É possível somar infinitas parcelas?

Martha Salerno Monteiro
Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática

Até o século XIX, os matemáticos tinham pouca compreensão sobre somas de uma quantidade infinita de números como, por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ ou então $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ Frequentemente eles tentavam operar com essas somas do mesmo modo como operavam com somas finitas, isto é, usando as mesmas propriedades. Não estando cientes de que algumas propriedades válidas para somas finitas não valiam para somas infinitas, eles chegavam a resultados contraditórios.

Filósofos da Grécia antiga debateram calorosamente questões como

- *Uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente em partes cada vez menores ou é formada por um número muito grande de partes atômicas indivisíveis?*
- *O movimento é contínuo ou é uma sucessão de instantâneos que, como quadros em filmes antigos, estão parados no tempo?*

O filósofo grego Zenão de Eleia (século V a.C.) chamou atenção para dificuldades lógicas de cada uma das possíveis respostas por meio da elaboração de paradoxos. Em vez de negar diretamente as teses que combatia, Zenão mostrava os absurdos (contradições) daquelas teses e, portanto, sua falsidade. Acredita-se que Zenão tenha criado cerca de quarenta destes paradoxos, todos contra a multiplicidade, a divisibilidade e o movimento que, segundo a escola eleática, nada mais são que ilusões.

Um desses paradoxos é conhecido como *dicotomia*: Para um corredor ir de um ponto A até um ponto B, ele terá primeiramente que cobrir metade da distância de A até B. Depois, metade do que falta, e assim por diante. Como isso envolve um número infinito de etapas, Zenão argumentou que o corredor nunca irá alcançar seu destino.

Se nomearmos $d(A, B) = 1$, esse paradoxo concluía que é impossível efetuar a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

que é a soma de uma progressão geométrica (PG) de razão $\frac{1}{2}$. Com o conhecimento que se tem hoje, sabe-se que essa soma é finita e igual a 1.

Repare que somando-se as duas primeiras parcelas, obtém-se $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ (falta $\frac{1}{4}$ para chegar em 1), somando-se as três primeiras parcelas, obtém-se $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ (falta $\frac{1}{8}$ para chegar em 1), e assim por diante. Você pode perceber que existe uma tendência: conforme somamos mais termos, as somas finitas aumentam, aproximando-se de 1, e é possível *chegar a um valor tão próximo de 1 quanto se queira*, simplesmente acrescentando mais termos à soma.

Essa ideia de *chegar a um valor tão próximo de X quanto se queira* é o que hoje chamamos de *limite*.

Mas os gregos antigos não conseguiram aceitar a ideia de que é possível somar uma quantidade infinita de números e obter um resultado finito. Os gregos antigos sabiam somar muitos e muitos termos de uma progressão e atingir uma boa aproximação, mas o pensamento de estender esse processo para o infinito era inaceitável para eles (com exceção de Arquimedes, que calculou a área de um setor parabólico fazendo somas infinitas).

As somas de progressões geométricas – finitas ou infinitas – aparecem em praticamente todos os ramos da matemática. A primeira vez que as encontramos (disfarçadamente) é na forma de dízimas periódicas. Por exemplo, o número $0,232323\ldots$ é uma abreviação para

$$\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^4}+\cdots$$

O livro VIII e parte do livro IX da obra "Os Elementos" de Euclides tratam de *proporções continuadas*, isto é, números que formam o que hoje chamamos de progressões geométricas. Esse assunto se tornou importante para os gregos desde a descoberta de Pitágoras de que os intervalos musicais correspondem a proporções dos comprimentos das cordas. A proposição 35 do livro IX expressa em palavras como calcular a soma finita de uma progressão geométrica. Em linguagem atual, Euclides enunciou[1] que a soma S da sequência de números $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n$ satisfaz a propriedade

$$\frac{ar-a}{a}=\frac{ar^n-a}{S}$$

Isso é equivalente a $S\cdot a(r-1)=a\cdot a(r^n-1)$ e, se $r\neq 1$, podemos isolar S e obter a expressão

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Note que os gregos antigos permitiam a soma de muitas parcelas, já que n pode ser arbitrariamente grande. Mas eles não deram o passo de permitir que n crescesse tendendo a infinito.

