Bacharelado em Física Diurno
Cálculo Diferencial e Integral I - 6ª lista de exercícios

Miscelânea

1. Seja f tal que $f'''(x) > 0,\ \forall x \in]a,b[$. Suponha que exista $c \in]a,b[$ tal que $f''(c) = f'(c) = 0$. Prove que f é estritamente crescente em $]a,b[$.

2. Sejam f uma função derivável em um intervalo I e $a, b \in I$. Suponha que $f'(a)$ e $f'(b)$ têm sinais contrários. Prove que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$. Cuidado: Nada se sabe sobre a continuidade de f'.

3. Seja f uma função derivável em $\mathbf{R}$. Sejam a, b tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que se $f'(a)$ e $f'(b)$ têm sinais iguais, então existe c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

4. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 7x - 3}{2 - x + 5x^2 - 4x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3}\right)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{2-x}{(1-x)^3}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x})$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$ (m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^4+1})$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{7x^6 + 5x^4 + 7}}{x^4 + 2}$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$ (p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 + 2x - 8}{\sqrt{x^6 + x + 1}}$

Resp.: (a) $+\infty$; (b) $-\dfrac{1}{2}$; (c) 0; (d) $\dfrac{1}{3}$; (e) 1; (f) $\nexists$; (g) $-\infty$; (h) $-\infty$; (i) -1; (j) $-\dfrac{1}{2}$; (l) 1; (m) $-\infty$; (n) 0; (o) 0; (p) $+\infty$.

5. Sabendo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

6. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x \right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \underbrace{\left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} - 1 \right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} (x \cdot 0) = 0$$

7. Dê exemplos de funções f e g tais que:

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 1$.

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] \neq 0$.

8. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

Resp.: (5,0) e (-5,0)

9. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ que estão mais próximos de (0,1).

Resp.: $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$

10. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

Resp.: $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$.

11. Seja f derivável em $\mathbf{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que p é ponto de máximo local de g.

a) Prove que $p\,f'(p) - f(p) = 0$.

b) Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p passa pela origem.

12. Determine a constante a tal que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha:

(a) Um mínimo local em $x = 2$.

(b) Um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

Resp.: (a) 16 (b) -54

13. Decida se cada função abaixo tem máximo ou mínimo no intervalo dado. Em caso afirmativo, determine-o(s).

a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$.

b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3},\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x,\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$.

14. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função derivável até segunda ordem e seja $a \in \mathbf{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique:

(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Se $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

15. Esboce o gráfico de:

(a) $f(x) = x^x$

(b) $f(x) = \begin{cases} x\, e^{1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = x^2 \ln x$

(d) $f(x) = x^{1/x}$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(f) $f(x) = e^x - e^{3x}$

(g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

(h) $f(x) = x - 3 \ln x - \dfrac{2}{x}$

(i) $f(x) = x^2 e^{-x}$

16. Determine, em função de k, o número de soluções da equação $ke^x = x^2$.

17. (a) Ache o mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $(0, +\infty)$. Resp. $x = 1$.

(b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*$.

18. Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$?
Resp.: $a \leq e^{1/e}$.

19. Uma folha de papel retangular de 8,5 $\times$ 11 polegadas é colocada em uma superfície plana. Dobra-se o papel de modo que um dos vértices fique sobre o lado maior oposto a esse vértice. Experimente fazer isso com papel. O problema é achar em que ponto do lado maior deve ficar o vértice, de modo que o comprimento do vinco (L) seja o menor possível.

a) Demonstre que $L^2 = 2x^3/(2x - 8,5)$.

b) Que valor de x minimiza L^2? Resp.: $\frac{51}{8}$.

c) Qual é o valor mínimo de L? Resp.: $\frac{51\sqrt{3}}{8}$.

20. Um triângulo isósceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

21. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ seja válida para todo número positivo x? Resp.: $a = 2$

22. Uma pirâmide tem base quadrada e quatro faces triangulares com igual inclinação. Se a área total da base e das faces é dada, mostre que o volume é máximo quando a altura é $\sqrt{2}$ vezes a aresta da base.

23. Um cilindro é gerado girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

Resp.: $\frac{\pi}{4}$

24. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.

Resp.: (a) Deve-se formar apenas um quadrado.

(b) o lado do quadrado é $\dfrac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$.

25. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?

Resp.: $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

26. Uma corda PRS está presa em dois postes verticais PQ e ST, indo do topo de PQ a um ponto R no solo entre os postes e depois ao topo de ST. Prove que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos que os segmentos PR e RS respectivamente formam com o chão. (Compare com o problema 21 em 9.6 do livro texto.)

27. Um canhão, situado no solo, é colocado formando com o chão um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bola. Mostre que r é dado por $f = \dfrac{2v^2}{g}\text{sen }\theta \cos\theta$, onde v e g são contantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

Resp.: $\theta = \frac{\pi}{4}$

— Além disso, resolva os seguintes exercícios do livro do Guidorizzi:

Exercícios 9.4 (pag. 256): 1 (escolha vários ítens), 3, 4.

Exercícios 9.5 (pag. 271): 3, 5, 6, 7, 10, 11, 16