RESOLUÇÃO DETALHADA DE ALGUNS EXERCÍCIOS

RICARDO BIANCONI

59. Mostre soma das medidas dos ângulos de duas faces do ãngulo sólido $OABC$ (de vértice O) é maior do que a medida do ângulo da terceira face.

. . . .

Solução. Se as medidas dos ângulos das faces forem iguais entre si, então a desigualdade é trivialmente verdadeira.

Assim, podemos supor que $m(A\hat{O}B) \geq m(B\hat{O}C) > m(A\hat{O}C)$. Assim, existe um ponto D no interior de $A\hat{O}B$, tal que $A\hat{O}D \equiv A\hat{O}C$. Podemos supor que $D \in \overline{AB}$ (observe que aqui usamos o Teorema das Barras Transversais, uma consequência do Postulado de Pasch). Podemos supor também que $OD = OC$ (senão, escolha outro ponto C' na semirreta $\overrightarrow{OC}$ conveniente, etc.). Por LAL, $\triangle AOC \equiv \triangle AOD$ e, daí, $AD = AC$. A desigualdade triangular em $\triangle ABC$ ($AC + BC > AB$) implica que $BC > DB$ (pois $AD + DB = AB$). Comparamos os triângulos $\triangle DOB$ e $\triangle BOC$, como $OD = OC$ e $\overline{OB}$ é aresta comum, como $DB < BC$, $m(D$
$hatOB) < m(B\hat{O}C)$ (arestas adjacentes correspondem-se e arestas opostas diferentes). Portanto, $m(A\hat{O}B) < m(A\hat{O}C) + m(B\hat{O}C)$.

---

60. Mostre que a soma das medidas dos ângulos de $n-1$ faces do ângulo sólido $OA_1 \dots A_n$ (de vértice O) é maior do que a medida do ângulo da face remanescente.

. . . .

Solução. Argumentamos por indução em $k \geq 0$, onde $n = 3 + k$.

O caso $k = 0$ já foi tratado na seção anterior.

Suponhamos que o resultado seja válido para k e demonstremos o caso $k+1$ (ou $n+1 = 3+k+1$). Dado o ângulo sólido $OA_1 \dots A_{n+1}$, suponhamos que os vértices do polígono convexo $A_1 \dots A_{n+1}$ sejam (re)nomeados de forma que $m(A_1\hat{O}A_{n+1})$ seja maior ou igual às medidas dos ângulos das outras faces. A Hipótese de Indução implica que $m(A_1\hat{O}A_n) < \sum_{i=1}^{n-1} m(A_i\hat{O}A_{i+1})$. O caso $n = 3$ (ou $k = 0$) implica que $m(A_1\hat{O}A_{n+1}) < m(A_1\hat{O}A_n) + m(A_n\hat{O}A_{n+1})$. Isso implica que $m(A_1\hat{O}A_{n+1}) < \sum_{i=1}^{n} m(A_i\hat{O}A_{i+1})$.

Por Indução, o resultado vale para todo $k \geq 0$ (ou todo $n \geq 3$).

---

61. Mostre que a soma das medidas dos ângulos de todas as faces é estritamente menor que 2π radianos (ou $360°$)

. . . .

Solução. Seja $OA_1 \dots A_n$ $(n \geq 3)$ um ângulo sólido de vértice O. Por conveniência, definimos $A_{-1} = A_n$ e $A_{n+1} = A_1$.

Cada vértice A_i do polígono convexo $A_1 \dots A_n$ é o vértice do ângulo sólido $A_iOA_{i-1}A_{i+1}$. Pelo Exercício 60, $m(A_{i-1}\hat{A}_iA_{i+1}) < m(A_{i-1}\hat{A}_iO)+ m(O\hat{A}_iA_{i+1})$.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $\sum_{i=1}^{n} m(A_{i-1}\hat{A}_iA_{i+1}) = (n-2)\pi$. A soma dos ângulos dos triângulos das faces é $n\pi$ e, daí, $\sum_{i=1}^{n} m(A_i\hat{O}A_{i+1}) = n\pi - \sum_{i=1}^{n}[m(A_{i-1}\hat{A}_iO) + m(O\hat{A}_iA_{i+1})] < n\pi - \sum_{i=1}^{n} m(A_{i-1}\hat{A}_iA_{i+1}) = (n-2)\pi = 2\pi$.

---

76. Mostre que as diagonais de um paralelepípedo encontram-se em seus pontos médios.

. . . .

Solução. Um paralelepípedo é um poliedro cujas faces são todas retangulares.

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo. Para localizarmos os vértices, listamos os retângulos que formam suas faces: $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ e $ADHE$.

Mostremos que as diagonais $\overline{AG}$ e $\overline{BH}$ encontram-se em seus pontos médios (as outras seguem por analogia).

