MAT2454 - Cálculo II - POLI

Primeira Lista de Exercícios - 2002

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:
   (a) $\gamma(t) = (1, t)$ (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \text{sen } t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (c) $\gamma(t) = (\text{sen } t, \text{sen }^2 t)$ (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + \text{sen } t)$
   (e)$\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$ (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \text{sen } t)$, $t \geq 0$
   (g) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2\text{sen } t)$

2. Faça o exercício nº 22 do Cap. 10.1 do livro texto (Stewart, vol. II).

3. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva. Ache os pontos da curva abaixo nos quais a tangente é horizontal ou vertical. Esboce a imagem de γ.
   (a) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$ (b) $\gamma(t) = (\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3})$

   (c) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$ (d) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$

4. Considere as curvas $\gamma_1(t) = (t^3, t^6)$ e $\gamma_2(t) = (t^3, t^2)$. As imagens dessas curvas são gráficos de funções da forma $y = f(x)$ com f derivável?

5. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t \cdot \cos t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Esboce a curva.

6. Em que ponto ocorre a auto-interseção da curva
$$\gamma(t) = (1 - 2\cos^2 t, \text{tg } t \cdot (1 - 2\cos^2 t)), \ \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})?$$
   Ache as equações das duas tangentes nesse ponto.

7. Faça o exercício nº 41 co Cap. 10.2 do livro texto.

8. Seja $\gamma : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ (ou $\gamma : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$) uma curva diferenciável. Mostre que se $||\gamma(t)|| = C$ para todo $t \in I$ então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo t. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

9. (a) Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, onde x' e y' são contínuas. Como se pode definir o comprimento de γ?
   (b) Usando a definição dada em (a), calcule o comprimento de:
   $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$, $t \in [-4, 4]$;
   $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \text{sen }^2 t)$, $0 \leq t \leq \pi$;
   $\gamma_3(t) = (\cos t + t \,\text{sen } t, \text{sen } t - t \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.

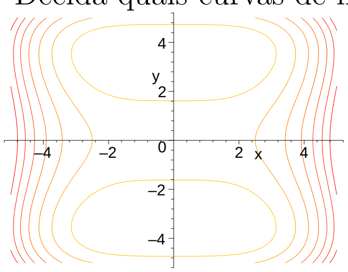
10. Ache e esboce o domínio das funções:
   (a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ (b) $f(x, y) = arctg\, \frac{y}{x}$
   (c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ (d) $f(x, y, z) = \frac{x}{y^z}$
   (e) $f(x, y) = \text{tg } (x - y)$ (f) $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$
   (g) $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

11. Esboce uma família de curvas de nível de:
(a)$f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b)$f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

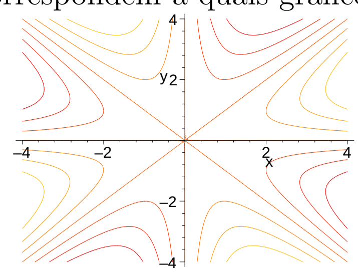
12. Descreva as superfícies de nível de:
(a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
(c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ (d) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$

13. Esboce os gráficos de:
(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = x$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
(d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2$
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

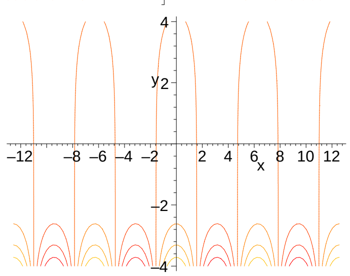
14. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.



