1^a LISTA DE EXERCÍCIOS DE MAT 121
IME - BÁSICO - 2^o semestre de 2001

1. Uma partícula desloca-se sobre o eixo Ox com velocidade $v(t) = t^2 - 2t - 3$. Calcule o espaço percorrido e o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

2. Seja $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ integrável. Usando a definição de integral, prove que se f é par então $\int_{-r}^{0} f(x)dx = \int_0^r f(x)dx$ e que se f é ímpar $\int_{-r}^{r} f(x)dx = 0$.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 2 & se \quad x \in [0,1[\\ 5 & se \quad x = 1 \\ 1 & se \quad x \in]1,2] \end{cases}$. Usando a definição de integral, prove que $\int_0^2 f(x)dx = 3$. (Por exemplo, quando $\epsilon = 10^{-3}$, como deve ser δ)?

4. Seja $f(x) = 1$ se $x = \frac{1}{n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 0$, caso contrário. Calcule $\int_0^1 f(x)dx$

5. Decida se existe $\int_0^1 f(x)dx$. Justifique:

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6. Seja $F(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   (a) Calcule $F'(x)$.

   (b) Seja $f(x) = F'(x)$. Prove que f não é limitada em [0,1]. Sugestão: calcule $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right)$

   (c) f é integrável em [0,1]? f tem primitiva em [0,1]?

7. Em cada um dos casos abaixo, faça um gráfico de $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, encontre os pontos onde F é derivável e calcule F' onde existir. Além disso, verifique se $F'(x) = f(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ -1 & se \quad x \leq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ -x & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 1 \\ 2x - 1 & se \quad x > 1 \end{cases}$

(Lembre que $\int_a^a f(x)dx = 0$ e se $a > b$ $\int_a^b f(x)dx$ é, por definição , $-\int_b^a f(x)dx$)

8. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do círculo $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$.

9. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox da região $R = \{(x, y) : y \geq \sqrt{x}$ e $(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

10. Encontre o volume da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ que fica acima do plano $z = h$ onde $0 < h < R$.

11. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região $\{(x, y) : x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$ em torno da reta $y = 1$.

12. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Oy da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x^2+2}}$ $\quad x \in [0, 4]$.

13. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Oy, da região $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq e, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad y \geq \ln x\}$.

14. Calcule o comprimento do gráfico de:

    a) $f(x) = \sqrt{x} \qquad x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$

    b) $f(x) = \ln x \qquad x \in [1, e]$

15. Prove que se $f : [a,b] \to I\!R$ é contínua, tal que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ então $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

16. Calcule $F'(x)$ onde existir. Justifique:

a) $\displaystyle\int_{2x}^{x} \cos(t^2)dt$ b) $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x^2+1}}^{x^3} x^2 e^{t^2} dt$ c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^4}^{0} (x-t) \text{ sen } t^4 dt$

17. Seja $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$. Mostre que existe $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx$ e calcule essa integral (sugestão: partes).

18. Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{n \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}dt$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\text{sen } t}{t} dt$

19. (a) Prove que se $f : [a,b] \to I\!R$ é contínua então existe $c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (T.V.M. para integral).

(b) Interprete geometricamente o resultado (a).

(c) Encontre c como no item (a) para $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

d) Existe c como no item (a) para $f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 1 & se \quad x > 0 \end{cases}$ $a = -1, \quad b = 1$?

20. Suponha $x \text{ sen } (\pi x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt$ onde f é contínua. Calcule $f(4)$.

21. Prove que $\displaystyle\frac{1}{17} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x^4} dx \leq \frac{7}{24}$.

22. Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$

b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n+n}}$.

23. Suponha f contínua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ $f'(x) > 0$ e $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Calcule $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(y)dy$.