

## Capítulo 2

# Os Postulados da Geometria Neutra

Os objetos básicos, com os quais desenvolveremos a geometria são chamados de *pontos*, *retas* e *planos*. É claro que temos uma compreensão intuitiva do que são esses objetos, representando-os por desenhos ou outras representações gráficas, mas o desenvolvimento da teoria independe de qualquer imagem ou representação das ideias correspondentes. Por outro lado, desenhos ajudam a compreensão do texto.

Para fixarmos a notação, a menos de menção explícita, usaremos letras romanas maiúsculas  $A, B, C, \dots$ , para indicar pontos, letras romanas minúsculas  $a, b, \dots$ , para indicar retas e letras gregas minúsculas  $\pi, \phi, \dots$ , para indicar planos.

Na *Geometria Plana* utilizamos apenas pontos e retas, e na *Geometria Espacial* utilizaremos os três tipos de objeto.

A Geometria é o estudo de certas relações entre esses objetos, que serão definidas mediante *postulados*, ou seja, asserções acerca dessas relações, a partir dos quais serão deduzidas *proposições*, que são também asserções acerca das relações.

## 2.1 Alguns modelos de geometrias

Para estimular um melhor entendimento dos conceitos introduzidos, inclusive suas limitações, apresentamos a seguir uma série de exemplos de *geometrias* que aparecerão de modo recorrente neste livro.

**Exemplo 1:** O plano da **Geometria Analítica Plana** é o conjunto  $\mathbb{R}^2$  dos pares ordenados de números reais (os pontos). As linhas são as retas  $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ .

**Exemplo 2: Geometria Analítica Espacial:** é o conjunto  $\mathbb{R}^3$  das triplas ordenadas de números reais (os pontos). Os planos são os conjuntos  $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  nem todos nulos, e as retas são os conjuntos intersecção de dois planos  $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\}$  e  $\pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\}$ , tais que a tripla  $(a_1, b_1, c_1)$  não seja um múltiplo da tripla  $(a_2, b_2, c_2)$ .

**Exemplo 3:** O plano da **Geometria Hiperbólica Plana** é o conjunto  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ . As linhas são de dois tipos: verticais  $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$  ou arcos de circunferência  $\ell_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$ .

**Exemplo 4:** Um modelo da **Geometria Hiperbólica Espacial:** é o conjunto  $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ . Os planos são de dois tipos, os verticais  $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{H} : ax + by + c = 0\}$  ou semiesferas  $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + (y - q)^2 + z^2 = r^2\}$ , e as retas são intersecções de dois desses planos (resultando em smi-retas verticais e semi-circunferências verticais).

**Exemplo 5:** O plano de Moulton é o conjunto  $\mathbb{R}^2$ , com linhas da forma  $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$  (verticais), ou  $\ell_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$ , com  $m < 0$  (linhas retas de inclinações negativas) ou da forma  $\ell_{m,b}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2mx + b, \text{ se } x < 0 \text{ e } y = mx + b \text{ se } x \geq 0\}$ , com  $m \geq 0$ , (linhas quebradas e de inclinações positivas quando passam pelo eixo  $Oy$ ).

**Exemplo 6:** O plano “rasgado” é o conjunto  $\pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$  e suas linhas são da forma  $\{(x, y) \in \pi : ax + by = c\}$ .

## 2.2 Postulados de Incidência ou Conexão

A primeira relação é a de incidência<sup>1</sup> (ou conexão), “ $\cdot I \cdot$ ”, que relaciona pontos com retas e com planos, e também retas com planos:  $P \cdot I \cdot r$  ( $P$  incide em  $r$ ),  $P \cdot I \cdot \pi$  ( $P$  incide em  $\pi$ ) e  $r \cdot I \cdot \pi$  ( $r$  incide em  $\pi$ ). A interpretação dessa relação nos modelos que encontraremos a seguir é a de que o ponto  $P$  está na reta  $r$ , ou que o ponto  $P$  está no plano  $\pi$ , ou que a reta  $r$  está no plano  $\pi$ .

**Postulado I:** Para cada par de pontos distintos  $P$  e  $Q$ , existe uma única reta  $r$ , tal que  $P \cdot I \cdot r$  e  $Q \cdot I \cdot r$ . Denotamos tal reta por  $r_{PQ}$ , quando for conveniente lembrar desses pontos.

Um outro modo, mais informal de dizer a mesma coisa, é que, dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$ , existe uma única reta determinada por  $P$  e  $Q$ , denotada  $r_{PQ}$ , ou seja,  $r_{PQ}$  é a única reta em que esses pontos estão.

**Postulado II:** Dados três pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não colineares (ou seja, não incidem numa mesma reta), existe um único plano  $\pi$ , tal que  $P \cdot I \cdot \pi$ ,  $Q \cdot I \cdot \pi$  e  $R \cdot I \cdot \pi$ .

Informalmente, dados três pontos não colineares (isto é, não na mesma linha)  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , existe um único plano contendo  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . Tal plano será denotado por  $\pi_{PQR}$ .

**Postulado III:** Dados dois planos distintos  $\pi$  e  $\rho$ , se existir um ponto  $P$ , tal que  $P \cdot I \cdot \pi$  e  $P \cdot I \cdot \rho$ , então existe uma única reta  $r$ , tal que  $r \cdot I \cdot \pi$  e  $r \cdot I \cdot \rho$ .

Isto é, se dois planos distintos têm algum ponto em comum, então existe uma única reta contida em ambos.

**Postulado IV:** Para todo ponto  $P$ , toda reta  $r$  e todo plano  $\pi$ , se  $P \cdot I \cdot r$  e  $r \cdot I \cdot \pi$ , então  $P \cdot I \cdot \pi$ .

Isto serve para garantir que se  $P$  estiver em  $r$  e  $r$  em  $\pi$ , então  $P$  estará em  $\pi$ .

**Postulado V:** Toda reta contém pelo menos dois pontos; todo plano contém pelo menos três pontos não colineares (isto é, não na mesma reta).

---

<sup>1</sup>De *incidir*, do latim *incidere*, que significa *cair em*, ou *cair sobre*.

**Postulado VI:** Existem pelo menos quatro pontos não coplanares (isto é, não no mesmo plano).

Esses dois últimos postulados servem para descartar geometrias sem pontos ou retas.

**Exemplo 7:** Uma **Geometria Projetiva Plana** é uma geometria de incidência que também satisfaz mais dois postulados: cada linha tem pelo menos três pontos e, dadas duas linha distintas  $r_1$  e  $r_2$ , existe um único ponto comum às duas linhas.

**Exemplo 8:** Uma **Geometria Projetiva Espacial** é uma geometria de incidência que também satisfaz: cada plano é modelo de uma geometria projetiva plana e para cada par de planos distintos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , existe uma única reta  $r$ , tal que  $r \cdot I \cdot \pi_1$  e  $r \cdot I \cdot \pi_2$ .

**Exercício 2:** Mostre que  $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  com  $\ell_1 = \{A, B, C\}$ ,  $\ell_2 = \{A, D, E\}$ ,  $\ell_3 = \{A, G, F\}$ ,  $\ell_4 = \{C, G, D\}$ ,  $\ell_5 = \{C, F, E\}$ ,  $\ell_6 = \{B, G, E\}$  e  $\ell_7 = \{B, D, F\}$  é uma geometria projetiva. (Verifique se valem todos os postulados.)

Usando apenas estes postulados, resolva os exercícios a seguir.

**Exercício 3:** Mostre que se duas linhas distintas se intersectam, então elas se intersectam em exatamente um ponto.

**Exercício 4:** Mostre que existem pelo menos 6 linhas e 4 planos numa geometria de incidência.

**Exercício 5:** Mostre que existem pelo menos três linhas distintas não concorrentes (isto é, existem retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  distintas e que não contêm um mesmo ponto  $P$ .)

**Exercício 6:** Mostre que dado um ponto  $P$ , existem pelo menos duas linhas distintas contendo  $P$ .

**Exercício 7:** Mostre que se dois pontos distintos  $A$  e  $B$  estão no plano  $\pi$ , então a linha  $r_{AB}$  está toda contida no plano  $\pi$ .

**Exercício 8:** Mostre que, dada a reta  $r$  e o ponto  $P$  que não esteja em  $r$ , existe um único plano  $\pi$ , tal que  $P \cdot I \cdot \pi$  e  $r \cdot I \cdot \pi$ .

## 2.3 Postulados de Ordem

Agora vamos enriquecer um pouco mais nossas geometrias, impondo uma relação de ordem entre pontos de uma mesma linha. Para isto, definimos uma relação ternária entre pontos denotada por  $A - B - C$  e falamos que “o ponto  $B$  está entre os pontos  $A$  e  $C$ ” (ou que  $A$  é oposto a  $C$  em relação a  $B$ ) e deve satisfazer os seguintes postulados.

**Postulado VII:** Se  $A - B - C$ , então  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares e dois a dois distintos. Veja representação gráfica na Figura 2.1.

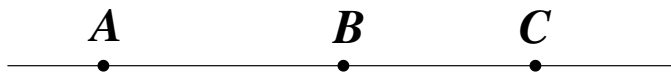


Figura 2.1: Representação gráfica da relação  $A - B - C$ .

