Notas de aula - MAT0315 - Introdução à Análise Real

Martha Salerno Monteiro
IME-USP

Em cursos de cálculo, algumas ideias são apresentadas de modo intuitivo e informal. Historicamente, foi desse modo, intuitivo e informal, que certos conceitos foram criados. Entretanto, alguns avanços na teoria passaram a exigir maior precisão e rigor para que certas questões fossem esclarecidas, o que aconteceu de modo gradual a partir de 1820. A esse estudo mais rigoroso e profundo dos números e suas funções damos o nome de *Análise Real*.

Além das ideias da análise matemática, estas notas de aula têm também uma meta especial, que é mostrar, sempre que possível, a relação entre conhecimentos estudados em análise real e tópicos de matemática elementar ministrados nas aulas no ensino básico.

Algumas partes destas notas têm a forte influência do livro *Calculus*, de Michael Spivak [7] que, em minha opinião, aborda os vários conceitos de forma clara e objetiva.

Outro autor que admiro bastante, é *Walter Rudin*. Seu livro [6] apresenta a análise de maneira rigorosa e abstrata, exigindo maturidade do leitor. O livro do Prof. *Ávila* [1] contém valiosas notas históricas que tornam sua leitura bastante interessante e agradável.

Os livros do Prof. *Guidorizzi* se tornaram referências nacionais em cursos de cálculo. Os volumes 1 e 4 ([2], [3]) tratam de tópicos que serão estudados neste curso, e serão muito úteis.

Acredito que um professor deva transmitir a seus alunos a percepção da Matemática não apenas como um conhecimento científico, mas também como uma conquista social e cultural. Muitos problemas relevantes para a humanidade foram solucionados com idéias originais envolvendo a criação de conceitos e o desenvolvimento de novas técnicas. O conhecimento e a reflexão sobre tais questões no passado permite que se tenha uma noção da real dificuldade do assunto a ser trabalhado em sala de aula.

Além disso, ter clareza de que a Matemática foi desenvolvida ao longo de muitos séculos e contou com a contribuição de muitos homens é também uma lição a ser passada para os alunos, que, com isso, conseguem perceber um lado mais humanizado, realista e desmistificado da Matemática. As invenções e descobertas vieram como consequência de reflexões sobre problemas que precisavam de solução e, na maioria dos casos que conhecemos, surgiram como aprimoramentos de ideias de outros. O conhecimento de parte dessa imensa construção que ainda está sendo

feita faz diferença na vida profissional dos professores e, como consequência, na formação de seus alunos.

Capítulo 1

Números Reais

O que realmente sabemos sobre os números reais?

De acordo com *Walter Rudin*, em seu livro "Princípios de Análise Matemática", uma discussão satisfatória dos principais conceitos de análise devem estar baseados em um conceito de número definido de forma precisa.

Não é objetivo deste curso discutir axiomas da aritmética. Por isso, iremos assumir conhecidos o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Entretanto há algumas questões delicadas relacionadas ao conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ que precisam ser esclarecidas.

1.1 Representação Decimal de Números Racionais

Como todos devem se lembrar, é ensinado no Ensino Fundamental que se o denominador de uma fração é uma potência de dez, então esse número pode ser representado na forma decimal. Por exemplo, as frações $\frac{3}{10}$; $\frac{84}{1000}$ e $\frac{75}{10}$ podem ser escritas na forma decimal respectivamente como $0,3$; $0,084$ e $7,5$.

Observemos também os exemplos:

a) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0,4$

b) $\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0,15$

c) $\dfrac{27}{36} = \dfrac{3^3}{2^2 \cdot 3^2} = \dfrac{3}{2^2} = \dfrac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{75}{100} = 0,75$

d) $\dfrac{6}{75} = \dfrac{2 \cdot 3}{5^2 \cdot 3} = \dfrac{2}{5^2} = \dfrac{2 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \dfrac{8}{100} = 0,08$

Os exemplos acima devem ter evidenciado o fato que se uma fração, depois de simplificada ao máximo, tem denominador q que se fatora em potências de 2 ou de 5, então, multiplicando-se por potências de 2 ou de 5 convenientes, esse denominador pode ser transformado em uma potência de 10. Consequentemente, esse número racional tem uma representação na forma decimal com uma quantidade finita de casas decimais depois da vírgula.

