MAT1514 - A Matemática na Educação Básica

Binômio de Newton e Triângulo de Pascal

Texto adaptado de notas de aula de curso ministrado por Cristina Cerri e Daniel Cérgoli

Introdução

O desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ começou há pelo menos dois milênios. Ele já era conhecido no caso $n = 2$ pelos antigos gregos, tendo sido tratado na obra *Os Elementos*, de Euclides.

Os coeficientes que aparecem no desenvolvimento de $(1+x)^n$ são conhecidos como números binomiais e estão associados ao *Triângulo de Pascal*.

Sabe-se hoje que o Triângulo de Pascal já era conhecido na China no século XI. Também há registros em que aparece o Triângulo de Pascal em textos matemáticos indianos de 200 a.C. e da antiga Pérsia.

Blaise Pascal (1623-1662) escreveu, em 1653, o *Traité du Triangle Arithmétique*, publicado postumamente em 1665. Nesse trabalho, ele apresenta algumas relações envolvendo os números do triângulo, aplicando-as em problemas de probabilidade. Foi o matemático *Abraham de Moivre* quem usou, em um de seus trabalhos, no ano de 1739, a denominação *Triangulum arithmeticum pascalianum* para o triângulo aritmético, tornando a denominação "Triângulo de Pascal"popular na Inglaterra e França.

Na escola básica o Triângulo de Pascal é pouco explorado. Frequentemente é apenas associado ao Binômio de Newton e poucas relações entre seus elementos são trabalhadas. As relações numéricas que aparecem surpreendem e podem constituir temas motivadores para sala de aula.

Um exemplo esclarecedor

Consideremos um jogo de moedas em que são jogadas quatro moedas simultaneamente e o vencedor será o que conseguir obter exatamente três caras e uma coroa. Quantas são as possíveis combinações ganhadoras?

Vamos denotar por K a face "cara" da moeda e por C a face "coroa". Assim, as combinações vencedoras serão $KKKC$, $KKCK$, $KCKK$ e $CKKK$.

Note que essa é a quantidade de anagramas de $KKKC$, que sabemos ser $\dfrac{4!}{3!} = 4$. (Certifique-se de que você sabe por quê!)

Se, em vez disso, as combinações ganhadoras forem aquelas com exatamente duas caras e duas coroas, o total de combinações ganhadoras seria $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

Observe ainda que o número de combinações com exatamente três coroas (e uma cara) também é 4. (Por quê?)

De modo geral, em um jogo com n moedas jogadas simultaneamente, se r é o número de caras (ou de coroas) que se deseja, então o número de combinações vencedoras é exatamente $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$. Essa expressão é conhecida como *coeficiente bimomial* e denotado por $C_{n,r}$ ou também por $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$.

É claro que se r é o número de caras (ou coroas), então $n-r$ é o número de coroas (respectivamente, caras). Logo,

$$C_{n,r} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix} = C_{n,n-r}$$

Por outro lado, quando lançamos n moedas simultaneamente, a quantidade total de resultados possíveis é 2^n, pois cada moeda pode aparecer como cara ou coroa. Portanto, calculando-se a soma de todas as combinações possíveis é de se esperar que

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots C_{n,n} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n$$

Vamos agora olhar o resultado de lançamentos de moedas sob outro ponto de vista.

Jogando duas moedas, temos $2^2 = 4$ resultados possíveis, a saber $KK + KC + CK + CC$. Também sabemos que, KC e CK são ambas equivalentemente vencedoras, quando a regra for "vence quem tiver exatamente 1 cara e 1 coroa". Assim podemos considerar que $KC = CK$. Desse modo, temos $KK + KC + CK + CC = \mathbf{1}KK + \mathbf{2}KC + \mathbf{1}CC = (K+C)(K+C)$.

No caso de jogarmos três moedas sabemos que existem $2^3 = 8$ resultados possíveis, e que as combinações KKC, KCK e CKK são "iguais" para o nosso propósito. Também são iguais as combinações KCC, CKC, CCK. Assim, o total de resultados possíveis é

$$\begin{aligned} KKK + 3KKC + 3KCC + CCC &= (K+C)(K+C)(K+C) \iff \\ \mathbf{1}K^3 + \mathbf{3}K^2C + \mathbf{3}KC^2 + \mathbf{1}C^3 &= (K+C)^3 \end{aligned}$$

Observe que os números em negrito são os coeficientes dos termos do tipo $K^a\,C^b$.

Generalizando para n moedas, e identificando-se as combinações que têm o mesmo número r de caras (K) e $n-r$ de coroas (C), então cada combinação aparece $C_{n,r}$ vezes. Portanto, em geral, temos que

$$\begin{aligned} (K+C)^n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} K^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} K^{n-1}C + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} K^{n-2}C^2 + \cdots + \\ \cdots &+ \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} KC^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} C^n \end{aligned}$$

Note que usamos, por convenção, que $0! = 1$.

Esta fórmula é conhecida como **Binômio de Newton**.

É interessante saber que *Isacc Newton* (1642-1727) fez uma fórmula para desenvolvimento de $(a+b)^x$, para *x racional*. A fórmula para o desenvolvimento da expressão $(a+b)^n$ para n natural já era conhecida anteriormente.

O Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é obtido por meio dos coeficientes binomiais, colocando-os em linhas da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Observe que os coeficientes que aparecem na linha n do triângulo são os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$.

Propriedades interessantes

1. Se somarmos dois elementos consecutivos em uma linha n qualquer, digamos os termos p e $(p+1)$, o resultado será o termo $(p+1)$ da linha $n+1$. Verifique:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
$$

Será fácil deduzir o caso geral? O que precisamos provar?

...

Essa relação é conhecida como **Relação de Stifel**: $C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}$
Demonstre que ela é válida para todo n e todo p.

Teorema das diagonais

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & & & \ddots
\end{array}$$

Esse teorema ensina que, a partir do primeiro termo de uma linha n qualquer, se somarmos uma quantidade finita p de termos em diagonais consecutivas, o resultado será o termo $(p+1)$ da linha $n+p+1$. Isto é,

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + C_{n+2,2} + \cdots + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,p+1}$$

3. O triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci

Se traçarmos linhas diagonais do canto superior direito na direção do inferior esquerdo, as somas dos elementos de cada uma dessas linhas diagonais formam, uma a uma, a sequência de Fibonacci! Verifique!

Referência Bibliográfica:

Cristina Cerri, Daniel Cérgoli, *Análise combinatória sem fórmulas, enfatizando a habilidade em resolver problemas*, Notas de aula, CAEM-IME-USP, 2011.