equiv A\hat{B}C$. [Sugestão: divida em três triângulos, $\triangle ABD$, $\triangle AED$ e $\triangle BCD$.]

....

Solução: Essa figura é composta por dois triângulos retângulos de catetos medindo ℓ e um triângulo isósceles de base medindo ℓ e os outro dois lados medindo $\ell\sqrt{2}$ cada. Sua altura é, portanto, $\ell\sqrt{7}/2$. Daí, a área do pentágono é $\text{Área}(ABCDE) = \ell^2(4 + \sqrt{7})/4$.

---

3. Sejam r e s duas retas não coplanares. Mostre que elas não são concorrentes. [Elas são **reversas**. Argumente por contradição.]

....

Solução: Suponhamos que r e s sejam concorrentes em um ponto O. Existem dois pontos P e Q, distintos de O, com P incidente em r e Q incidente em s. Como as retas são distintas, os pontos O, P e Q não são colineares e, portanto determinam um (único) plano contendo esses três pontos. Isso implica que todos os pontos de r e de s estejam nesse plano, contradizendo a hipótese de r e s não serem colineares.

---

4. Dadas as retas reversas r e s, mostre que existe uma única reta t, tal que $t \perp r$ e $t \perp s$. [Sugestão: o Postulado da Continuidade implica que existe um ponto P incidente com r, tal que $\mathrm{dist}(P, s)$ é mínima e é igual a PQ, onde Q está em s e $\overline{PQ} \perp s$. Mostre que $\overleftrightarrow{PQ}$ também é perpendicular a r.]

. . . .

Solução: Sejam P em r e Q em s, tais que $\mathrm{dist}(P, s)$ seja mínima e igual a PQ, com Q em s e $\overline{PQ} \perp s$. Seja P' o ponto de r, tal que $\overline{QP'} \perp r$. Se $P' \neq P$, então P, P' e Q formariam um triângulo $\triangle PP'Q$, com cateto $\overline{QP}'$ e hipotenusa $\overline{QP}$, o que implicaria em $P'Q < PQ$. Isso contradiz a definição do ponto P como $\mathrm{dist}(P, s)$ sendo mínima.