Recorde que se n_0 é um número natural e $d_1, d_2, \ldots d_k$ são algarismos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ então a representação decimal do número x dado por

$$x = n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k}{10^k}$$

é $x = n_0, d_1 d_2 \ldots d_k$.

Por exemplo, a representação do número

$$x = 14 + \frac{9}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{6}{10^5}$$

é $x = 14,97046$. O número $n_0 = 14$ é a *parte inteira* de x e a sequência de algarismos 97046 que fica depois da vírgula é a *parte decimal* de x.

- *O que acontece se o denominador de uma fração irredutível $\frac{p}{q}$ tiver um fator primo diferente de 2 ou 5?*

A prática e familiaridade com o algoritmo da divisão nos permite perceber que, nesse caso, quando dividimos p por q, iremos obter uma conta "que nunca acaba", ou seja, a representação decimal é *infinita*!

Por exemplo,

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots \qquad \frac{3}{11} = 0,2727\ldots \qquad \frac{2455}{9000} = 0,272777\ldots$$

Note que as reticências escritas acima são imprecisas. Elas indicam que as casas decimais "continuam", mas podem ser ambíguas. Por esse motivo, quando sabemos que a continuação é

periódica, colocamos uma barra sobre a parte que se repete. Assim, a notação mais precisa dos exemplos acima é:

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} \qquad \frac{3}{11} = 0,\overline{27} \qquad \frac{2455}{9000} = 0,272\overline{7}$$

Entretanto, a experiência, por maior que seja, não nos permite enunciar um resultado geral sem uma argumentação que seja válida para todos os casos. Vamos então procurar um argumento que garanta que se um número racional, escrito na forma irredutível como $\frac{p}{q}$, é tal que q contém algum fator diferente de 2 e de 5, então a representação decimal desse número será infinita e periódica.

Observe que não é possível multiplicar denominador e numerador por um número inteiro de forma a transformar o denominador em uma potência de 10. *Por quê?*

Bem, isso é consequência do *Teorema Fundamental da Aritmética*, conhecido pelos alunos desde o Ensino Fundamental. Esse teorema nos ensina que "qualquer número natural pode ser escrito como produto de fatores primos, *de modo único a menos da ordem dos fatores*". Sendo assim, qualquer potência de 10 se fatora, *de modo único*, como produto de potências de 2 e potências de 5.

Portanto, se o denominador de uma fração irredutível tem algum fator diferente de 2 e de 5 não será possível encontrar uma fração equivalente cujo denominador seja uma potência de 10.

Exercício 1.1.1 Determine a representação decimal de cada um dos números $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots \frac{6}{7}$.

Exercício 1.1.2 Determine a representação decimal de $\frac{7}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}$.

Exercício 1.1.3 O número $\frac{1}{17}$ tem representação decimal finita, infinita periódica ou infinita e não periódica?

- *Depois de observar o que aconteceu nos exercícios acima, você já conseguiu perceber uma argumentação para o caso geral*?

Você deve ter observado que, na divisão de 1 por 7, encontramos os restos 3, 2, 6, 4, 5, 1

e, a partir desse ponto, os restos começam a repetir: $3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, \ldots$

$$
\begin{array}{rl|l}
\mathbf{1},\ 0 & & 7 \\
\cline{3-3}
3\ \ 0 & & 0,142857\ldots \\
2\ \ 0 & & \\
6\ \ 0 & & \\
4\ \ 0 & & \\
5\ \ 0 & & \\
\mathbf{1} & & \\
\ddots & &
\end{array}
$$

Portanto, $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}$.

Na divisão de 7 por 11, aparecem apenas os restos 4 e 7, nessa ordem, que irão se repetir indefinidamente. Obtemos o quociente $0,\overline{63}$.