Este postulado diz que a relação de ordem implica a colinearidade dos pontos envolvidos e que a ordem é estrita.

**Postulado VIII:** Se  $A - B - C$ , então  $C - B - A$ .

Este diz que a relação de ordem é simétrica.

**Postulado IX:** Dados  $B \neq D$ , existem  $A, C, E \in r_{BD}$  tais que  $A - B - D$ ,  $B - C - D$  e  $B - D - E$ .

Este corresponde ao segundo postulado de Euclides, que todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente. Também diz que a relação de ordem de pontos é *densa*.

**Postulado X:** Dados os ponto  $A$ ,  $B$  e  $C$ , pontos distintos e incidentes a uma mesma reta  $r$ , então exatamente uma das relações  $A - B - C$ , ou  $A - C - B$  ou  $B - A - C$  é verdadeira.

Este diz que a relação de ordem de pontos é total, ou linear, ou seja, não pode haver *ramificações* das retas.

Com essa noção de ordem de pontos em uma reta, podemos definir o **segmento**  $\overline{AB}$  como sendo o conjunto de todos os pontos  $C$  entre  $A$  e  $B$ , incluindo também os **extremos do segmento**, ou seja, os pontos  $A$  e  $B$ .

Dada uma reta  $r$  e um ponto  $O \cdot I \cdot r$ , e também dois pontos  $A \cdot I \cdot r$  e  $B \cdot I \cdot r$ , tais que  $A - O - B$ , podemos também definir as **semi-retas**  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , como sendo os conjuntos  $\overrightarrow{OA} = \{P \cdot I \cdot r: P = O, \text{ ou } P = A \text{ ou } O - P - A, \text{ ou } O - A - P\}$  e  $\overrightarrow{OB} = \{P \cdot I \cdot r: P = O, \text{ ou } P = B \text{ ou } O - P - B, \text{ ou } O - B - P\}$ .

**Exercício 9:** Mostre que, dada uma reta  $r$  e um ponto  $O \cdot I \cdot r$ , e também dois pontos  $A \cdot I \cdot r$  e  $B \cdot I \cdot r$ , tais que  $A - O - B$ , então, para todos os pontos  $D \in \overrightarrow{OA}$  e  $E \in \overrightarrow{OB}$ , então  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$  e  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$ .

**Exercício 10:** Mostre que o segmento  $\overline{AB}$  é a intersecção das semi-retas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BA}$ .

### 2.3.1 O Postulado de Pasch

O postulado de Pasch, que estudaremos presentemente, também é um postulado de ordem. Foi introduzido pelo matemático alemão Moritz Pasch (8/11/1843-20/09/1930), em sua obra *Vorlesungen über Neuere Geometrie* (1882). Ele pode parecer “óbvio”, mas é necessário, como o modelo do plano rasgado vai demonstrar.

**Postulado XI:** (Pasch) Dados os pontos  $A$ ,  $B$ , e  $C$  não colineares e uma linha  $r$  no plano  $\pi_{ABC}$  (isto é,  $r \cdot I \cdot \pi_{ABC}$ ), distinta da reta  $r_{AB}$ , se  $D \in r$  é um ponto tal que  $A - D - B$ , então ou  $r$  intersecta  $\overline{AC}$  ou  $r$  intersecta  $\overline{BC}$  (ou seja, existe um ponto  $P \cdot I \cdot \pi_{ABC}$ , tal que, ou  $P = C$ , ou  $A - P - C$  ou  $B - P - C$ . Veja os diagramas da Figura 2.2.

Esse postulado tem uma implicação importante sobre a *topologia* do plano ou do espaço das geometrias neutra, euclideana e hiperbólica, no sentido que vamos tornar explícito a seguir.

Dizemos que um conjunto  $A$  do espaço é **convexo** se, para todos os pares de pontos  $P$  e  $Q$  em  $A$ , o segmento  $\overline{PQ}$  está todo contido em  $A$ .

**Proposição 1 (Separação nos planos)** Dada uma linha  $r$  contida num plano  $\pi$ , existem conjuntos  $H_1$  e  $H_2$  em  $\pi$  (chamados de lados de  $r$  em  $\pi$ )

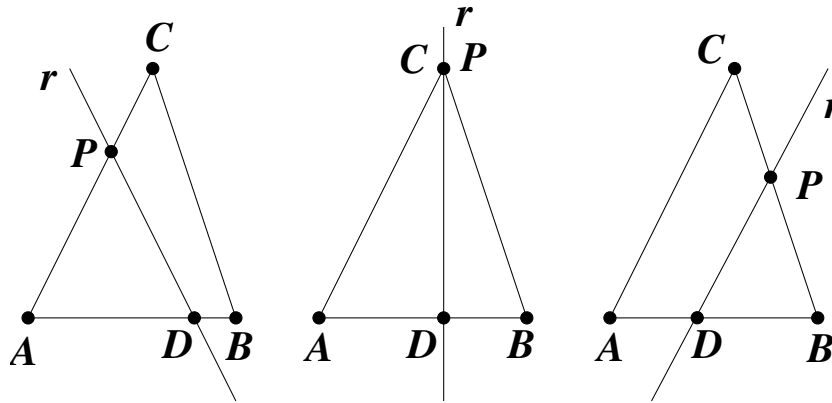


Figura 2.2: Diagrama para o Postulado de Pasch.

tais que  $H_1$  e  $H_2$  são convexos;  $H_1 \cap r = \emptyset$ ,  $H_2 \cap r = \emptyset$  e  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  e cada ponto do plano  $\pi$  está em  $H_1$ , ou em  $H_2$  ou em  $r$ ; se  $P \in H_1$  e  $Q \in H_2$  então o segmento  $\overline{PQ}$  intersecta a linha  $r$  num ponto  $R$ .

**Demonstração:**

Acompanhemos a demonstração com o diagrama da Figura 2.3.

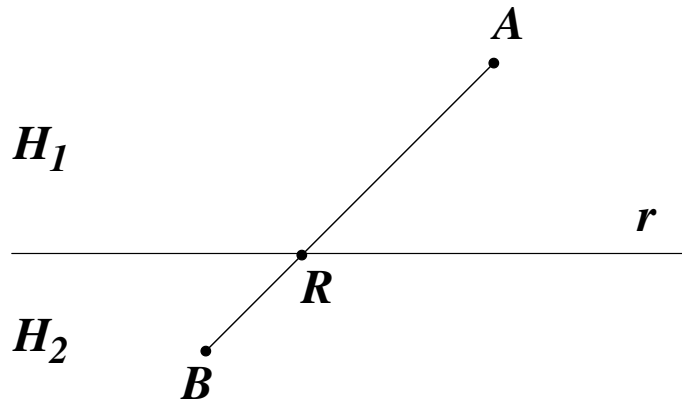


Figura 2.3: Separação de um plano.

Seja  $P \in \pi$  um ponto fora de  $r$  e sejam  $H_1 = \{Q \in \pi : \overline{PQ} \cap r = \emptyset\}$  e  $H_2 = \{Q \in \pi : Q \notin r \text{ e } \overline{PQ} \cap r \neq \emptyset\}$ .

Então  $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap r = H_2 \cap r = \emptyset$ , e todo ponto do plano ou está em  $r$  ou em  $H_1$  ou em  $H_2$ . Falta mostrar que  $H_1$  e  $H_2$  são convexos e que dados  $A \in H_1$  e  $B \in H_2$ , o segmento  $\overline{AB}$  intersecta  $r$ .

Vamos mostrar que  $H_1$  é convexo. Para tanto, sejam  $A, B \in H_1$ ,  $A \neq B$ , e suponhamos que  $A \neq P$  e  $B \neq P$  (os casos em que  $A = P$  ou  $B = P$  ficam para os leitores). Queremos mostrar que todos os pontos de  $\overline{AB}$  estão em  $H_1$ . Se  $A, B$  e  $P$  estão numa mesma linha  $r_{AB}$ , então ou  $A - B - P$  ou  $A - P - B$  ou  $B - A - P$ . Mostre que em nenhum destes casos,  $\overline{AB}$  pode ter ponto nem de  $H_2$  e nem de  $r$ . Se  $A, B$  e  $P$  não são colineares, seja  $D \in \overline{AB}$  tal que  $A - D - B$ . Sabemos que  $r$  não intersecta nem  $\overline{AP}$  e nem  $\overline{BP}$  (por quê?). Se  $D \in r$  então  $r$  intersectaria  $\overline{AB}$ , e por Pasch, deveria intersectar  $\overline{AP}$  ou  $\overline{BP}$ . Portanto  $D \notin r$ . Se  $D \in H_2$ , então  $r$  intersecta  $\overline{DP}$ . Por Pasch, aplicado aos triângulos  $\triangle ADP$  e  $\triangle BDP$ , teríamos que  $r$  intersectaria  $\overline{AP}$  ou  $\overline{BP}$  (por quê?), uma contradição. Portanto, todos os pontos de  $\overline{AB}$  estão em  $H_1$ .