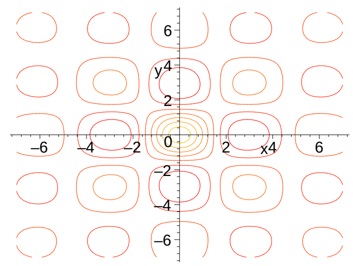
(I)



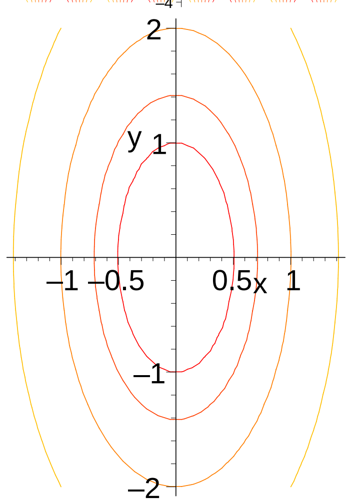
(II)



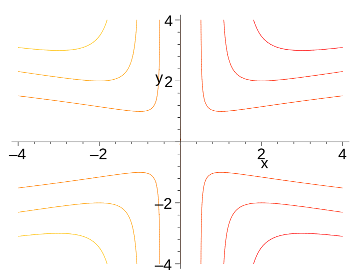
(III)



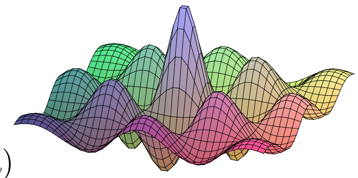
(IV)



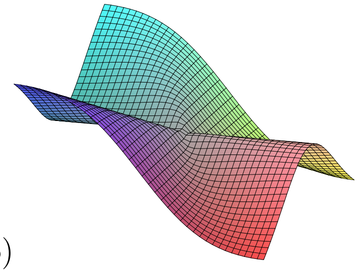
(V)



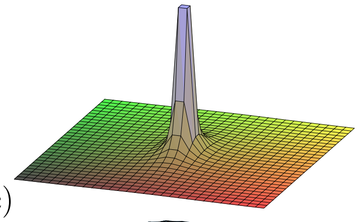
(VI)



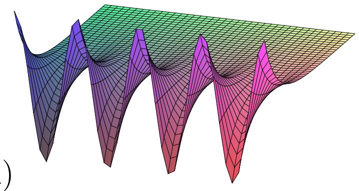
(a)



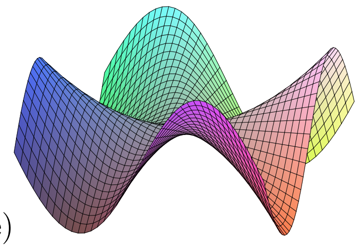
(b)



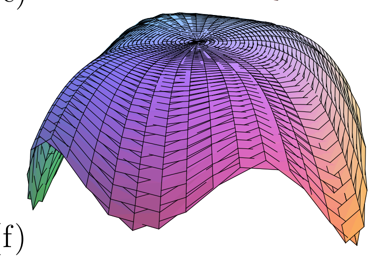
(c)



(d)



(e)



(f)

15. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = (1, t, 1),\ t \in \mathbf{R}$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\ t, 2)$

(c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\text{sen}\ t, e^{-t}),\ t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \text{sen}\ t),\ t \geq 0$

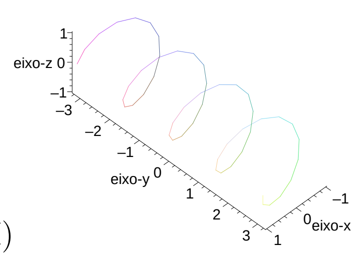
(e) $\gamma(t) = (\text{sen}\ t, \text{sen}\ t, \sqrt{2}\cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \text{sen}\ t, 1 + \text{sen}\ t, \cos t)$

16. Combine as equações com os gráficos. Justifique a sua escolha:

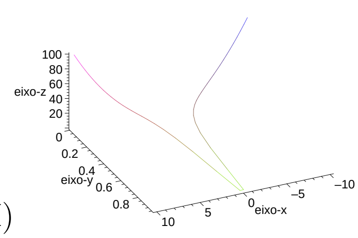
(a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \text{sen}\ 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$

(c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\text{sen}\ 3t\ \cos t, \text{sen}\ 3t\,\text{sen}\ t, t)$

