MAT-121 - Cálculo II

Lista de exercícios - Integrais Impróprias - 27 de agosto de 2001

1. Estudar a convergência das integrais impróprias abaixo:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

(g) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt[4]{4-x^2}}dx$ (h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{x^9+12x-1}}dx$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt[5]{x^4+3x+1}}{3x^4+2}dx$ (j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-2\sin x}{x^5+2x+1}dx$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^4-2\sin x}{x^5+2x+1}dx$

2. Suponha que $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ é convergente. Mostre que, para quaisquer a e b vale:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

3. Mostre que $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

4. Determine para que valores de p cada integral converge:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-p|x|}dx$ (b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 x^p\ln x\,dx$

5. (a) Calcule $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

(b) Tente adivinhar qual seria o valor de $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ para um número n inteiro positivo arbitrário.

(c) Prove seu palpite usando indução.

6. (a) Mostrar que a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ é convergente;

(b) Decidir se a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ é convergente ou divergente;

(c) Mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ existe e é número real.

7. Decidir se as integrais $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x\,dx$ e $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^2}$ são convergentes ou divergentes. Cuidado: pense duas vezes antes de responder!

8. Decidir se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contra-exemplo.
Suponha f uma função definida para todo $x \geq 1$ (não necessariamente positiva) e suponha que, para cada n inteiro positivo, a integral

$$I_n = \int_1^n f(t)dt$$

exista.

(a) Se $\lim_{n\to\infty} I_n = L$ então a integral $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ é convergente.

(b) Se $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ é convergente, e $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(c) Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e se $\lim_{n\to\infty} I_n = L$, então $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ é convergente.

9. **Função Gama.** Defina, para $s > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt.$$

(a) Mostre que a integral acima é convergente tanto para $s \geq 1$ como para $0 < s < 1$.

(b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

(c) Use indução para mostrar que, para todo n inteiro positivo, tem-se $\Gamma(n+1) = n!$

(d) Mostre que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Use o fato que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.