[1]O enunciado de Euclides era: *Se tantos números quanto quisermos estiverem em proporção continuada e do segundo e do último número for subtraído o primeiro, então o excesso do segundo está para o primeiro assim como o excesso do último está para todos os outros.* Traduzindo, ele dizia que se $a, ar, ar^2, \cdots, ar^n$ é uma PG, então sua soma satisfaz $(ar-a):a=(ar^n-a):S$

Uma demonstração moderna da soma da PG pode ser a seguinte.

Seja S a soma dos n primeiros termos da PG:

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ S \cdot r &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \end{aligned}$$

Subtraindo termo a termo, todos os termos se cancelam exceto o primeiro de S e o último de Sr:

$$\begin{aligned} S - Sr &= a - ar^n \\ S(1-r) &= a(1-r^n) \\ S &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \end{aligned}$$

Hoje, com o conceito de limite rigorosamente estabelecido, é possível provar que se r é um número cujo valor absoluto é menor do que 1 (isto é, se $-1 < r < 1$) então, quando n tende a infinito, o valor de r^n tende a 0 e, portanto a soma S se torna

$$S = \frac{a}{1-r} \tag{1}$$

Assim, a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

que aparece no paradoxo de Zenão é

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

e a dízima periódica

$$0,232323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \cdots$$

tem soma

$$S = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{23}{99}$$

Note que a fórmula (1) nos permite provar que toda dízima periódica é igual a uma fração, isto é, que <u>toda dízima periódica é um número racional</u>.

<u>Exercício 1</u>. Use a fórmula (1) para escrever o número $1,00\overline{347}$ na forma de fração.

A soma infinita $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ tem um comportamento muito bizarro e originou muita controvérsia no início do século XVIII. Leibniz (1646–1716), co-inventor com Newton (1642–1727) do Cálculo, argumentou que “como a soma pode ser igual a 0 ou a 1, com a mesma probabilidade, seu *verdadeiro valor* deveria ser a média $\frac{1}{2}$". Tal raciocínio parece inacreditável nos dias de hoje, mas nos tempos de Leibniz alguns conceitos como *limite* e *convergência* não estavam bem compreendidos e as somas infinitas eram tratadas de maneira equivocada, como se fossem meras extensões de somas finitas.

O que dizemos hoje é que a soma $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ não tem sentido. Se "forçarmos a barra" e tentarmos atribuir um valor a ela, podemos chegar a qualquer número, o que mostra simplesmente que essa soma não tem significado.

Por exemplo, vamos "provar" que $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0,4$. Para isso, vamos escrever $1 = 0,4 + 0,6$ e substituir:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots =$$
$$(0,4 + 0,6) - (0,4 + 0,6) + (0,4 + 0,6) - (0,4 + 0,6) + \cdots =$$

Vamos chamar de S a soma desses números. Mudando os parêntesis de lugar, poderemos obter:

$$\begin{aligned} S &= 0,4 + (0,6 - 0,4) - (0,6 - 0,4) + (0,6 - 0,4) - (0,6 - 0,4) + \cdots \\ &= 0,4 + 0,2 - 0,2 + 0,2 - 0,2 + \cdots \end{aligned}$$

Vamos agora colocar parêntesis:

$$S = 0,4 + (0,2 - 0,2) + (0,2 - 0,2) + \cdots = 0,4$$

Se tivéssemos colocado os parêntesis de outra maneira, teríamos encontrado outro resultado:

$$S = (0,4 + 0,2) - (0,2 - 0,2) + (0,2 - 0,2) - \cdots = 0,6$$

Assim, a soma pode ter valor 0,4 ou 0,6 !!!
Exercício 2. É possível "provar" que essa soma é igual a π? Mostre!