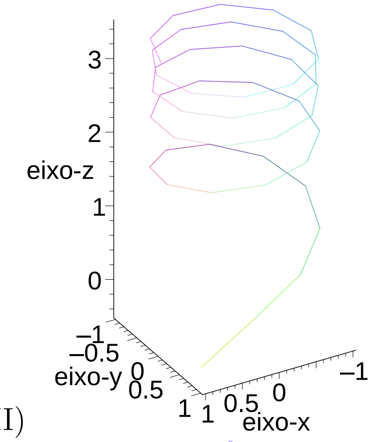
(e) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\ t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\ t, \text{sen}\ 5t)$



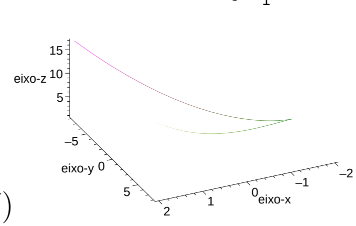
(I)



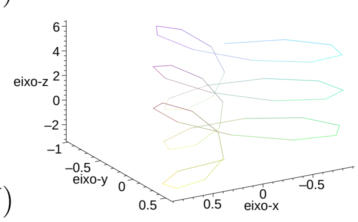
(II)



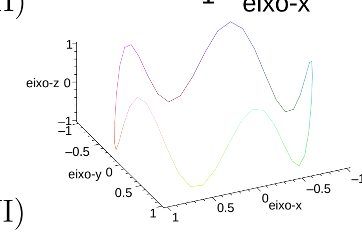
(III)



(IV)



(V)



(VI)

17. O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ e o plano $y = 2$ têm como intersecção uma elipse. Ache a equação da reta tangente a esta elipse no ponto (1,2,2).

18. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

19. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com a superfície $y = z^2$. Tente esboçar essa curva (use o computador).

20. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t \cos t, t \,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{t^2 + 4}),\ t \geq 0$.
(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.
(b) Faça um esboço da imagem de γ.

21. Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

22. Seja $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$.
(a) Esboce as curvas de nível e o gráfico de f.
(b) O gráfico de f e o plano $z = 2x+1$ têm como intersecção uma curva. Parametrize-a.

23. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1} \cos t, \sqrt{t^2 + 1} \mathrm{sen}\ t, t), t \in \mathbf{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

24. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

25. O parabolóide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ e o plano $x = 1$ têm como intersecção uma parábola. Ache a equação da reta tangente a essa parábola no ponto (1,2,-4). Ache a intersecção dessa reta com o plano xy. Use um computador para visualizar, na mesma tela, os gráficos do parabolóide, da parábola e da reta tangente.

26. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^4 \mathrm{sen}\ (x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4 + x^2 y + y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \mathrm{sen}\ \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

27. Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique:

    Sejam $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ e $\gamma(t) = (t,t)$. Como $\lim_{t \longrightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$, então

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

28. Use um computador para esboçar o gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{\text{sen } (x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ e calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

29. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

    (a) $f(x,y) = \text{arctg } \dfrac{y}{x}$ (b) $f(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{z-t}$

30. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

    (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

31. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

    (b) É f contínua em (0,0)?

32. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

    (a) $u(x,y) = f(\dfrac{x}{y})$

    (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

33. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}} e^{sen(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$. (Sugestão: é menos trabalhoso usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar regras de derivação.)

34. A pressão P, a temperatura T e o volume V de uma gás ideal de massa dada satisfazem a equação $PV = kT$, onde k é constante. Mostre que $\dfrac{\partial P}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$.

35. Verifique que a função $u(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

36. Verifique que a função $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é solução da equação de Laplace tridimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

37. Sejam f e g funções de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, deriváveis até segunda ordem.

(a) Mostre que $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(b) Mostre que $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

38. Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$, para todo x. (Sugestão: use a definição de derivada parcial.)

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

(c) Use o computador para esboçar o gráfico e as curvas de nível de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e convença-se de que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ não é contínua e que portanto o Teorema de Schwarz não é violado.

39. É a funcao do exercício 30 diferenciável em (0,0)?

40. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em (0,0) e que existem as derivadas parciais $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

(b) Verifique que o vetor tangente à curva $\gamma(t) = (t, t, f(t, t))$ no ponto $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ não pertence ao plano de equação

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y.$$

(c) É f diferenciável em (0,0)? Por que?

41. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Verifique que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos. (b) É f diferenciável em (0,0)? Por que?

42. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

a) $z = e^{x^2+y^2}$	(0,0,1)
b) $z = \ln(2x+y)$	(-1,3,0)
c) $z = x^2 - y^2$	(-3,-2,5)
d) $z = e^x lny$	(3,1,0)

43. Determine o plano que passa por (1,1,2) e (-1,1,1) e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

===

RESPOSTAS

3. a) Hor.: $t = 0$; Vert.: $t = \pm 1$;

   b) Hor.: $t = 0$ ou $t = \sqrt[3]{2}$; Vert.: $t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

   c) Hor.: $t = \pm 1$; Vert.: $t = 0$ ou $t = 2$;

   d) Hor.: $t = \pm 1$; Vert.: $t = 0$ ou $t = -\frac{1}{2}$ ou $t = 2$.

5. $y = x$ e $y = -x$

6. (0,0); $y = x$ e $y = -x$.

9. a) $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$

   b) $L(\gamma_1) = 64\sqrt{5}$; $L(\gamma_2) = 2\sqrt{2}$; $L(\gamma_3) = \frac{\pi^2}{2}$.

10. a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y \leq x\}$

    b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \neq 0\}$

    c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$

    d) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | y > 0\}$

    e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

    f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x(y-x)(y+x) > 0\}$

    g) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} < 4\}$

12. a) família de planos paralelos;

    b) família de elipsóides com centro em $(0,0,0)$;

    c) família de hiperbolóides de uma ou duas folhas;

    d) família de cilindros hiperbólicos.

17. $X = (1,2,2) + \lambda(1,0,-2),\ \lambda \in \mathbf{R}$

18. $\gamma(t) = (\,\frac{1}{2}(1+\cos t), \frac{1}{2}\text{sen }t, \frac{1}{2}(1+\cos t)\,)\,,\ t \in [0,2\pi]$

19. $\gamma(t) = (2\text{sen }t\ \sqrt{1+\cos^2 t}\ , 2\cos^2 t\ , \sqrt{2}\cos t),\ t \in [0,2\pi]$

21. $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen }t, -\cos 2t),\ t \in [0,2\pi]$

22. (b) $\gamma(t) = (\dfrac{t^2-1}{4}, t, \dfrac{t^2+1}{2}),\ t \in \mathbf{R}$

24. $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\text{sen }t - 1, \text{sen }t - 1),\ t \in [0,2\pi]$

25. $X = (1,2,4) + \lambda(0,1,-8),\ \lambda \in \mathbf{R};\quad (1, \frac{3}{2}, 0)$

26. (a) não existe (b) não existe (c) não existe (d) 0
(f) (0) (g) 0 (h) não existe (i) 0 (j) não existe

28. 1

29. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2};\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{z-t};\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{t-z}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t) = \dfrac{y-x}{(z-t)^2};\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{(z-t)^2}$

30. b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

31. (b) Não é contínua em (0,0).

32. a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}f'(\frac{x}{y});\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2}f'(\frac{x}{y})$

b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by);\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by)$

33. -2

39. Não é diferenciável em (0,0).

40. (c) Não é diferenciável em (0,0).

41. (b) Não é diferenciável em (0,0) pois não é contínua em (0,0).

42. (a) $z = 1;\quad X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1),\ \lambda \in \mathbf{R}$

(b) $2x + y - z - 1 = 0;\quad X = (1,3,0) + \lambda(2,1,-2),\ \lambda \in \mathbf{R}$

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0;\quad X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1),\ \lambda \in \mathbf{R}$

(d) $e^3 y - z - e^3 = 0;\quad X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1),\ \lambda \in \mathbf{R}$

43. $x + 6y - 2z - 3 = 0$