A CATENÁRIA

O objetivo deste texto é o de mostrar como determinar a forma exata da curva assumida por uma corda flexível de densidade uniforme que é suspensa entre dois pontos. Essa curva é chamada **Catenária**, da palavra latina *catena*, para cadeia.

- Escolha um sistema de coordenadas cartesiano, de modo que o eixo dos y passe pelo ponto P_0, o mais baixo da corda, e seja ortogonal à curva nesse ponto. Note que a curva é simétrica em relação ao eixo dos y assim escolhido.
- Tome um outro ponto P qualquer da curva e denote por S o comprimento da curva, de $P_0 = (0, k)$ a $P = (x, y)$. Seja ω_0 a densidade linear (peso/unidade de comprimento) da corda.

A parte da corda entre P_0 e P está em equilíbrio estático sob a ação de três forças:

(i) a tensão T_0 em P_0;

(ii) a tensão T em P, que atua na direção da tangente, devido à flexibilidade da corda;

(iii) o peso da corda: $\omega_0 \cdot S$.

Seja θ o ângulo determinado pela reta tangente à curva em P e o eixo dos x. Como a corda está em equilíbrio estático temos:

$$T \operatorname{sen} \theta = \omega_0 \cdot S; \quad T \cos \theta = T_0.$$

Portanto, $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{\omega_0 \cdot S}{T_0}$.

Chamemos de f a função que queremos achar (cujo gráfico é a catenária). Vamos supor que f é uma função par, de classe $\mathcal{C}^2$. Temos:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \theta = \frac{\omega_0 \cdot S}{T_0}.$$

Note que S é função de x. Por isso vamos escrever:

$$f'(x) = \frac{\omega_0}{T_0} \cdot S(x). \tag{1}$$

Aprenderemos ainda neste semestre que o comprimento do gráfico de uma função $y = f(t)$ para $a \leq t \leq b$ é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Assim, o comprimento do arco, de P_0 até P é

$$S(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt,$$

e, substituindo na equação (1) obtemos:

$$f'(x) = \frac{\omega_0}{T_0} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo (que relaciona derivada e integral) temos:

$$f''(x) = \frac{\omega_0}{T_0} \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}. \tag{2}$$

Obtivemos então uma equação diferencial cuja solução é a função que tem como gráfico a catenária. Vamos ver como resolvê-la. Para simplificar a notação, chamemos $C = \frac{\omega_0}{T_0}$ e $g(x) = f'(x)$. A equação (2) acima fica:

$$g'(x) = C\sqrt{1 + (g(x))^2} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + (g(x))^2}} = C.$$

Portanto, por primitivação, temos que $\ln[g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2}] = Cx + D$. Como $g(0) = 0$, temos $D = 0$. Portanto, a função g é a função que satisfaz:

$$\ln[g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2}] = Cx \Leftrightarrow g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2} = e^{Cx}.$$

Lembrando que $g = f'$ e que f é uma função par, concluímos que g é uma função ímpar (por que?). Assim obtemos:

$$g(-x) + \sqrt{1 + (g(-x))^2} = e^{-Cx} \Leftrightarrow -g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2} = e^{-Cx}.$$

Subtraindo termo a termo da equação $g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2} = e^{Cx}$ temos:

$$2g(x) = e^{Cx} - e^{-Cx} = 2 \operatorname{senh}(Cx),$$

ou seja,

$$f'(x) = \operatorname{senh}(Cx),$$

o que implica que

$$f(x) = \frac{1}{C}\cosh(Cx) + k.$$

A expressão dada por $y = \frac{1}{C}\cosh(Cx)$ é chamada equação da catenária.
A constante k que aparece no final só depende da escolha feita na colocação do eixo dos x.

Um pouco mais sobre as funções hiperbólicas.

Definimos

$$\operatorname{senh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \text{e} \quad \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

É fácil verificar que

1. a função seno-hiperbólico é ímpar e a função cosseno-hiperbólico é par;
2. $\cosh t \geq 0, \forall t$;
3. $(\operatorname{senh} t)' = \cosh t; \quad (\cosh t)' = \operatorname{senh} t.$
4. o par $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ satisfaz a equação da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ (daí os nomes!)

Com as informações acima e um pouco de cálculo integral, conseguimos deduzir o comprimento de um fio que fica apoiado em dois postes. Supondo que o sistema de coordenadas é escolhido como anteriormente, se o Poste 1 fica sobre a reta de equação $x = a$ e o Poste 2 fica sobre a reta $x = b$ então o comprimento do fio é:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1 + [(\frac{1}{C}\cosh(Cx) + k)']^2} dx = \quad \text{(por (3) + a regra da cadeia)} \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + [\operatorname{senh}(Cx)]^2} dx = \quad \text{(por (4))} \\
&= \int_a^b \sqrt{[\cosh(Cx)]^2} dx = \\
&= \int_a^b \mid \cosh(Cx) \mid dx = \quad \text{(por (2))} \\
&= \int_a^b \cosh(Cx) dx = \quad \text{(por (3))} \\
&= \frac{1}{C}(\operatorname{senh}(Cb) - \operatorname{senh}(Ca)) \quad \text{(pelo Teorema Fundamental do Cálculo).}
\end{aligned}
$$