Qual a conclusão?

Vimos que algumas somas infinitas são possíveis de serem calculadas e outras não, o que nos mostra que não podemos tratar somas infinitas da mesma forma como tratamos as somas finitas. Por exemplo, para as somas finitas valem as propriedades associativa e comutativa da adição. Com somas infinitas precisamos tomar mais cuidado.

Apenas no século XIX é que os matemáticos começaram a dar um tratamento mais rigoroso para as somas infinitas e só então foi possível estabelecer métodos para se lidar com elas.

Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ uma sequência de números reais, isto é, uma lista infinita de números arranjados em ordem, sendo a_1 o primeiro da lista, a_2 o segundo e assim por diante.

A soma infinita desses números *nessa ordem* é o que chamamos de <u>série</u> e indicamos por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{2}$$

Sendo assim, a ideia que surgiu foi a de somar os termos um a um, na ordem em que eles aparecem, e analisar o comportamento da sequência formada por essas somas <u>finitas</u>. Mais precisamente, definimos as *somas parciais*:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que, como as somas S_n são finitas, podemos usar as propriedades da adição livremente.

Se a sequência das somas parciais tiver um limite finito S (escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$) diremos que a série (2) *converge* para S e escrevemos $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$. O número S é chamado *soma da série*.

Por exemplo, vimos anteriormente que é possível somar todos os termos de uma Progressão Geométrica infinita com razão r que satisfaz $-1 < r < 1$. Uma tal série é conhecida como *série geométrica*.

No caso particular da série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, a saber,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

observamos que as somas parciais da série são:

$S_1 = \frac{1}{2}$,

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$,

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$

$\ldots$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

Repare que quando n cresce, tendendo a infinito, o número 2^n cresce muito e a fração $\frac{1}{2^n}$ fica cada vez menor, tendendo a 0. Logo, a sequência das somas parciais tende a 1. Assim, estamos autorizados a escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Exercício 3. Você concorda que $0{,}999\ldots = 1$? Por quê?

Se as somas parciais não tendem a um limite finito, diremos que a série (2) é *divergente*.

Alguns exemplos importantes de séries divergentes:

(a) $1 + 1 + 1 + \cdots$

Trata-se da série em que $a_n = 1$ para todo n. Tem-se: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $\ldots$, $S_n = n$. É claro que quando n cresce, tendendo a infinito, as somas parciais crescem igualmente. Por isso, a série $1 + 1 + 1 + \cdots$ é divergente.

(b) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

Este caso, em que $a_n = (-1)^{n+1}$ para todo n, ilustra um outro tipo de divergência. Vemos facilmente que as somas parciais são $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, e assim por diante. As somas parciais oscilam entre os números 0 e 1, e não tendem a um número S. Por isso, a série é divergente.

(c) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$

Esta série é chamada *série harmônica*. Ela é uma série divergente, mas esse fato não é nem um pouco óbvio, principalmente porque não conseguimos calcular de modo simples as somas parciais S_n. Vejamos como é possível ver que a série harmônica não converge:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

e assim por diante:

$S_{16} > 1 + \frac{4}{2}, \cdots, S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$

Dessa forma, podemos perceber que se n cresce indefinidamente, as somas parciais tendem a infinito. Logo, a série harmônica *diverge*.

Vimos que a série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ é divergente, enquanto que a série geométrica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ é convergente.

Intuitivamente, poderíamos dizer que na série harmônica, os termos não decrescem suficientemente rápido como na série geométrica. As somas parciais da série harmônica consistem em termos pequenos que, somados, resultam em um total grande, enquanto que os termos da série geométrica decrescem tão rapidamente que as somas parciais, mesmo com muitas e muitas parcelas, nunca chegam a 2.

Exemplo. Vamos estudar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

Note que esta não é uma série geométrica. Logo, a única ferramenta que temos é a definição de convergência por meio da análise de suas somas parciais $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$; $S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$; etc.

