MAT1514 - A Matemática na Educação Básica
Exercícios resolvidos - Números Racionais e irracionais

Exercício 5. Verifique se $\sqrt[3]{10}$ é um número racional ou irracional. Justifique.
Solução: Suponha, por absurdo, que $\sqrt[3]{10}$ seja racional. Como $\sqrt[3]{10} > 0$, podemos supor que existem números naturais p e q tais que $\sqrt[3]{10} = \dfrac{p}{q}$. Portanto, $10 = \dfrac{p^3}{q^3}$, ou seja, $10\,q^3 = p^3$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, os números p e q podem ser escritos como produto de fatores primos, de modo único a menos da ordem. Sejam $p = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ e $q = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}$ suas decomposições em fatores primos.

Portanto, a igualdade $10\,q^3 = p^3$ pode ser reescrita na forma

$$2 \cdot 5 \cdot q_1^{3\beta_1} \cdot q_2^{3\beta_2} \cdots q_m^{3\beta_m} = p_1^{3\alpha_1} \cdot p_2^{3\alpha_2} \cdots p_n^{3\alpha_n}$$

Note que cada lado da igualdade acima é a decomposição de um mesmo número como um produto de fatores primos. Vamos provar que elas não podem ser iguais, contradizendo assim o Teorema Fundamental da Aritmética.

Se nenhum dos números primos q_i for igual a 2, então, no lado esquerdo da igualdade acima, o fator 2 aparece apenas uma vez. Caso, para algum índice i, o primo q_i for igual a 2, então o fator 2, irá aparecer $3\beta_i + 1$ vezes na decomposição.

No lado direito da igualdade, o fator 2 poderá não aparecer nenhuma vez ou irá aparecer $3\alpha_j$ vezes, caso $p_j = 2$ para algum j.

Assim, o expoente de 2 no lado esquerdo da igualdade é da forma $3x + 1$, para algum $x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ e o expoente de 2 no lado direito da igualdade é da forma $3y$, para algum $y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

Para valer a unicidade da decomposição do número $10q^3 = p^3$, os expoentes de 2 nas duas decomposições deveriam ser iguais, isto é, deveríamos ter $3x + 1 = 3y$. Mas $3x + 1 = 3y \iff 1 = 3(y - x)$, o que é impossível para x e y inteiros positivos.

Assim, podemos concluir que $\sqrt[3]{10}$ é irracional.

Exercício 7. Sabe-se que se p é um número primo e n é número natural maior que 2 então $\sqrt[n]{p}$ não é racional. Por quê?
Solução: Suponhamos que $\sqrt[n]{p}$ seja racional. Logo, existem números naturais a e b tais que $\sqrt[n]{p} = \dfrac{a}{b}$. Portanto, $p = \dfrac{a^n}{b^n}$, ou seja,

$$p \cdot b^n = a^n \tag{1}$$

Fazendo-se a decomposição dos números a e b em fatores primos, o primo p pode aparecer ou não nessas decomposições. Dessa forma, podemos dizer que $a = p^\alpha \cdot c$ e $b = p^\beta \cdot d$, em que os expoentes α e β podem ser iguais a 0, 1, 2, … e os números c e d são iguais aos produtos de todos os fatores primos diferentes de p que aparecem nas decomposições de a e de b respectivamente.

A equação (1) pode ser escrita como:

$$p \cdot (p^{n\beta} \cdot d^n) = (p^{n\alpha} \cdot c^n)$$

ou ainda

$$p^{n\beta+1} \cdot d^n = p^{n\alpha} \cdot c^n$$

Os expoentes de p que aparecem na última igualdade acima não podem ser iguais, quaisquer que sejam α e β pois, no lado direito, o expoente de p é múltiplo de n e o expoente de p no lado esquerdo nunca será múltiplo de n. Portanto, essa igualdade não pode ser verdadeira, pois contraria a unicidade da decomposição de um número em fatores primos, garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética.

Portanto, podemos concluir que $\sqrt[n]{p}$ é irracional.

Exercício 8. Decida de cada afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

a) Uma fração irredutível cujo denominador é um número primo tem representação decimal infinita e periódica.

b) Se p e q são números primos distintos então $\sqrt{pq}$ não é racional.

Solução:

a) Já vimos em aula que se uma fração irredutível que tem demoninador em que aparecem fatores diferentes de 2 e de 5, então a representação decimal será infinita e periódica.

Quando uma fração irredutivel tem denominador cujos fatores primos são apenas 2 e 5, podemos multiplicar numerador e denominador por um número potência de 2 ou 5 de modo que o denominador fique uma potência de 10. Dessa forma, o número terá uma representação decimal finita. Por exemplo,

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{15}{100} = 0,15$$

Mas a representação decimal desse número não é única! Da mesma forma como $1 = 0,999\ldots = 0,\overline{9}$, podemos escrever $0,15 = 0,14999\ldots = 0,14\overline{9}$

Portanto, toda fração admite uma representação decimal infinita e periódica.

b) Verdadeiro. A demonstração é análoga à feita nos exercícios 5 e 7.

