

MAT1514 - A Matemática na Educação Básica

Trabalho: Volume da Pirâmide

Data de entrega: 07 de novembro de 2017

Seja $PQRSTUVX$ um paralelepípedo reto-retângulo de medidas $a = PQ (= SR = TU = VX)$, $b = PS (= QR = TX = UV)$, $c = PT (= QU = RV = SX)$.

Já vimos que o paralelepípedo pode ser dividido em três pirâmides, a saber $TPQRS$, $TQRUV$ e $TRSVX$, e provamos em aula que as pirâmides $TPQRS$ e $TQRUV$ têm volumes iguais.

O objetivo deste trabalho é provar (de maneira análoga) que as pirâmides $TRSVX$ e $TQRUV$ também têm volumes iguais.

Feito isso, poderemos concluir que cada o volume de cada pirâmide é exatamente um terço do volume do paralelepípedo, ou seja, $\frac{1}{3}abc$.

Enunciar todos os teoremas que irá usar, bem como verificar se as hipóteses estão satisfeitas.

1. As pirâmides $TQRUV$ e $TRSVX$ têm uma face em comum. Qual é ela?
2. Colocando-se as duas pirâmides sobre um plano γ que contém as faces comuns, tome um plano π , paralelo a γ , de modo que as intersecções com cada pirâmide seja não vazia.
3. A intersecção de π com a pirâmide $TQRUV$ é o quadrilátero de vértices A, B, C e D determinados pelas intersecções de π com os segmentos \overline{TV} , \overline{UV} , \overline{QR} e \overline{TQ} respectivamente. Faça uma figura.
4. Prove que esse quadrilátero é um trapézio retângulo. Quais ângulos são retos?
5. Escreva a fórmula para o cálculo da área do trapézio $ABCD$ em termos de seus lados.
6. Agora tome a intersecção do plano π com a pirâmide $TRSVX$. Mostre que essa intersecção é um trapézio retângulo de vértices M, N, Y e Z , determinados pelas intersecções de π com os segmentos \overline{TX} , \overline{XV} , \overline{RS} e \overline{TS} respectivamente.
7. Escreva a fórmula para o cálculo da área do trapézio $MNYZ$ em termos dos lados desse trapézio.
8. Verifique que os triângulos TUV e ABV são semelhantes e escreva a razão de semelhança r em termos dos lados correspondentes.
9. Escreva cada medida utilizada na área do trapézio $ABCD$ em termos dos comprimentos a, b e c e da razão de semelhança r .
10. Faça o mesmo com o trapézio $MNYZ$.
11. Conclua que as pirâmides $TQRUV$ e $TRSVX$ têm volumes iguais.