Vamos mostrar agora que  $H_2$  é convexo. Sejam  $A', B' \in H_2$ ,  $A' \neq B'$ . Precisamos mostrar que todos os pontos de  $\overline{A'B'}$  estão em  $H_2$ . Novamente temos dois casos, a saber,  $A', B'$  e  $P$  são colineares. Então ou  $A' - B' - P$  ou  $B' - A' - P$ . (Mostre que não pode ocorrer  $A' - P - B'$ .) Se  $A' - B' - P$ , pela definição de  $H_2$  existe um ponto  $R \in r \cap \overline{B'P}$ , tal que  $B' - R - P$ . Como  $r_{A'B'} = r_{B'P}$ , o único ponto de encontro de  $r$  com  $r_{A'B'}$  é  $R$ . Como  $A' - B' - R$ , os pontos de  $\overline{A'B'}$  estão todos em  $H_2$  (por quê?). Suponhamos agora que  $A', B'$  e  $P$  sejam não colineares. Consideremos o triângulo  $\triangle A'B'P$ . Pela definição de  $H_2$ ,  $r$  intersecta ambos os lados  $\overline{A'P}$ , no ponto  $R$  e  $\overline{B'P}$ , no ponto  $S$ . Vamos mostrar que nenhum ponto de  $\overline{A'B'}$  pode estar em  $r$ . Seja  $T \in \overline{A'B'}$ ,  $A' - T - B'$ . Se  $T \in r$ , podemos ter  $R - S - T$ ,  $R - T - S$  ou  $S - R - T$ . Vamos considerar o caso  $R - S - T$ , deixando os outros dois para os leitores. Consideremos o  $\triangle A'RT$ , com a linha  $r_{B'P}$ ; temos que  $r_{B'P} \neq r_{AT} = r_{A'B'}$  e  $r_{B'P} \neq r_{AR} = r_{A'P}$  (pois  $A', B'$  e  $P$  não são colineares); portanto  $r_{B'P}$  não encontra nem  $\overline{AR}$  e nem  $\overline{AT}$  (por quê?); como encontra  $\overline{RT}$  no ponto  $S$ , temos uma contradição ao postulado de Pasch. Aplicando Pasch aos triângulos  $\triangle A'TP$  e  $\triangle TB'P$ , temos que  $\overline{TP}$  intersecta  $r$  (por quê?) e, portanto  $T \in H_2$ , pela definição de  $H_2$ . Portanto  $H_2$  é convexo.

Agora sejam  $A'' \in H_1$  e  $B'' \in H_2$ . Precisamos mostrar que  $\overline{A''B''}$  intersecta  $r$  num ponto  $R$ . Se  $A'' = P$ , pela definição de  $H_2$ ,  $\overline{A''B''} = \overline{PB''}$  intersecta  $r$ . Se  $A'', B''$  e  $P$  não são colineares, como  $\overline{B''P}$  intersecta  $r$  e  $\overline{A''P}$  não intersecta  $r$  (por quê?), por Pasch no triângulo  $\triangle A''B''P$ ,  $\overline{A''B''}$  intersecta  $r$  num ponto  $R$ , como queríamos. Se  $A'', B''$  e  $P$  são colineares, como  $\overline{B''P}$  intersecta  $r$  (pela definição de  $H_2$ ), seja  $R$  este ponto em comum. Temos que  $B'' - R - P$  e, como  $A'' \in r_{BP}$ ,  $A'' \in H_1$ ,  $A'' \neq P$ ,  $A'' \neq R$  e



$A'' \neq B$ , temos que, ou  $P - R - A''$  (que não pode ocorrer, pois  $A \in H_1$ , que é convexo), ou  $P - A'' - R$ , ou  $A'' - P - R$ , o que implica que  $\overline{A''B''}$  encontra  $r$  em  $R$ , como queríamos.  $\square$

Definimos o **interior de uma semi reta**  $\overrightarrow{AB}$  como o conjunto  $\text{int}(\overrightarrow{AB})$  dos pontos  $P \in \overrightarrow{AB}$  tais que  $P \neq A$  (a semi reta menos o vértice); **interior de um segmento**  $\overline{AB}$  como o conjunto  $\text{int}(\overline{AB})$  dos pontos  $P \in \overline{AB}$  tais que  $P \neq A$  e  $P \neq B$ ; o conjunto que é a união de duas semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , sendo que  $O$ ,  $A$  e  $B$  são três pontos não colineares, é chamado de **ângulo** e o **interior do ângulo**  $\angle AOB$  como o conjunto  $\text{int}(\angle AOB)$  obtido pela interseção  $H_1 \cap \overline{H_1}$ , sendo  $H_1$  o lado de  $r_{OB}$  contendo  $A$  e  $\overline{H_1}$  o lado de  $r_{OA}$  contendo  $B$ . Veja uma representação gráfica de um ângulo  $\angle ABC$  na Figura 2.4.

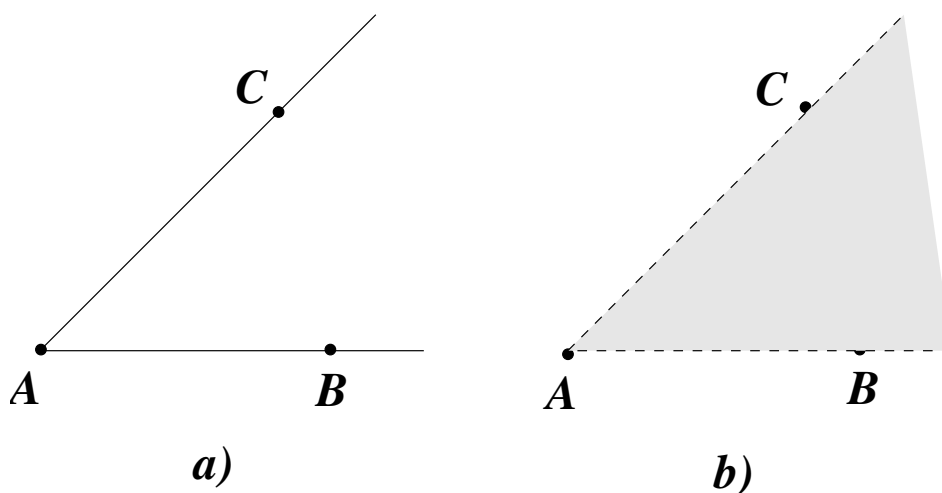


Figura 2.4: Representação gráfica do ângulo  $\angle ABC$  e de seu interior.

**Exercício 11:** (O Teorema das Barras Transversais) Mostre que, se  $P \in \text{int}(\angle ABC)$  então  $\overrightarrow{BP}$  intersecta  $\overline{AC}$  num único ponto  $F$  com  $A - F - C$ . Veja a figura 2.5.

**Proposição 2 (Separação do espaço)** Dada um plano  $\pi$ , existem conjuntos  $G_1$  e  $G_2$  (chamados de lados de  $\pi$ ) tais que  $G_1$  e  $G_2$  são convexos;  $G_1 \cap \pi = \emptyset$ ,  $G_2 \cap \pi = \emptyset$  e  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  e cada ponto do espaço está em  $G_1$ , ou em  $G_2$  ou em  $\pi$ ; se  $P \in G_1$  e  $Q \in G_2$  então o segmento  $\overline{PQ}$  intersecta o plano  $\pi$  num ponto  $R$ .

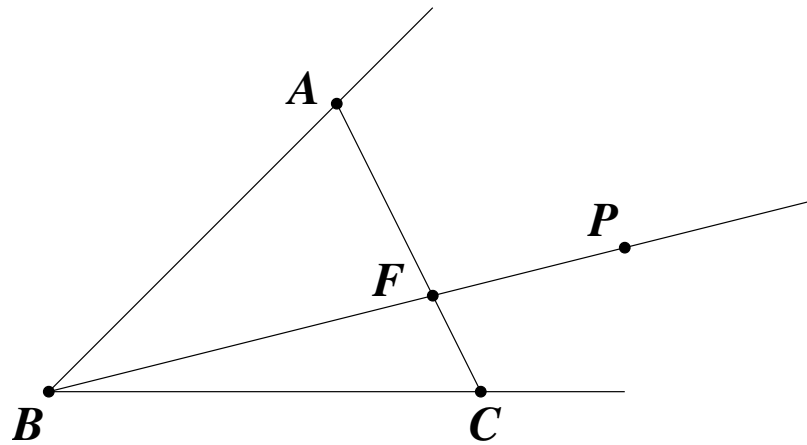


Figura 2.5: Teorema das Barras Transversais.