O problema é que o cálculo direto dessas somas não nos ajuda a determinar o valor das somas S_n para todo n. Vamos então procurar outra forma de abordar a questão. É fácil verificar que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ para todo n.

Com essa decomposição do produto em diferença de frações é possível calcular mais facilmente as somas parciais S_n para todo n e determinar o valor da soma S. Repare:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Logo, a série é convergente e sua soma é $S = \lim S_n = 1$.

Exercício 4. Repare que $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{2}{3}$; $\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}$; $\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} - \frac{4}{7}$

(a) Escreva $\frac{1}{7 \cdot 9}$ como diferença de duas frações.

(b) Tente encontrar uma fórmula geral para $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) Verifique que também é verdade que $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$; $\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$

(d) Deduza que $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ para todo número natural n.

(e) Considere a série (convergente) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots$

João fez o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\right) + \cdots = 1 \end{aligned}$$

Já Maria fez de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\Big)+\cdots \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\cdots=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Algum dos alunos calculou a soma corretamente? Quem? Por que?

Um teorema muito útil para podermos concluir que uma série <u>não é</u> convergente é o seguinte:

Teorema. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.[2]

Uma outra forma de enunciar esse teorema é: *Se os termos a_n de uma série $\sum a_n$ não tendem a 0, então essa série é divergente.* Na prática, é assim que o teorema é utilizado. Por exemplo, considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots$$

Essa série é divergente pois $a_n=\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1 (e não de 0) quando n cresce indefinidamente.

<u>Exercício 5</u>. Determine quais séries são convergentes e quais são divergentes. Se for convergente, determine a soma.

(a) $4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}+\frac{32}{125}+\cdots$

(b) $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+\cdots$

(c) $1-0,4+0,16-0,064+0,0256-0,01024+\cdots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{4^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5}$

---

[2] A demonstração pressupõe o conhecimento de uma propriedade de limite, que diz que se duas sequências (x_n) e (y_n) têm limites x e y respectivamente ($x,y\in\mathbb{R}$), então $\lim(x_n+y_n)$ e $\lim(x_n-y_n)$ existem e são iguais, respectivamente a $x+y$ e $x-y$.

Com essa propriedade, podemos então, dizer que, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, suas somas parciais S_n convergem para um número real S. Como $a_n=S_n-S_{n-1}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

É importante observar que tanto a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

quanto a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

têm termos positivos que decrescem para 0, mas a primeira é divergente, enquanto que a segunda é convergente. Isso mostra a sutileza deste assunto!

Também é importante observar que a recíproca do teorema acima não é verdadeira, como deixa claro o comportamento da série harmônica.

Em geral é muito difícil calcularmos o valor exato S da soma de uma série convergente. Mas apenas o fato de sabermos que ela é convergente já nos ajuda a resolver vários tipos de problemas.

Por exemplo, sabe-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

é convergente e sua soma é o número $\frac{\pi^2}{6}$.

Vamos ver uma maneira de verificar que a série é convergente. De fato, tem-se:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 5} + \cdots \frac{1}{n \cdot n} \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

Dessa forma, percebemos que os números S_n estão todos entre 1 e 2, e formam uma sequência crescente, isto é, $1 = S_1 < S_2 < S_3 < \cdots$ Portanto, eles devem convergir para algum valor S (entre 1 e 2).

Esse exemplo ilustra um critério muito útil para sabermos se uma série de termos positivos é convergente ou não.

Teorema: Critério da comparação. Sejam a_n e b_n números positivos tais que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n.

(i) Se a série $\sum b_n$ é convergente então $\sum a_n$ também é convergente.

(ii) Se a série $\sum a_n$ é divergente então a série $\sum b_n$ também é divergente.

Exercício 6. Use o critério da comparação para determinar se as séries dadas são convergentes ou divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2+3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3-1}$

Séries alternadas

As séries com termos positivos e negativos mais simples de se lidar são aquelas cujos termos são alternadamente positivos e negativos e, por isso, são conhecidas como séries alternadas. Por exemplo,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

são ambas séries alternadas.

