Bacharelado em Física Diurno
Cálculo Diferencial e Integral I - 5ª lista de exercícios

Funções exponencial e logaritmo. Teorema do Valor Médio e conseqüências.

Problemas

1. Calcule os limites abaixo, justificando todas as passagens:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$ (Resp.: $\frac{1}{e^2}$)

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+1} \right)^{x^2}$ (Resp.: e^2)

(c) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x$, $c \neq 0$ (Resp.: e^{2c})

(d) $\lim_{x \to +\infty} [\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}]$ (Resp.: 1)

2. Seja $y = f(x)$ a função dada por $f(x) = 2x^3 + \ln x,\ x > 0$ e seja $x = g(y)$ a sua inversa.

(a) Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$.

(b) Calcule $g'(2)$

3. Seja $y = f(x)$ a função dada por $f(x) = e^x + \ln x$ e seja $g(x) = f^{-1}(x)$. Ache $g'(e)$.

4. A função que a cada número real x associa o valor dado por $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ é conhecida por *cosseno-hiperbólico* de x, e indicada por $\cosh x$. Assim,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A função *seno-hiperbólico* é definida por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) Mostre que $(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1,\ \forall x \in \mathbf{R}$.

(b) Verifique que a função $y = \cosh x$ é par e que $y = \operatorname{senh} x$ é ímpar.

(c) Determine a derivada de $y = \cosh x$ e de $y = \operatorname{senh} x$.

(d) Mostre que $y = \operatorname{senh} x$ é inversível e ache sua inversa.

(e) Esboce o gráfico de $y = \cosh x$.

5. A *catenária* é a curva determinada por um fio flexível de densidade constante, apoiado em dois pontos, sofrendo apenas a ação da gravidade. Essa curva pode ser observada nos cabos entre postes, nas ruas da cidade. Galileu (1564-1642) acreditava que tal curva descrita seria uma parábola. Pode ser demonstrado que, quando um cabo é pendurado entre dois postes, ele toma a forma do gráfico de uma função $y = f(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y'' = \frac{dg}{T}\sqrt{1 + (y')^2} \qquad (*)$$

onde as constantes d, g e T são respectivamente a densidade linear do cabo, a aceleração da gravidade e a tensão no cabo no ponto mais baixo da curva. A solução dessa equação, determinada por Leibniz, Huygens e Jean Bernoulli em 1691, é a função $f(x) = \dfrac{T}{dg}\cosh(\dfrac{dg}{T}x)$.
Verifique que f dada acima é, de fato, solução da equação diferencial (*).

6. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ (b) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}$ (c) $f(x) = e^{(e^x)}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{e^{(x^2)}}$ (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2$ (h) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (i) $f(x) = \ln(\ln x)$

(j) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (k) $f(x) = x^\pi + \pi^x$ (l) $f(x) = x^{(x^x)}$

(m) $f(x) = 2^{(x^2)} + 3^{2x}$ (n) $f(x) = (1 + e^x)^{(x^2)}$ (o) $f(x) = (2x + 1)^x$

(p) $f(x) = x\operatorname{arctg} x$ (q) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^3)$ (r) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$

(s) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$ (t) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$ (u) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$

(v) $f(x) = (1 + \cos^2 x)^{\operatorname{sen} x}$

7. Use o Teorema do Valor Médio (TVM) para provar que valem as seguintes desigualdades:

(a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|, \ \forall a, b \in \mathbf{R}.$

(b) $|\sqrt{b} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2}|b - a|, \ \forall a, b \in \mathbf{R}, \text{ com } a, b \geq 1.$

(c) $|\ln \frac{a}{b}| \leq |a - b|, \ \forall a, b \in \mathbf{R}, \text{ com } a, b \geq 1.$

(d) $b^b - a^a > a^a(b - a), \ \forall a, b \in \mathbf{R}, \text{ com } 1 \leq a < b.$

8. Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

9. Esboce o gráfico de cada uma das funções:

(a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ (b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

(c) $f(x) = x^4 - 2x^3$ (d) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 + 9}$

(e) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ (f) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

(g) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ (h) $f(x) = \sqrt{3 + |x - 4|}$

10. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi}{2}x) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

11. Mostre que, para qualquer constante c, a equação $x^3 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-1, 1]$.

12. Mostre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para todo $x > 0$.

13. Prove que valem as seguintes desigualdades:

(a) $e^\pi > \pi^e$

(b) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \ \forall x > 1.$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \dfrac{b}{a}, \quad \text{se } 0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}, \ \forall x > 0.$