**Demonstração:** Veja a figura 2.6.

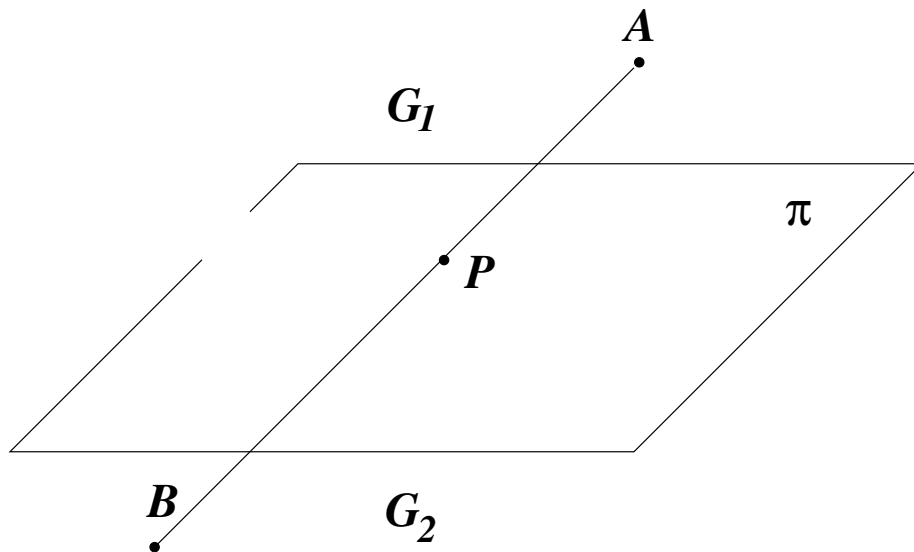


Figura 2.6: Separação do espaço.

Seja  $P$  um ponto fora de  $\pi$  e sejam  $G_1 = \{Q : \overline{PQ} \cap \pi = \emptyset\}$  e  $G_2 = \{Q : Q \notin \pi \text{ e } \overline{PQ} \cap \pi \neq \emptyset\}$ .

Para provarmos que  $G_1$  é convexo, sejam  $A$  e  $B$  pontos de  $G_1$ . considere o plano  $\alpha = PAB$  (ou um plano  $\alpha$  contendo  $P$ ,  $A$  e  $B$ , caso sejam colineares). Se  $\alpha \cap \pi = \emptyset$ , como um plano é convexo, então  $\overline{AB} \subset \alpha \subset G_1$  (por que?).

Caso  $\alpha \cap \pi \neq \emptyset$ , sejam  $H_1$  e  $H_2$  os lados da linha  $\alpha \cap \pi$  no plano  $\alpha$ . Então  $H_1 = G_1 \cap \alpha$  ou  $H_2 = G_1 \cap \alpha$  (por que?). Portanto  $\overline{AB} \subset G_1$  (por que?).

O mesmo tipo de argumento mostra que  $G_2$  também é convexo e as demais afirmações. Os leitores são convidados a preencher os detalhes.  $\square$

## 2.4 Postulados de Congruência

Agora introduzimos uma noção de medida de comprimento na geometria, pela noção de congruência de segmentos, que é a relação  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  entre segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , cujas propriedades são descritas pelos postulados a seguir.

**Postulado XII:** Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$  e uma semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ , existe um único ponto  $C \in \overrightarrow{AB}$  tal que  $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$ .

Este postulado diz que o plano ou o espaço é homogêneo, no sentido que ele se comporta do mesmo modo em qualquer parte.

**Postulado XIII:** Dados  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , temos  $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$  e, se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ , então  $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ .

Essa é uma relação de equivalência.

**Postulado XIV:** Se  $A - B - C$ ,  $P - Q - R$ ,  $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$ , então  $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$ .

Dados três pontos não colineares  $A, B$  e  $C$ , lembramos que o ângulo  $\angle ABC$  é o conjunto  $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ . O ponto  $B$  é o vértice do ângulo.

**Exercício 12:** Mostre que se  $O, A$  e  $B$  forem três pontos não colineares, e  $D$  for um ponto de  $\overrightarrow{OA}$ , com  $D \neq O$ , e  $E$  um ponto de  $\overrightarrow{OB}$ , com  $E \neq O$ , então  $\angle AOB = \angle DOE$ .

Primeiro postulamos a construção de ângulos e iniciamos a postulação da relação de congruência entre ângulos, denotada  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e representada graficamente na Figura 2.7.

**Postulado XV:** Dados o ângulo  $\angle AOB$ , uma semi-reta  $\overrightarrow{PQ}$  e um dos lados  $H_1$  de  $r_{PQ}$  num plano contendo  $r_{PQ}$ , existe uma única semi-reta  $\overrightarrow{PR}$  tal que  $R \in H_1$  e  $\angle AOB \equiv \angle RPQ$ .

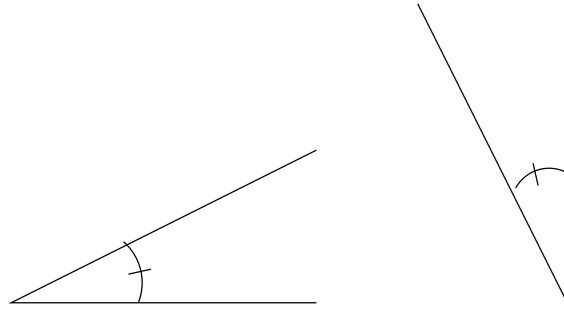


Figura 2.7: Representação gráfica da congruência de dois ângulos.

Agora comparamos ângulos.

**Postulado XVI:** Dados os ângulos  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$  e  $\angle GHI$ , temos  $\angle ABC \equiv \angle ABC$  e, se  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ABC \equiv \angle GHI$ , então  $\angle DEF \equiv \angle GHI$ .

Dadas duas triplas ordenadas de pontos não colineares  $(A, B, C)$  e  $(D, E, F)$ , dizemos que a correspondência  $A \mapsto D, B \mapsto E, C \mapsto F$  é uma congruência de triângulos entre  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  (aqui a ordem em que aparecem os pontos é importante – veja a Figura 2.8), se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ ,  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ ,  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ACB \equiv \angle DFE$ . Denotamos este conceito por  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  e insistimos que dizer  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  é diferente de dizer  $\triangle ACB \equiv \triangle DEF$ .

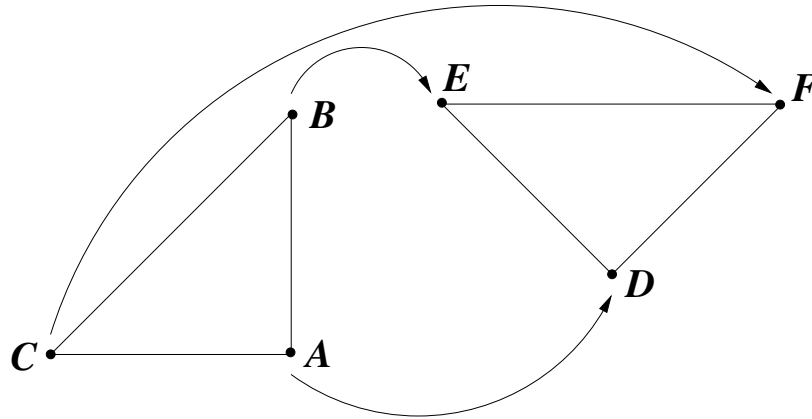


Figura 2.8: Congruência de triângulos.

O próximo postulado é o critério Lado-Ângulo-Lado (LAL) de congruência

de triângulos, que relaciona congruência de segmentos com congruência de ângulos de um modo muito particular.

No Livro I dos Elementos de Euclides, este enunciado é a Proposição IV. Sua demonstração depende de um postulado não enunciado de que duas circunferências cuja soma dos raios é menor que a distância entre os centros encontram-se em dois pontos. Ou, como é usado neste livro, dado um triângulo  $\triangle ABC$  e um segmento  $\overline{DE} \equiv \overline{AB}$ , então existe um ponto  $F$  tal que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Postulado XVII: (LAL)** Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

Veremos mais adiante que os conhecidos critérios de congruência de triângulos, o LLL (Lado-Lado-Lado), ALA (Ângulo-Lado-Ângulo) e LAAo (Lado-Ângulo-Ângulo oposto) também são válidos (na geometria neutra).

### 2.4.1 Ângulos retos

Uma família de ângulos muito importante em geometria são os **ângulos retos**. O ângulo  $\angle AOB$  é reto se, dado o ponto  $C$ , tal que  $C - O - A$ , então  $\angle AOB \equiv \angle COB$ .

**Proposição 3** *Existem ângulos retos.*

**Demonstração:** Num plano  $\pi$ , escolhamos uma reta  $r$ , dois pontos distintos  $A \cdot I \cdot r$  e  $O \cdot I \cdot r$ , e mais dois pontos  $B$  e  $B'$  em lados opostos de  $\pi$  em relação a  $r$ , e tais que  $\angle AOB \equiv \angle AOB'$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$ . Veja o diagrama da figura 2.9.

Seja  $C \cdot I \cdot r$ , tal que  $C \cdot I \cdot r_{BB'}$ . Por LAL,  $\angle ACB \equiv \angle ACB'$ , que é, portanto, um ângulo reto.  $\square$

**Exercício 13:** Aponte quais postulados foram usados em cada passagem dessa demonstração.

No caso da demonstração, dizemos que as retas  $r = r_{AC}$  e  $r_{BB'}$  são **perpendiculares** e que o ponto  $C$  é o **pé da perpendicular**, e denotamos  $r_{AC} \perp r_{BB'}$ .