Já sabemos que as diagonais de um retângulo encontram-se em seus pontos médios. Daí, o ponto $P \in \overline{AF} \cap \overline{BE}$ é o ponto médio das diagonais $\overline{AF}$ e $\overline{BG}$ do retângulo $ABFE$.

Seja $M \in \overline{AG}$ o ponto médio dessa diagonal do paralelepípedo. Os triângulos $\triangle AFG$ e $\triangle APM$ são semelhantes, com $FG = 2\,MP$, e, portanto, $\overline{MP} \parallel \overline{FG}$. Isso implica que $\overline{PM}$ é perpendicular ao plano da face $ABFE$.

Se $N \in \overline{BH}$ for o ponto médio, então o mesmo raciocínio implica que $BH = 2\,NP$ e $\overline{NP}$ também é perpendicular ao plano da face $ABFE$.

Isso implica que $M = N$, ou seja, as diagonais $\overline{AG}$ e $\overline{BH}$ encontram-se em seus pontos médios, que é o ponto M.

---

77. As diagonais de um cubo são perpendiculares entre si?

. . . .

Solução. Seja $ABCDEFGH$ um cubo, cujas faces são $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ e $ADHE$.

O Exercício 76 garante que essas diagonais encontram-se em seus pontos médios M. O critério LLL de congruência de triângulos implica que $\triangle AMB \equiv \triangle BMG \equiv \triangle GMH \equiv \triangle HMA$ e, em particular, $A\hat{M}B \equiv B\hat{M}G \equiv G\hat{M}H \equiv H\hat{M}A$. Isso implica que $\overline{AG} \perp \overline{BH}$.

---

89. Dada a pirâmide $PABC$ de base triangular $\triangle ABC$, seja Q no plano ABC, tal que $\overline{PQ}$ seja perpendicular ao plano ABC. Sejam $n > 0$, $P_0 = P$, $P_n = Q$ e $P_i \in \overline{PQ}$ tais que $P_{i-1} - P_i - P_{i+1}$, $i = 1, ..., n-1$, e $P_iP_{i+1} = P_0P_1$ (ou seja, subdividimos o segmento $\overline{PQ}$, cuja medida é a altura da pirâmide, em n segmentos congruentes). Seja T_i o triângulo obtido pela interseção do plano paralelo à base ABC e passando pelo ponto P_i, $i = 1, ..., n$ (observe que T_n é o triângulo da base). Seja A_i a área do triângulo T_i. Mostre que $A_i/A_n = (i/n)^2$, por semelhança de triângulos convenientes.

. . . .

Solução. Já vimos que a área de um triângulo é proporcional ao quadrado de um de seus lados e se $\triangle PQR \sim \triangle STU$, então

$$\text{Area}(\triangle PQR)/\,\text{Area}(\triangle STU) = PQ^2/ST^2 = QR^2/TU^2 = PR^2/SU^2.$$

Cada aresta de T_i mede i/n vezes a medida da aresta correspondente de T_n, $i = 1, \ldots, n$. Assim, $A_i/A_n = (i/n)^2$.

---

96. Dado o tetraedro $ABCD$, trace um plano perpendicular a cada aresta, passando pelo ponto médio da aresta. Mostre que todos estes planos têm um (único) ponto em comum P e que $PA = PB = PC = PD$.

. . . .

Solução. Observe que cada ponto do plano $\pi \perp \overline{XY}$, contendo o ponto médio Z de $\overline{XY}$, é equidistante de X e Y (por LAL de triângulos convenientes).

Seja M o circuncentro (encontro das mediatrizes das arestas) do triângulo $\triangle ABC$. Os planos perpendiculares às arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, passando por seus pontos médios, contêm o ponto M e, portanto, sua interseção é a reta r passando por M e perpendicular ao plano da face $\triangle ABC$ (pois cada plano é perpendicular ao plano da face $\triangle ABC$).

Cada ponto de r é equidistante de A, B e C. A reta r intersecta o plano passando pelo ponto médio de, e perpendicular a, $\overline{AD}$, pois esse plano não é perpendicular à face $\triangle ABC$ e, daí, não pode ser paralelo à reta r. Nomeamos tal ponto, P. Observe que $PD = PA = PB = PC$.

Por causa dessa igualdade, o ponto P é equidistante de A, B, C e D e, portanto tem que estar nos planos contendo os pontos médios de, e perpendiculares a, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$.

Correções.

92. O paralelogramo tem que ser um losango (senão a figura fica indeterminada). As diagonais são perpendiculares entre si. A resposta neste caso é 5.

. . . .

93. A figura não existe com tais medidas!

. . . .

94. A resposta correta é $(A-B)h/3$, onde A é a área da base maior e B a da base menor.

. . . .

95. Desconsidere este exercício. Sua formulação está muito vaga.
