O desafio de ensinar sobre o número e

Martha Salerno Monteiro
IME - USP
Janeiro de 2007

Muito já se escreveu sobre o número e e, mesmo assim, às vezes somos surpreendidos com imprecisões e equívocos a respeito de suas características e propriedades, confirmando a dificuldade e sutileza desse assunto.

Aqui escreverei apenas sobre alguns aspectos que costumo focalizar em minhas aulas.

A definição de e é

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$$

A motivação para o estudo desse limite foi a matemática financeira, mas isso não é o que quero focar aqui. Para saber sobre a história do número e há um bom livro, recentemente traduzido para o português, intitulado "e: a história de um número", de Eli Maor.

O fato é que, depois de descoberto, esse número se mostrou extremamente importante para as ciências e é preciso ensinar sobre ele — e bem.

Recomendo inicialmente gastar alguns instantes para tentar entender o significado desse limite. Para isso, nada melhor do que fazer um pouco de contas:

Para $n = 1$, o valor de $(1 + \frac{1}{n})^n$ é $(1 + 1)^1 = 2$; para $n = 2$, $(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2,25$; para $n = 10$, $(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{10})^{10} = 2,5937424601$; para $n = 100$, $(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{100})^{100} = 2,7048138294215260932671080753...1$

Observe que todos os números calculados acima são racionais, já que, para n inteiro, $1 + \frac{1}{n}$ é claramente racional e portanto, a potência é racional.

Poderíamos continuar fazendo muitas contas mas isso não nos levaria ao conhecimento maior do número e e de suas propriedades. Basicamente,

1. as contas não nos garantem que o limite existe;
2. contas não nos respondem se e é racional ou irracional;
3. com contas não calculamos o valor do limite, apenas chegaremos a alguns valores aproximados.

Acredito que as calculadoras e os computadores, por mais potentes que sejam, por terem memória finita, não conseguiriam calcular o limite que está na definição de e. Creio que ao tentar calcular o valor de $\frac{1}{n}$, em algum momento, para algum n muito grande, a máquina irá chegar ao valor 0 e, a partir desse ponto, o valor que ela irá fornecer como aproximação de e será erroneamente $(1 + 0)^n = 1$. Desconheço programas que possam contornar esse problema.

O computador pode iludir aqueles que não conhecem seu funcionamento e suas limitações. É muito importante, em nossas aulas, alertarmos nossos alunos para os perigos do mau uso do computador. Para fazer isso com consciência, precisamos aumentar nosso conhecimento teórico para saber até onde confiar nos resultados obtidos.

Como eu sei que e não é igual a 1 (como parecem indicar algumas contas feitas de forma ingênua em computadores)?

Teorema. Para todo número inteiro positivo n (inclusive os muito grantes) vale

$$2 \leq (1+\frac{1}{n})^n < 3$$

Demonstração. Usando o Binômio de Newton, temos que

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot(\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot(\frac{1}{n})^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}(\frac{1}{n})^n$$

(Observando o lado direito da expressão, já podemos ver que e é maior do que 2, pois as duas primeiras parcelas são iguais a 1 e as demais são positivas.)

Se a rearranjarmos de uma maneira bastante especial, veremos também que $e < 3$:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n}{n}\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot(\frac{n}{n})\cdot(1-\frac{n-1}{n})(1-\frac{n-2}{n})\dots(1-\frac{1}{n})$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

já que $0 < (1-\frac{k}{n}) < 1$ para qualquer k inteiro entre 1 e n, e também porque para $n \geq 4$, vale $n! > 2^{n-1}$ (esta desigualdade pode ser provada por indução).

c.q.d.

Um outro argumento equivocado que vemos os alunos repetirem é o seguinte: "se n tende a infinito, então $\frac{1}{n}$ tende a 0. Logo $1+\frac{1}{n}$ tende a 1 e $(1+\frac{1}{n})^n$ tende a 1".

O que digo aos meus alunos, informalmente, é "o número n é um só e é colocado na expressão tanto na base quanto no expoente *ao mesmo tempo*. Não pode um n na base ir para infinito enquanto o outro n que está no expoente fica esperando para ir depois..." Creio que seja justamente isso o que torna esse limite tão difícil!

(Um professor de Cálculo experiente sabe que esse mesmo tipo de erro de raciocínio aparece também quando ensinamos a calcular o limite $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$ — os alunos tendem a deixar um dos x da expressão "esperando" enquanto o outro vai para infinito!)

Observe o seguinte exemplo: sabendo que $e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ (x real), como podemos calcular $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$? Note que, pelo raciocínio equivocado acima, também daria 1. Mas vejam:

$$(1+\frac{2}{x})^x = [(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2$$

Fazendo $y = \frac{x}{2}$ teremos $(1+\frac{2}{x})^x = [(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2 = [(1+\frac{1}{y})^y]^2$.

Usando agora algumas propriedades básicas de limites, chegamos à conclusão que

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^2$$

Por causa de exemplos como esse é que dizemos que limites do tipo 1^∞ são <u>indeterminados</u>, isto é, *cada caso é um caso - não há uma resposta padrão.*

Algumas considerações:

Para se ter um estudo mais completo sobre o número e, faltam muitas coisas. Dentre elas, a mais importante é provar que tal número existe. Outra seria provar que e é irracional. Essas demonstrações podem ser encontradas em vários livros. Meu favorito é "Um curso de cálculo", de Hamilton Guidorizzi, por ser bastante completo e rigoroso.

Em minha opinião, todos os estudantes das áreas de ciências exatas devem conhecer a fundo esses fatos. É papel do professor não só ensinar os fatos, como as demonstrações, os argumentos, o raciocínio envolvido.

É importante também apontar não só as qualidades das máquinas modernas, que fazem milhares de contas e gráficos em poucos segundos, mas também suas limitações.

A base do conhecimento matemático é o raciocínio dedutivo, que começou com os gregos antigos há 2500 anos e chega até nós sem que se tenha conseguido nada melhor que o substitua. Devemos ensinar nossos alunos a apreciar esse modo de argumentar, deduzir, compreender. A fundamentação teórica para qualquer aluno da área de exatas (engenheiros inclusive) é essencial para a formação de profissionais competentes. As máquinas mudam e ficam obsoletas em muito pouco tempo. O conhecimento teórico deve ser sólido para que os profissionais não se tornem também obsoletos.