Note que é possível representar uma série alternada na forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ou na forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$, sendo a_n um número positivo. A ideia é que as potências do número (-1) que multiplicam os números a_n têm o efeito de alternar o sinal conforme o expoente aumenta.

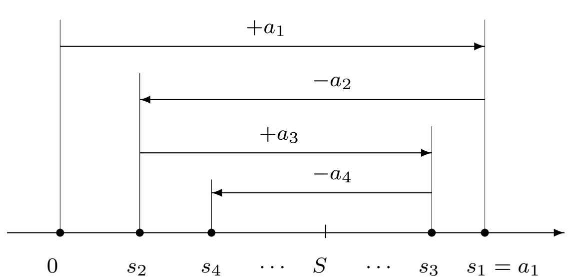
Em 1705, Leibniz observou que se os números a_n formarem uma sequência decrescente que tendem a 0, isto é, se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

então essa série alternada será convergente.

Esse resultado é conhecido hoje como *Critério de Leibniz para séries alternadas.*

A ideia por trás desse resultado é muito simples: as somas parciais s_n aumentam quando tomamos um termo positivo, depois diminuem quando somamos um termo negativo, e depois aumentam de novo, mas menos do que antes, e depois diminuem novamente, menos do que anteriormente, tendendo a um valor finito S. Vejamos a ideia na figura abaixo, no caso de uma série alternada do tipo $a_1 - a_2 + a_3 - a_a + \cdots$



Com base nesse critério podemos concluir que a série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

é convergente, já que $a_n = \frac{1}{n}$ decresce e tende a 0, conforme n aumenta.

Hoje sabe-se que o valor dessa série é $\ln 2$, mas isso é outra história!

Já a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n-1}$$

é alternada. Entretanto, $a_n = \dfrac{3n}{4n-1} = \dfrac{3}{4 - \frac{1}{n}}$ que tende a $\frac{3}{4}$ quando n tende a infinito.

Portanto, esta série não satisfaz as hipóteses do critério de Leibniz. Neste caso, para decidirmos se a série é ou não convergente, podemos usar um outro critério já enunciado neste texto. Você sabe qual?

Pergunta: A série $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \cdots$ é convergente ou divergente? Por quê?

Séries absolutamente convergentes

Vimos acima que a série harmônica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ é divergente enquanto que a série harmônica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$ é convergente.

Intuitivamente, a série harmônica alternada converge porque seus termos ficam pequenos e os sinais de menos impedem que as somas parciais cresçam muito, permitindo que exista um limite finito.

Mas há séries que convergem independentemente de terem sinais negativos em muitos termos para convergirem: elas ainda seriam convergentes mesmo se todos os sinais fossem trocados por sinais de mais. Séries desse tipo são muito importantes e, por isso, ganham um nome especial: são as *séries absolutamente convergentes.*

Uma série $\sum a_n$ *é absolutamente convergente se a série* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

Note que nós não escrevemos todos os detalhes da somatória. Usaremos essa notação simplificada sempre que não houver prejuízo da compreensão do texto e deixamos convencionado que o símbolo $\sum a_n$ refere-se a uma soma com infinitos termos.

É intuitivo o fato que se uma série é absolutamente convergente então ela é convergente, afinal, se somarmos todos os valores absolutos e a soma existir, quando acrescentarmos sinais negativos em muitas parcelas, a soma da série também irá existir. A demonstração é deixada como desafio[3].

[3]Dica: para todo número real x vale que $0 \leq x + |x| \leq 2|x|$

Por exemplo, a série

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} - \cdots$$

é convergente porque a série formada pelos valores absolutos de seus termos, a saber, a série

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \cdots$$

é uma série geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$ e, portanto, convergente.

Quando uma série é convergente mas não é absolutamente convergente, dizemos que ela é *condicionalmente convergente.*

O exemplo clássico de série condicionalmente convergente é a série harmônica alternada.