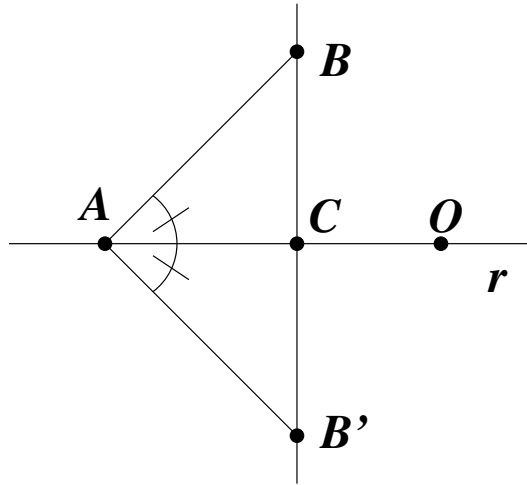


Figura 2.9: Existência de ângulos retos.

### 2.4.2 Comparação de ângulos

Dados o ângulo  $\angle AOB$  e um ponto  $C$  no interior de  $\angle AOB$ , dizemos que o ângulo  $\angle AOC$  é menor do que o ângulo  $\angle AOB$  e denotamos  $\angle AOC < \angle AOB$ .

Mais geralmente, dizemos que o ângulo  $\angle A'O'C'$  é menor do que o ângulo  $\angle AOB$ , se existir um ponto  $C$  no interior do ângulo  $\angle AOB$ , tal que  $\angle A'O'C' \equiv \angle AOC$ , e denotamos tal fato por  $\angle A'O'C' < \angle AOB$ . A notação  $\angle CPD \leq \angle AOB$  significa que, ou  $\angle CPD < \angle AOB$ , ou  $\angle CPD \equiv \angle AOB$ .

Um **ângulo agudo** é um ângulo menor do que um ângulo reto e um **ângulo obtuso** é um ângulo maior do que um ângulo reto.

**Exercício 14:** Mostre que  $\angle AOB \leq \angle AOB$ , e que, se  $\angle AOB \leq \angle CPD$  e  $\angle CPD \leq \angle EQF$ , então  $\angle AOB \leq \angle EQF$ .

## 2.5 Postulados de Completitude

Um dos postulados não mencionados na obra de Euclides aparece já em sua primeira proposição: construir um triângulo equilátero. Sua demonstração é simples, usada em qualquer curso de desenho: dado um segmento  $\overline{AB}$  (um

dos lados do triângulo equilátero a ser construído), posicionamos a ponta seca do compasso em  $A$ , com abertura até  $B$  e traçamos uma circunferência de centro em  $A$ ; fazemos o mesmo com a ponta seca em  $B$  e abertura até  $A$  e traçamos outra circunferência; *cada um dos pontos de encontro das duas circunferências determina o terceiro vértice do triângulo equilátero desejado*. Acompanhe a construção no diagrama da Figura 2.10.

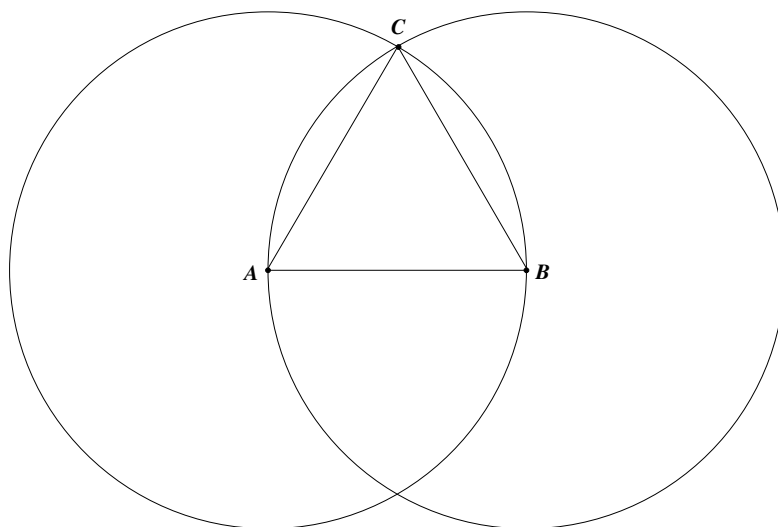


Figura 2.10: Euclides, *Elementos*, Livro I, Proposição 1: a construção de um triângulo equilátero.

Uma suposição intuitivamente “*óbvia*” nessa argumentação é que as duas circunferência realmente se encontram. No entanto, hoje em dia sabemos que essa suposição não é óbvia e nem derivável dos outros postulados.

**Exemplo 9: A Geometria Analítica Racional (Plana):** O objetivo deste exercício é demonstrar que essa suposição pode até ser falsa. O plano aqui é o conjunto  $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$ , os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , cujas coordenadas são racionais. Tomando  $A = (0, 0)$  e  $B = (0, 1)$ , então os pontos de encontro das circunferências de raio 1 e centros  $A$  e  $B$  são  $C = (1/2, \sqrt{3}/2)$  e  $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ , que não têm todas as suas coordenadas racionais e, portanto, não fazem parte do plano.

**Exercício 15:** Verifique que valem todos os outros postulados de geometria plana na Geometria Analítica Plana Racional.

Assim, precisamos de um postulado que garanta que tais construções funcionem.

O postulado de completitude que adotaremos é uma imitação da completitude (Dedekind) de  $\mathbb{R}$ , que passamos a explicar.

O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais é Dedekind<sup>2</sup> completo, que é a seguinte: dados dois subconjuntos não vazios  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , tais que, para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , vale a desigualdade  $x < y$  (resumidamente,  $X < Y$ ), então existe um elemento  $r \in \mathbb{R}$ , tal que, para todo  $x \in X$  e  $y \in Y$ , temos que  $x \leq r \leq y$ . Essa propriedade é básica no estudo de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ . Só para comparar, o conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  não tem essa propriedade: se  $X = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$  e  $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y > \sqrt{2}\}$ , então o único número real que poderia ficar entre  $X$  e  $Y$  é  $\sqrt{2}$ , que não está em  $\mathbb{Q}$ .

Imitando essa descrição em termos de pontos e retas, postulamos:

**Postulado XVIII: (Completitude de Dedekind)** Dada uma linha  $r$ , suponha que  $X$  e  $Y$  são conjuntos não vazios de pontos de  $r$ , tais que  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $X \cup Y = r$ , e para todos os pontos  $A, B, C \in r$ , se  $A - B - C$  e  $A, C \in X$  então  $B \in X$  e se  $A - B - C$  e  $A, C \in Y$ , então  $B \in Y$ . Então, neste caso, existe um ponto  $O \in r$  e semi-retas opostas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , tais que  $A - O - B$ ,  $\text{int}(\overrightarrow{OA}) \subset X$ ,  $\text{int}(\overrightarrow{OB}) \subset Y$  e  $O \in X$  ou  $O \in Y$ .

Este postulado tem muitas conseqüências importantes. Vamos começar com a propriedade de “*arquimedianeidade*”.

**Proposição 4** Toda linha é arquimediana, ou seja, para qualquer conjunto de pontos  $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$  tais que  $\overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_{n+1}}$  (para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ), de uma linha  $r$ , e para todo ponto  $P \in r$ , existe algum  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que  $P \in \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ .

**Demonstração:** Sejam

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overrightarrow{A_nA_{n-1}} \text{ (união de semi-retas),}$$

$$Y = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \overrightarrow{A_nA_{n+1}} \text{ (intersecção das semi-retas opostas).}$$

---

<sup>2</sup>Richard Dedekind, matemático alemão que introduziu esse conceito.



Observe que  $X \cap Y = \emptyset$  e  $X \cup Y = r$  (por que?). Agora suponha que  $A, C \in X$  e  $A - B - C$ . Então existe alguma semi-reta  $\overrightarrow{A_n A_{n-1}}$  tal que  $A, C \in \overrightarrow{A_n A_{n-1}}$ . Portanto  $B \in \overrightarrow{A_n A_{n-1}}$  (por que?), ou seja,  $B \in X$ . De modo similar, mostramos que se  $A, C \in Y$  e  $A - B - C$ , então  $B \in Y$  (fa ca isto).

Suponha que  $Y \neq \emptyset$ . Pelo postulado da continuidade, existe um ponto  $O \in r$  e semi-retas opostas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , tais que o interior de  $\overrightarrow{OA}$  está contido em  $X$  e o interior de  $\overrightarrow{OB}$  está contido em  $Y$  e  $O \in X$  ou  $O \in Y$ . Se  $O \in X$ , existe uma semi-reta  $\overrightarrow{A_n A_{n-1}}$  contendo  $O$ . Mas daí,  $A_{n+1} - O - A$ , contrário ao fato que interior de  $\overrightarrow{OA}$  está contido em  $X$  e o interior de  $\overrightarrow{OB}$  está contido em  $Y$ . Se  $O \in Y$ , seja  $C \in r$  tal que  $A_0 - C - O$  e  $\overrightarrow{CO} \equiv \overrightarrow{A_0 A_1}$ . Como  $A_0 - C - O$ ,  $C$  está na semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  e  $C \neq O$ . Portanto  $C$  está no interior desta semi-reta, o que implica que  $C \in X$ . Portanto existe uma semi-reta  $\overrightarrow{A_n A_{n-1}}$  contendo  $C$ . Como  $\overrightarrow{A_n A_{n-1}} \equiv \overrightarrow{A_{n+1} A_n} \equiv \overrightarrow{A_0 A_1} \equiv \overrightarrow{CO}$ , o ponto  $O$  estaria em  $\overrightarrow{A_{n+1} A_n}$ , contrário à hipótese de que  $O \in Y$  (lembre-se de que  $X \cap Y = \emptyset$ ).