No caso geral, podemos dizer que, se um racional se escreve, na forma de fração irredutível, como $\frac{p}{q}$ e q contém algum fator distinto de 2 e de 5, então:

(i) é impossível transformar o denominador em uma potência de 10.

(ii) ao dividirmos p por q (para obter a representação), os restos possíveis são $1, 2, 3, \ldots, q-1$. O resto da divisão nunca é igual a 0.)

Portanto, sendo uma divisão infinita e apenas uma quantidade *finita* de restos possíveis, a partir de algum momento, algum resto irá se repetir. A partir daí, irá aparecer um período no quociente.

Assim, concluímos que a representação decimal de um número racional, se não for finita, será necessariamente periódica.

É importante destacar que, como $0,999... = 1$[1] , é também verdade que $0,0999... = 0,1$; $0,00999... = 0,01$ e assim por diante. Dito isso, fica fácil compreender que todo número racional pode ser escrito na forma de dízima periódia, como, por exemplo, $2,25 = 2,24999...$

Com a discussão acima podemos concluir que **todo número racional tem uma representação decimal infinita e periódica.**

[1] porque $0,999... = 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) = 9 \cdot \dfrac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$

Um dos problemas de se lidar com infinitas casas decimais é operar com eles. Por exemplo, como somar ou multiplicar dois números com infinitas casas? Se for possível transformar em fração, o problema fica resolvido.

Veremos adiante como justificar a validade de um "processo prático" de transformar dízimas periódicas em frações. Trata-se de multiplicar a dízima por uma potência de 10 conveniente de modo a cancelar a parte decimal. Por exemplo, se $x = 1,5\overline{82}$, então $x = 1 + 0,5 + 0,0\overline{82}$. Logo, $10x = 10 + 5 + 0,\overline{82}$. Também

$$1.000x = 100 \cdot (10x) = 100 \cdot [15 + 0,82 + 0,00\overline{82}] = 1500 + 82 + 0,\overline{82}$$

Logo, $1.000x - 10x = 1582 + 0,\overline{82} - [15 + 0,\overline{82}] = 1582 - 15 = 1567$. Portanto, $x = \dfrac{1567}{990}$.

Esse processo funciona, mas será preciso entender por quê!

Exercício 1.1.4 Em cada caso, encontre uma fração cuja representação decimal é a dízima periódica dada:

a) $0,\overline{4}$

b) $0,\overline{250}$

c) $3,\overline{04}$

d) $0,2\overline{21}$

e) $4,001\overline{67}$

Exercício 1.1.5 Um aluno pensou assim: *Para decidir se um quociente é uma dízima periódica preciso analisar o resultado da divisão e ver se há repetição periódica e infinita. Eu fiz 4 dividido por 19 e cheguei em* $0,210526315$. *Como apareceu o algarismo 5 repetido, posso concluir que a dízima periódica é* $0,210\overline{52631}$.

Esse raciocínio é correto? Explique.

1.2 O que são números irracionais?

Dados dois pontos A e B, o conjunto dos pontos da reta determinada por A e B e situados entre A e B, é chamado *segmento* AB e é denotado por $\overline{AB}$. O comprimento desse segmento será denotado simplesmente por AB.

Definição 1.2.1 Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *comensuráveis* se existirem um segmento $\overline{EF}$ e dois números naturais m e n tais que $AB = mEF$ e $CD = nEF$.

No caso que que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis, o segmento $\overline{EF}$ é uma unidade comum, de modo que $\overline{EF}$ cabe m vezes em $\overline{AB}$ e n vezes em $\overline{CD}$.

Com a notação usada nos dias de hoje, poderíamos escrever

$$\frac{AB}{CD} = \frac{mEF}{nEF} = \frac{m}{n}$$

ou seja, se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *comensuráveis* então a razão entre seus comprimentos é um número racional.