Essas séries costumam ser mal comportadas! Por isso, para se lidar com elas é necessário tomar MUITO CUIDADO! Veja o exemplo a seguir.

Sabe-se que a série harmônica alternada é convergente e que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$$

Multiplicando-se por $\frac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\ln 2$$

Inserindo-se zeros, teremos:

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\ln 2$$

Somando-se termo a termo a primeira e a última igualdade, obteremos

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}\ln 2$$

Mas note que esta série é um rearranjo da primeira, isto é, são os mesmos termos mas em outra ordem! E o resultado da soma ficou diferente!

Esse fenômeno foi descoberto em 1837 pelo matemático alemão Johann Dirichlet (1805 – 1859). Ele foi o primeiro a ter um melhor entendimento sobre séries absolutamente convergentes.

Mais uma vez estamos verificando que somas infinitas não se comportam como somas finitas. No caso do exemplo acima, percebemos que a propriedade comutativa da adição não pode ser usada em somas infinitas.

O que sabemos é que *apenas as séries absolutamente convergentes se comportam como as somas finitas.* Todas as outras devem ser manipuladas com muito critério e seguindo-se regras bem estabelecidas (por meio de teoremas).

Teorema. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então todo rearranjo de $\sum a_n$ é absolutamente convergente, com a mesma soma.

Para entender por que vale esse teorema, vamos supor $a_n \geq 0$ para todo n (caso contrário, basta tomar os valores absolutos de a_n). Suponha que $\sum a_n$ é convergente e tem soma $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Seja $\sum b_n$ um rearranjo dos a_n. Por exemplo, a série $\sum b_n$ poderia ser

$$a_3 + a_{10} + a_1 + a_{27} + \cdots$$

Neste caso, as somas parciais de $\sum b_n$ seriam $T_1 = a_3$, $T_2 = a_3 + a_{10}$, e assim por diante. Repare que $T_1 \leq S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $T_2 \leq S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots a_{10}$ e assim por diante.

De um modo geral, podemos dizer que para um número natural n qualquer, a soma parcial T_n contém os n primeiros termos da soma $\sum b_n$. Como cada um desses termos é também um dos termos da soma $\sum a_n$, existirá um índice m tal que a soma parcial $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ contenha todos os termos de T_n. Portanto, teremos $T_n \leq S_m \leq S$. Portanto, pelo critério da comparação, a série rearranjada $\sum b_n$ converge para uma soma $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, e $T \leq S$. Por outro lado, podemos pensar que a série $\sum a_n$ é rearranjo da série $\sum b_n$. Assim, pelo mesmo raciocínio, podemos concluir que $S \leq T$. Portanto, $S = T$.

O matemático Georg Riemann (1826–1866) provou um resultado surpreendente, que até parece truque de mágica!

Teorema do Rearranjo de Riemann. Se a série $\sum a_n$ é condicionalmente convergente então, dado um número α qualquer, existe um rearranjo da série que tem soma igual a α.

A ideia da demonstração não é muito difícil, mas antes teremos que introduzir uma notação: Dado um número real x qualquer, definimos

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2} \qquad \text{e} \qquad x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

<u>Exercício 7</u>.

1. Calcule x^+ e x^- para alguns números x, positivos e negativos, para ver o que acontece... Explique com suas palavras o que você descobriu.

2. Verifique que $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$ para todo x.

Dada uma série $\sum a_n$ qualquer, podemos criar duas outras séries: $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$. A série $\sum a_n^+$ contém todos os termos positivos da série original e os termos negativos foram substituídos por 0. Já na série $\sum a_n^-$, todos os termos positivos foram substituídos por 0 e os que eram negativos trocaram de sinal. Assim, ambas as séries novas $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são séries de termos positivos.