Portanto  $Y$  tem que ser vazio, ou seja para todo ponto  $P \in r$ , existe algum  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que  $P \in \overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ .  $\square$

### 2.5.1 Razão de segmentos

Um conceito importante que a completitude traz é a noção de **razão de segmentos**, que passamos a definir.

Dizemos que o segmento  $\overline{AB}$  é menor do que o segmento  $\overline{CD}$  se houver um ponto  $F$ , tal que  $A - B - F$  e  $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$ , e denotamos tal fato por  $\overline{AB} < \overline{CD}$ . Escreveremos  $\overline{AB} \leq \overline{CD}$  se  $\overline{AB} < \overline{CD}$  ou  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ .

Observe-se que, se  $A - B - C$ , então  $\overline{AC} < \overline{CB}$ .

Dizemos que o segmento  $\overline{PQ}$  é uma soma dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  se existir um ponto  $R$ , tal que  $P - R - Q$  e uma das duas condições abaixo valer:

1.  $\overline{AB} \equiv \overline{PR}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{RQ}$ ; ou
2.  $\overline{AB} \equiv \overline{QR}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{RP}$ .

Neste caso denotaremos o segmento  $\overline{PQ}$  como  $\overline{AB} + \overline{CD}$ . Observe que isto não é uma função, no sentido em que o segmento  $\overline{PQ}$  não é univocamente determinado. Mas isso não será problema.

Definiremos agora a **multiplicação de segmentos por um número inteiro**. Se  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , definimos a notação  $n \cdot \overline{AB}$  por recursão em  $n$ :

1.  $1 \cdot \overline{AB} = \overline{AB}$ ;
2.  $(n + 1) \cdot \overline{AB} = n \cdot \overline{AB} + \overline{AB}$ .

Ou seja,  $n \cdot \overline{AB}$  é o segmento obtido pela soma de  $\overline{AB}$  com ele mesmo  $n$  vezes (ou melhor, são todos os segmentos que representam tal soma).

**Proposição 5** *Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , existe um único ponto  $E$  no segmento  $\overline{AB}$ , tal que  $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ , isto é, existe o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .*

**Demonstração:** Escolhemos um plano qualquer  $\pi$ , tal que  $A \cdot I \cdot \pi$  e  $B \cdot I \cdot \pi$ . Então a reta  $r_{AB}$  também incide em  $\pi$ , e separa o plano em dois lados  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Escolha um ponto  $C \cdot I \cdot \pi$ , no lado  $\eta_1$  e outro ponto  $D$  no lado oposto ( $\eta_2$ ), de modo que  $\angle CAB \equiv \angle DBA$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ . Por LAL,  $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ . Pela Proposição das Barras Transversais, o segmento  $\overline{CD}$  intersecta o segmento  $\overline{AB}$  em um ponto  $E$ , tal que  $A - E - B$ . Usando novamente LAL, concluímos que  $\triangle AEC \equiv \triangle BED$ . Isto quer dizer que  $E$  é o ponto médio desejado.  $\square$

Na verdade, podemos definir a notação  $\overline{AE} = (1/2) \cdot \overline{AB}$ . Podemos fazer o mesmo com qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ .

Primeiramente observemos que:

**Exercício 16:** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , e dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , existe um ponto  $C$ , tal que  $n \cdot \overline{AC} < \overline{AB}$ . Verifique esta afirmação, com a sugestão de escolher  $k \in \mathbb{N}$ , tal que  $2^k > n$  e iterando  $k$  vezes a obtenção do ponto médio de um segmento.

**Proposição 6** *Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , e dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , existe um único ponto  $C$  no segmento  $\overline{AB}$ , tal que  $\overline{AB} = n \cdot \overline{AC}$ . Podemos*

denotar o segmento<sup>3</sup>  $\overline{AC}$  como  $(1/n) \cdot \overline{AB}$ .

**Demonstração:** Se  $n = 1$ , então  $C = B$ .

Suponhamos que  $n > 1$  e definimos  $X = \{P \in \overline{AB}: P = A, \text{ ou } P - A - B, \text{ ou } n \cdot \overline{AP} < \overline{AB}\}$  e  $Y = \{Q \in \overline{AB}: Q = B, \text{ ou } A - B - Q, \text{ ou } \overline{AB} < n \cdot \overline{AQ}\}$ .

É fácil ver que esses conjuntos satisfazem as hipóteses do postulado da completitude. Claramente  $X$  e  $Y$  não são vazios e, pela propriedade de arquimedianeidade, os conjuntos  $X$  e  $Y$  satisfazem as demais hipóteses.

Portanto, existe um ponto  $C$ , tal que  $P - C - Q$ , para todo  $P \in X$  e todo  $Q \in Y$ . Verifiquemos que este ponto  $C$  resolve a proposição.

Claramente, temos que  $A - C - B$ . Portanto, vale uma, e somente uma, das possibilidades:  $n \cdot \overline{AC} < \overline{AB}$ , ou  $n \cdot \overline{AC} = \overline{AB}$ , ou  $\overline{AB} < n \cdot \overline{AC}$ . Temos que descartar a primeira e a última.

Trataremos apenas da primeira, deixando a última possibilidade como exercício.

Suponha que  $P \in X$  seja tal que  $A - P - B$ , e seja  $T$ , tal que  $A - T - B$  e  $\overline{AT} = n \cdot \overline{AP}$ . Seja  $W$  um ponto, tal que  $P - W - B$  e  $n \cdot \overline{PW} < \overline{TB}$ . Então  $n \cdot \overline{AW} < \overline{AB}$  e, portanto  $W \in X$ . Isso quer dizer que  $C \notin X$ .

Como  $C \notin Y$  (exercício!), a única possibilidade que sobrou é que  $n \cdot \overline{AC} = \overline{AB}$ , como queríamos.  $\square$

Agora, se  $\lambda = m/n \in \mathbb{Q}$  for um número racional, podemos definir  $\lambda \cdot \overline{AB} = m \cdot ((1/n) \cdot \overline{AB})$ .

**Exercício 17:** Mostre que,  $\lambda = m/n \in \mathbb{Q}$  for um número racional, também vale a igualdade  $\lambda \cdot \overline{AB} = (1/n) \cdot (m \cdot \overline{AB})$ . Observe que o primeiro membro da igualdade é o que foi definido acima.

Usando a ideia de limite (ou aproximações sucessivas), podemos agora definir a multiplicação de um segmento  $\overline{AB}$  por um número real  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Qualquer número real  $\lambda > 0$  pode ser escrito em expansão decimal,  $\lambda = a_0, a_1 a_2 \dots$ , com  $a_0 \in \mathbb{N}$  e  $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , para  $i \geq 1$ ,

<sup>3</sup>Os leitores desavisados podem sentir a tentação de realizar uma construção simples, envolvendo a noção de semelhança de triângulos. No entanto, veremos mais adiante que essa noção é, na verdade, equivalente ao quinto postulado de Euclides, que não pode ser usado ainda.

significando que

$$\lambda = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{10^k}.$$

Vamos chamar o número (necessariamente racional)  $\lambda_N = a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{10^k}$ , que é o *truncamento* de  $\lambda$  até a  $N$ -ésima casa decimal.

Transportando essa ideia para a geometria, definimos a **multiplicação de segmento por número real**. Definimos o segmento  $\lambda \overline{AB}$  (com  $A$  e  $B$  dois pontos distintos) como sendo o segmento  $\overline{AC}$  assim determinado: seja  $X = \{P \cdot I \cdot r_{AB} : \text{ou } P - A - B, \text{ ou } P = A \text{ ou, para algum } N \in \mathbb{N}, \overline{AP} < \lambda_N \cdot \overline{AB}\}$  e  $Y = \{P \cdot I \cdot r_{AB} : \text{para qualquer } N \in \mathbb{N}, \lambda_N \cdot \overline{AB} < \overline{AP}\}$ . Certamente o par de subconjuntos de  $r_{AB}$ ,  $X$  e  $Y$ , satisfazem as hipóteses do Postulado da Completitude de Dedekind e, portanto, existe um ponto  $C$ , tal que, para todos os pontos  $P \in X$  e  $Q \in Y$ , vale a relação  $P - C - Q$ . Ainda mais:

**Exercício 18:** Mostre que se  $D \cdot I \cdot r_{AB}$  e para todos os pontos  $P \in X$  e  $Q \in Y$ , valer a relação  $P - D - Q$ , então  $D$  e  $C$  coincidem.

**Exercício 19:** Mostre que se  $\lambda = m/n \in \mathbb{Q}$ ,  $\lambda > 0$ , então essa última definição produz o mesmo segmento  $\lambda \cdot \overline{AB}$  que a multiplicação de segmentos por número racional.

Por fim, definimos a razão de segmentos  $\overline{AB} \div \overline{CD}$  (em que  $A \neq B$  e  $C \neq D$ ) como sendo o número real (positivo)  $\lambda$ , tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ .

O Postulado XII<sup>4</sup> garante que sempre existe essa razão de segmentos:

**Proposição 7** *Dados os quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$ , tais que  $A \neq B$  e  $C \neq D$ , então existe um único número real positivo  $\lambda$ , tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ .*

**Demonstração:** O Postulado XII permite-nos obter um ponto  $E \in \overline{AB}$ , tal que  $\overline{AE} \equiv \overline{CD}$ . Seja  $\lambda = \overline{AB} \div \overline{AE}$ .  $\square$

<sup>4</sup>Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$  e uma semi-reta  $\overline{AB}$ , existe um único ponto  $C \in \overline{AB}$  tal que  $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$ .

## 2.5.2 Introdução de coordenadas

A noção de razão de segmentos pode ser usada para *algebrizar* a geometria, introduzindo coordenadas, da seguinte maneira.

### Régua Graduada

**Proposição 8 (Régua Graduada)** *Para cada linha  $r$ , existe (pelo menos) uma função bijetora  $f_r : r \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $A - B - C$  se, e somente se,  $f_r(B)$  está entre  $f_r(A)$  e  $f_r(C)$ , na ordem de  $\mathbb{R}$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  se, e somente se,  $|f_{AB}(B) - f_{AB}(A)| = |f_{CD}(D) - f_{CD}(C)|$ , sendo  $f_{AB}$  uma função para  $r_{AB}$  e  $f_{CD}$  uma função para  $r_{CD}$ . (Uma tal função  $f_r$  é chamada de sistema de coordenadas (ou régua graduada) da linha  $r$ .)*

**Demonstração:** Seja  $r$  uma régua, e  $O \cdot I \cdot r$  um ponto qualquer. Escolhemos outro ponto  $P \cdot I \cdot R$ , distinto de  $O$ . Definimos  $f_r : r \rightarrow \mathbb{R}$  por:

1.  $f_r(O) = 0$ ;
2. se  $Q \in \overrightarrow{OP}$ , e  $Q \neq O$ ,  $f_r(Q) = \overline{OQ} \div \overline{OP}$ ;
3. se  $Q \cdot I \cdot R$  e  $Q - O - P$ ,  $f_r(Q) = -\overline{OQ} \div \overline{OP}$ .

Observemos que  $f_r(P) = 1$ , fixando-se, assim, uma unidade de medida.

Para qualquer outra reta  $s$ , escolhemos um par de pontos  $O'$  e  $P'$  em  $s$ , tais que  $\overline{OP} \equiv \overline{O'P'}$  e definimos  $f_s$  do mesmo modo que  $f_r$ , normalizando  $f_s(O') = 0$  e  $f_s(P') = 1$ .

Certamente essas régua satisfazem as condições desta Prposição.  $\square$

### Transferidores

Podemos também introduzir medida de ângulos, de modo a preservar os postulados de congruência. A ideia é similar ao que fizemos com as retas, mas apresnta algumas diferenças essenciais.

Dizemos que o ângulo  $\angle AOB$  é a soma dos ângulos  $\angle CPD$  e  $\angle EQF$  se existir um ponto  $G$  no interior do ângulo  $\angle AOB$ , tal que  $\angle AOG \equiv \angle CPD$  e  $\angle GOB \equiv \angle EQF$ . Denotamos tal fato por  $\angle AOB = \angle CPD + \angle EQF$

Observemos que nem todo par de ângulos podem ser somados. Por exemplo, se os ângulos  $\angle CPD$  e  $\angle EQF$  forem retos, não existe um ângulo<sup>5</sup> que seja sua soma.

**Exercício 20:** Mostre que todo ângulo obtuso é a soma de um ângulo reto com um ângulo agudo.

Podemos multiplicar ângulos por alguns números reais, começando pelos números racionais:

Definimos a multiplicação de um ângulo por  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\angle AOB = n \cdot \angle CPD$ , por recursão:

1.  $n = 1$ :  $\angle AOB = 1 \cdot \angle CPD$  se, e somente se,  $\angle AOB \equiv \angle CPD$ ;
2.  $n \mapsto n + 1$ :  $\angle AOB = (n + 1) \cdot \angle CPD$  se  $\angle AOB = n \cdot \angle CPD + \angle CPD$ .

Definimos, neste caso,  $\angle CPD = (1/n) \cdot \angle AOB$ .

Para  $r = m/n \in \mathbb{Q}$ , um número racional (positivo), definimos  $\angle AOB = (m/n) \cdot \angle CPD = m \cdot ((1/n) \cdot \angle CPD)$ .

Para definirmos a multiplicação de  $\angle CPD$  por um número real  $\lambda > 0$ , procedemos de modo similar ao caso de multiplicação de segmentos por  $\lambda$ .

Começemos com o caso em que  $0 < \lambda < 1$ . Escrevemos, novamente,  $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$  (aqui  $a_0 = 0$ ) e seus truncamentos  $\lambda_N = a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{10^k}$ .

**Proposição 9** *Dados um ângulo  $\angle AOB$  e um número real  $\lambda$ , tal que  $0 < \lambda < 1$ , então existe um único ponto  $C$ , tal que  $A - C - B$  e, para todos os pontos  $P$  e  $Q$ , tais que  $A - P - C - Q - B$ , vale que:*

1. *existe  $N \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , tal que  $\angle AOP < \lambda_N \cdot \angle AOB$ ;*
2. *para todo  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > 0$ ,  $\lambda_N \cdot \angle AOB < \angle AOQ$ .*

**Demonstração:** Novamente, uma aplicação do Postulado da Completude, e fica como exercício. □

---

<sup>5</sup>Com a definição que estamos usando: a figura composta por duas semi-retas distintas e não colineares  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

Podemos, neste caso, definir a multiplicação do ângulo  $\angle AOB$  pelo número real  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) como sendo qualquer ângulo congruente ao ângulo  $\angle AOC$  da proposição. Definimos a razão entre os ângulos  $\angle AOC$  e  $\angle AOB$  como sendo esse número  $\lambda$  e denotamos  $\lambda = \angle AOC \div \angle AOB$ .

Isto já é suficiente para introduzir a noção de medida de ângulos, ou seja, de transferidores.

**Proposição 10 (Transferidores)** *Existe uma função que associa a cada ângulo uma medida entre 0 e 180 (medida em graus), tal que ângulos congruentes têm mesma medida, ângulos retos medem 90, e se  $\angle CPD = \angle AOB + \angle EQF$ , então  $m(\angle CPD) = m(\angle AOB) + m(\angle EQF)$ .*

**Demonstração:** Vamos chamar de  $m$  a função desejada.

Associamos primeiramente a todos os ângulos retos o número real 90 (*medida em graus*).

Seja  $\angle AOB$  um ângulo reto. Então  $m(\angle AOB) = 90$ .

Para todo ângulo agudo  $\angle CPD$ , seja  $\lambda = \angle CPD \div \angle AOB$ . Associamos ao ângulo  $\angle CPD$  a medida  $m(\angle CPD) = 90\lambda$ .

Para todo ângulo obtuso  $\angle CPD$ , escrevemos  $\angle CPD = \angle AOB + \angle AOC$ , com  $\angle AOB$  reto e  $\angle AOC$  agudo. Definimos  $m(\angle CPD) = 90 + m(\angle AOC)$ .

Agora fica fácil mostrar que se  $\angle CPD = \angle AOB + \angle EQF$ , então vale a igualdade  $m(\angle CPD) = m(\angle AOB) + m(\angle EQF)$ . (Exercício.)  $\square$

Uma **Geometria Métrica** é uma geometria com régua graduada e um transferidor, ou seja, em que fizemos a escolha de uma régua para cada linha e uma medida de ângulos.

O próximo capítulo tratará da Geometria Métrica Neutra, postulando a existência das réguas e transferidores.

### 2.5.3 Outras noções de completitude

Como já observamos anteriormente, na obra de Euclides aparece implicitamente em sua primeira proposição, de como construir um triângulo equilátero, que o par de circunferências, uma de centro  $A$  e abertura (ou raio)  $\overline{AB}$ , e outra de centro  $B$  e mesma abertura, encontram-se em pelo menos um ponto.

Uma grande parte dos *Elementos* de Euclides desenvolve as chamadas construções com régua e compasso. Para justificar essas construções, não é necessário todo o poder contido no Postulado de Completitude de Dedekind, mas um bem mais fraco:

**Postulado de Completitude Euclideano:** Dados quatro pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$ , incidentes a um plano  $\Pi$ , e tais que  $A- / = B-C- / = D$  (isto é  $A-B-C$  e  $B-C-D$ , ou  $A-B-D$  e  $C=D$ , ou  $A-C-D$  e  $A=B$ , ou ainda  $A=B$  e  $C=D$ ), então existe um ponto  $E \cdot I \cdot \pi$ , tal que  $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$  e  $\overline{DE} \equiv \overline{BD}$ .

Falando de outro modo, a circunferência de centro  $A$  e raio  $\overline{AC}$  tem um ponto em comum com a circunferência de centro  $D$  e raio  $\overline{BD}$ . Observe que qualquer segmento que represente a soma de segmentos  $\overline{AC} + \overline{BD}$  é maior do que o segmento  $\overline{AB}$ .

Uma leitura cuidadosa do Primeiro Livro dos *Elementos* de Euclides mostra que esse postulado é suficiente para justificar as construções em que se deve apelar para um postulado de completitude.