Exercício 9.

a) Dê três exemplos de pares de números naturais k e n tais que $\sqrt{kn}$ não é racional.

b) Sejam k e n números naturais tais que $\sqrt{kn}$ não é racional. Prove que $\sqrt{k}+\sqrt{n}$ não é racional.

Solução:

a) Exemplo 1: $k=2, n=3$; $\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$ é irracional;
Exemplo 2: $k=3, n=5$; $\sqrt{3\cdot 5}=\sqrt{15}$ é irracional;
Exemplo 3: $k=5, n=7$; $\sqrt{5\cdot 7}=\sqrt{35}$ é irracional.

b) Vamos demonstrar que se k e n são naturais tais que $\sqrt{kn}$ é irracional, então $\sqrt{k}+\sqrt{n}$ é irracional.
Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{k}+\sqrt{n}$ seja um número racional r. Então $r^2=(\sqrt{k}+\sqrt{n})^2$, ou seja, $k+2\sqrt{kn}+n=r^2$. Logo, $2\sqrt{kn}=r^2-k-n$. Mas r^2-k-n é um número racional. Dividindo dos 2 lados por 2, o lado direito continua racional e o lado esquerdo, por hipótese, é irracional, o que leva a uma contradição. Assim, concluímos que $\sqrt{k}+\sqrt{n}$ é irracional.

Exercício 11. Dê exemplo de três racionais entre $a=\sqrt{2}$ e $b=\sqrt{2}+10^{-3}$, lembrando que $\sqrt{2}\approx 1,41421356$. É possível encontrar mais racionais entre a e b? Quantos?
Solução: Há muitas possibilidades de resposta para a primeira parte. Uma delas é tomarmos os racionais $r_1=1,41422, r_2=1,41423$ e $r_3=1,41424$ que são claramente maiores do que a e menores do que $b\approx 1,41\mathbf{5}21356$.

É possível encontrar infinitos outros racionais entre a e b. Por exemplo, podemos tomar médias de dois dos racionais já encontrados, por exemplo, podemos tomar
$m_1=\frac{r_1+r_2}{2}(\in\mathbb{Q})$ que está entre r_1 e r_2, e, portanto, entre a e b; e depois,
$m_2=\frac{r_1+m_1}{2}(\in\mathbb{Q})$, que está entre r_1 e m_1, e, portanto, entre a e b;
$m_3=\frac{r_1+m_2}{2}(\in\mathbb{Q})$, que está entre r_1 e m_2, e, portanto, entre a e b; e assim por diante!

Exercício 13.

d) O número $\pi+10^{-10}$ é racional ou irracional?

f) Entre os números π e $\pi+10^{-10}$ existe um racional? Dê um exemplo.

Solução:

d) É irracional pois a soma de um irracional (π) com um racional ($10^{-10}=\frac{1}{10^{10}}$) é irracional. (Você sabe provar isso?)

f) Sim, existe um racional entre π e $\pi+10^{-10}$. Vejamos:

uma aproximação de π com 12 casas decimais é $3,141\ 592\ 653\ 589$ e uma aproximação de $\pi+10^{-10}$, também com 12 casas decimais, é $3,141\ 592\ 653\ \mathbf{6}89$

Assim, podemos escolher facilmente alguns números racionais entre π e $\pi+10^{-10}$, a saber: $3,141\ 592\ 653\ 59$; $3,141\ 592\ 653\ 591$; $3,141\ 592\ 653\ 592$; ... ou ainda $3,141\ 592\ 653\ 60$; $3,141\ 592\ 653\ 601$; $3,141\ 592\ 653\ 602, \ldots$

Exercício extra.

a) Sejam x e y números irracionais tais de $x^2 - y^2$ é racional não nulo. Mostre que $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais.

b) O número $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ é racional ou irracional? Por quê?

Solução:

a) Sabemos que o produto de um número irracional com um número racional não nulo é sempre irracional. Assim, como $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ é racional, há duas possibilidades: ou ambos os fatores são racionais ou ambos são irracionais.

   Se $x + y$ e $x - y$ fossem ambos racionais, então sua soma seria racional. Mas $(x + y) + (x - y) = 2x$ é irracional pois x é irracional. Portanto, $x + y$ e $x - y$ não podem ser racionais. Logo, ambos são irracionais.

b) Aplicamos o resultado do item (a) para $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{7}$. Temos $x^2 - y^2 = 2 - 7 = -5 \in \mathbb{Q}$. Pelo item (a), a soma $x + y$ é irracional.