Vejamos o exemplo da série harmônica alternada

$$\sum a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Temos:

$$\sum a_n^+ = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \cdots \qquad \text{e} \qquad \sum a_n^- = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \cdots$$

Voltemos à situação geral:

- Se uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então as séries $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são ambas convergentes e $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$. [4]

  De fato, se $\sum |a_n|$ é convergente, então $\sum a_n$ é convergente e portanto, as séries $\sum a_n^+ = \frac{1}{2}(\sum |a_n| + \sum a_n)$ e $\sum a_n^- = \frac{1}{2}(\sum |a_n| - \sum a_n)$ são convergentes. Além disso,

  $$\sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$$

- Se a série $\sum a_n$ for condicionalmente convergente, ela tem necessariamente infinitos termos positivos e infinitos termos negativos. (Por quê?) Além disso, ambas as séries $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são *divergentes*.

  De fato, se $\sum a_n^-$ for convergente, como $\sum a_n$ é convergente (por hipótese) e $a_n^+ = a_n + a_n^-$, $\sum a_n^-$ será convergente. Da mesma forma, se $\sum a_n^+$ for convergente, a série $\sum a_n^-$ também o será. Portanto, se uma das séries $\sum a_n^+$ ou $\sum a_n^-$ for convergente, a outra também será convergente. Por outro lado, sendo a série condicionalmente convergente, sabemos que $\sum |a_n|$ é divergente. Como $|a_n| = a_n^+ + a_n -$, vemos que nenhuma das séries $\sum a_n^+$ ou $\sum a_n^-$ pode ser convergente.

Voltando ao exemplo da série harmônica alternada, o que podemos concluir é que as séries

$$\sum a_n^+ = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \cdots \qquad \text{e} \qquad \sum a_n^- = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \cdots$$

[4]Para estabelecer o resultado de forma mais rigorosa (menos informal) seria importante escrever as somas como limites de somas parciais e usar propriedades de limites para se chegar aos resultados com mais segurança. As demonstrações resumidas acima servem para dar uma ideia da linha de raciocínio.

são ambas divergentes.

Vamos agora à ideia da demonstração do Teorema do Rearranjo de Riemann.

Tomemos uma série $\sum a_n$ condicionalmente convergente e considere as séries (divergentes) $s^+ = \sum a_n^+$ e $s^- = \sum a_n^-$. Seja α um número qualquer fixado. Para facilitar o raciocínio iremos supor α positivo, mas se for negativo, a demonstração é praticamente igual e você pode fazer como "lição de casa"!

Tome, em ordem, o menor número de termos da série s^+ até que a soma parcial

$$\alpha_1 = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{n_1}^+$$

seja maior do que α. Assim, teremos $a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{n_1-1}^+ \leq \alpha < \alpha_1$.

Isso é possível de ser feito porque a série s^+ é uma série de termos positivos e divergente. Logo, suas somas parciais tendem a infinito.

A seguir, subtraímos o menor número de termos da série s^-, de modo que a soma parcial

$$\alpha_2 = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - a_2^- - \cdots - a_{m_1}^-$$

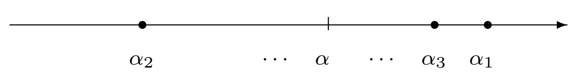
seja menor do que α. Temos: $\alpha_2 < \alpha \leq \alpha_1 - a_1^- - a_2^- - \cdots - a_{m_1-1}^-$

Novamente, isso é possível porque a série s^- é uma série divergente e de termos positivos.

Em seguida, adicionamos o menor número de termos dentre os restantes de s^+, de modo que a soma seja novamente maior ou igual a α:

$$\alpha_3 = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - a_2^- - \cdots - a_{m_1}^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_2}^+$$

e assim por diante!



Como $\sum a_n$ é convergente, os termos a_n tendem a 0, bem como os termos a_n^+ e a_n^-. Dessa forma, a série que estamos construindo terá soma igual a α.

Referências Bibliográficas

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

MAOR, Eli. **Trigonometrics Delights**. Princeton: Princeton University Press, 2002.

SIMMONS, George. **Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 2. Tradução: Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.