**Exemplo 10:** Para verificarmos que esse postulado é realmente mais fraco do que o Postulado de Completitude de Dedekind, consideremos o conjunto  $\mathbb{R}((X))$  das séries formais na variável  $X$  e com potências racionais, ou seja, expressões da forma

$$f(X) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k X^{k/L},$$

com  $L, N \in \mathbb{N}$  fixos, e cada  $a_k \in \mathbb{R}$ , ordenado da seguinte maneira: se  $f(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} a_k X^{k/L}$  e  $a_{-M} < 0$ , então  $f(X) < 0$ ; se  $a_{-M} > 0$ , então  $f(X) > 0$ ; mais geralmente, se  $f(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} a_k X^{k/L}$  e  $g(X) = \sum_{k=-N}^{\infty} b_k X^{k/L'}$  (podemos trocar os denominadores  $L$  e  $L'$  e acrescentar coeficientes nulos, se necessário, e ficar com expressões para  $f$  e  $g$  com um mesmo denominador,  $L$  nos expoentes de  $X$ ), então  $f(X) < g(X)$  se, e somente se  $g(X) - f(X) > 0$ . Aqui, essa diferença é feita por monômios,  $(b_k - a_k)X^{k/L}$ , considerando a possibilidade de alguns dos coeficientes ser zero.

Por exemplo  $0 < X < 1/n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ; daí,  $X^{-1} = 1/X > n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;  $X^{1/2} < X$ , etc.

A soma e produto de tais séries é feita formalmente, de modo análogo à soma e ao produto de polinômios (observe que, no produto de  $f(X)$  com



$g(X)$ , escrevendo  $M = N$ , completando com coeficientes nulos se necessário, cada monômio  $X^{k/L}$  terá como coeficiente a soma  $\sum_{j=-M}^{k+M} a_j b_{k-j}$ ; veja a ilustração na Tabela 2.1).

$$\frac{\begin{array}{l} a_{-M}X^{-M/L} + a_{(-M+1)}X^{(-M+1)/L} + \dots \\ b_{-M}X^{-M/L} + b_{(-M+1)}X^{(-M+1)/L} + \dots \end{array}}{a_{-M}b_{-M}X^{-2M/L} + (a_{(-M+1)}b_{-M} + b_{(-M+1)}a_{-M})X^{(-2M+1)/L} + \dots} \times$$

Tabela 2.1: Produto de duas séries

Os pontos do modelo de geometria (plana) que estamos desenvolvendo agora são os pares ordenados de elementos de  $\mathbb{R}((X))$ . As retas são as soluções  $(x, y) \in \mathbb{R}((X))^2$  de equações  $ax + by + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}((X))$  e  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

A relação de incidência é a pertinência do ponto ao conjunto solução da equação de uma reta.

A relação de ordem entre três pontos imita aquela da geometria analítica, e pode ser descrita como: se  $a \neq 0$  na equação da reta  $r : ax + by + cz = 0$  (que não pode ser paralela ao eixo das abscissas – ou da primeira coordenada dos pontos), a ordem entre três pontos distintos nessa reta é a ordem obtida da ordenada (segunda coordenada); analogamente, se  $b \neq 0$  na equação da reta  $r : ax + by + cz = 0$  (que não pode ser paralela ao eixo das ordenadas – ou da segunda coordenada) a ordem entre três pontos distintos nessa reta é a ordem obtida da abscissa. Fica como exercício a verificação de que não há contradição no caso em que tanto  $a \neq 0$  quanto  $b \neq 0$ , com o usos de cada um desses critérios.

A relação de congruência de segmentos é dada por: se  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$  e  $D = (d_1, d_2)$  forem quatro pontos desse plano, então  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  se, e somente se,

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2.$$

A relação de congruência de ângulos usa a idéia da lei dos cossenos, que será explicada mais adiante. Basta aceitar aqui a fórmula  $\angle AOB \equiv \angle CPD$ ,

sendo que  $A = (a_1, a_2)$ ,  $O = (o_1, o_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$ ,  $P = (p_1, p_2)$  e  $D = (d_1, d_2)$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1 - o_1)(b_1 - o_1) + (a_2 - o_2)(b_2 - o_2)}{\sqrt{(a_1 - o_1)^2 + (a_2 - o_2)^2} \sqrt{(b_1 - o_1)^2 + (b_2 - o_2)^2}} = \\ & = \frac{(c_1 - p_1)(d_1 - p_1) + (c_2 - p_2)(d_2 - p_2)}{\sqrt{(c_1 - p_1)^2 + (c_2 - p_2)^2} \sqrt{(d_1 - p_1)^2 + (d_2 - p_2)^2}}. \end{aligned}$$

Com isso, este é um modelo da geometria neutra, com a exceção do Postulado da Completitude de Dedekind. É um projeto interessante fazer a verificação de cada postulado de geometria neutra plana nesse modelo.

**Exercício 21:** Mostremos que nesse modelo não vale o Postulado da Completitude de Dedekind. Tomemos a reta  $r$  de equação  $y = 0$  (o eixo das abscissas). Seja  $X = \{(x, 0) \cdot I \cdot r : \text{existe } m \in \mathbb{N}, \text{ tal que } x < n\}$  e  $Y = \{(x, 0) \cdot I \cdot r : \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}, x > n\}$ . Postulado da Completitude de Dedekind. Verifique que não existe nenhum ponto  $P \cdot I \cdot r$ , tal que  $X \leq P \leq Y$ .

Para mostrarmos que nesse modelo vale o Postulado de Completitude Euclidiano, precisamos primeiro verificar que podemos extrair uma raiz quadrada de uma série, obtendo também uma série.

**Proposição 11** *Seja  $f(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} a_k X^{k/L} \in \mathbb{R}((X))$ , tal que  $a_{-N} > 0$ . Então existe  $g(X) \in \mathbb{R}((X))$ , tal que  $g^2 = f$ .*

**Demonstração:** Se escrevermos  $g(X) = \sum_{k=-M}^{\infty} b_k X^{k/(2L)}$ , escrevemos a expressão para  $g(X)^2$ , e comparamos os coeficientes com os de  $f(X)$ , obtendo um sistema recorrente de equações:

$$b_{-M}^2 = a_{-M}, \text{ ou } b_{-M} = \sqrt{a_{-M}};$$

$2b_{-M+1}b_{-M} = 0$  (coeficiente de  $X^{(-M+1)/(2L)}$ , que não aparece em  $f(X)$ ), ou seja,  $b_{-M+1} = 0$ ;

$$2b_{-M+2}b_{-M} + b_{-M+1}^2 = 2b_{-M+2}b_{-M} = a_{-M+1}, \text{ ou } b_{-M+2} = a_{-M+1}/\sqrt{a_{-M}};$$

$$2(b_{-M+3}b_{-M} + b_{-M+2}b_{-M+1}) = 2b_{-M+3}b_{-M} = 0, \text{ ou seja, } b_{-M+3} = 0.$$

Esse padrão já nos permite antever que  $b_{-M+2k+1} = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Assim, suponhamos que já tenham sido obtidos os valores de  $b_{-M+2k}$ , para  $0 \leq k \leq N$ . Da equação comparando os coeficientes de  $X^{-M+N+1}$ , obtemos que

$$b_{-M+2(N+1)} = -\frac{\sum_{k=1}^N b_{-M+2k} b_{-M+2(N+1)-2k}}{\sqrt{a_{-M}}}.$$

Com isto, obtemos  $g = \sqrt{f}$ . □

Com isto, podemos resolver qualquer equação de segundo grau (com discriminante não negativo) em  $\mathbb{R}((X))$ , e isso é o que usaremos para mostrar que nesse modelo vale o Postulado da Completitude Euclideana.

**Proposição 12** *ados quatro pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$  em  $\mathbb{R}((X))^2$ , tais que  $A - / = B - C - / = D$ , então existe um ponto  $E \in \mathbb{R}((X))^2$ , tal que  $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$  e  $\overline{DE} \equiv \overline{BD}$ .*

**Demonstração:** Mostremos primeiramente essa asserção para o caso em que  $A = (0, 0)$ ,  $B = (b, 0)$ ,  $C = (c, 0)$  e  $D = (d, 0)$ , com  $b, c, d \in \mathbb{R}((X))$  e  $0 \leq b < c \leq d$ . Um dos pontos desejados é solução de duas equações de segundo grau  $x^2 + y^2 = c^2$  e  $(x - d)^2 + y^2 = b^2$ , o que se reduz a resolver a equação  $(x - d)^2 - (x^2 - c^2) = b^2$ , ou  $x = (c^2 + d^2 - b^2)/2d$  e  $y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$ , que sabemos ser possível operar em  $\mathbb{R}((X))$ .

O caso geral é análogo a esse, pois podemos escrever  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$  e  $D = (d_1, d_2)$  e resolvermos o par de equações  $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2$  e  $(x - d_1)^2 + (y - d_2)^2 = (b_1 - d_1)^2 + (b_2 - d_2)^2$ , isolando  $y^2$  da primeira equação e substituindo na segunda. □

Uma outra possibilidade para o Postulado da Completitude é devido ao Matemático e Lógico Polonês Alfred Tarski, e será discutido na Seção 7.4.