Os gregos antigos já haviam notado que existem segmentos incomensuráveis, ou seja, segmentos para os quais não existe uma unidade comum. Por exemplo, o lado $\overline{AB}$ e a diagonal $\overline{AC}$ de um quadrado não são comensuráveis.

De fato, se existisse $\overline{EF}$ tal que $AB = mEF$ e $AC = nEF$, com m e n inteiros, então

$$\frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{(mEF)^2}{(nEF)^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

Logo, $(AB)^2 = \dfrac{m^2}{n^2}(AC)^2$.

Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = 2(AB)^2 = 2\frac{m^2}{n^2}(AC)^2$$

o que equivale a $\dfrac{n^2}{m^2} = 2$, ou seja, $n^2 = 2m^2$.

Mas tais números naturais m e n não existem! De fato, sendo n um número natural, o Teorema Fundamental da Aritmética garante que n pode ser escrito, de modo único, como produto de fatores primos, $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_r^{k_r}$. Portanto, $n^2 = (p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_r^{k_r})^2 = p_1^{2k_1}p_2^{2k_2}\dots p_r^{2k_r}$. Assim, na decomposição de n^2, cada fator primo aparece uma quantidade *par* de vezes.

O mesmo acontece com m^2, ou seja, m^2 se escreve, de modo único como um produto de fatores primos e cada fator aparece uma quantidade par de vezes.

Isso significa que a igualdade $n^2 = 2m^2$ é impossível, já que na decomposição do número $2m^2$ há uma quantidade *ímpar* de fatores iguais a 2 e, portanto, não pode ser igual a n^2.

Concluímos assim que o lado e a diagonal de um quadrado não são comensuráveis. Equivalentemente, provamos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.2 Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 2.

- *O conjunto dos números racionais tem falhas!*

Os números racionais podem ser representados geometricamente por pontos de uma reta, que chamamos usualmente de "reta numérica". De fato, escolhemos um ponto $\mathcal{O}$ chamado origem, que representa o número 0. Escolhemos um outro ponto P, distinto de $\mathcal{O}$, para representar o número 1. Tomando-se o comprimento do segmento $\overline{\mathcal{O}P}$ como unidade de medida, marcamos os demais pontos que representam os números racionais. Com isso, todo número racional r é representado por um ponto R da reta. Dizemos que o número r é a *abscissa* do ponto R.

Observe que entre dois racionais quaisquer (mesmo muito próximos) sempre existe outro racional entre eles. De fato, se a e b são racionais então $m = \frac{a+b}{2}$ é racional e satisfaz $a < m < b$. (*Verifique!*) Mesmo assim, a reta numérica não é totalmente preenchida com os números racionais, ou seja, existem pontos na reta numérica que não representam números racionais.

Por exemplo, sobre a reta numérica construa o quadrado $\mathcal{O}PQR$ que tem o segmento $\overline{\mathcal{O}P}$ como um de seus lados e diagonal $\overline{\mathcal{O}Q}$. (*Faça uma figura!*) Colocando a ponta seca de um compasso sobre $\mathcal{O}$, podemos transportar o ponto Q até o ponto Q' determinado pela intersecção da circunferência de centro $\mathcal{O}$ e raio $\mathcal{O}Q$ com a reta numérica. Supondo $\mathcal{O}P = 1$, tem-se que a abscissa de Q' é $\sqrt{2}$, que não é um número racional, conforme foi demonstrado anteriormente.

Assim, verificamos que se representarmos o conjunto dos racionais na reta numérica, ficam "buraquinhos"[2], ou seja, ficam pontos da reta que não estão associados a nenhum número racional.

O conjunto dos números reais pode ser pensado como o conjunto de todas as abscissas dos pontos da reta numérica. Essa interpretação geométrica é bastante natural e intuitiva. Por não ter falhas, o conjunto dos números reais é dito *completo. Como tornar precisa essa ideia?*

[2]Veremos em breve que a quantidade de buraquinhos é infinita.

Como veremos, a completude de $\mathbb{R}$ desempenha um importante papel em análise.

Exercícios 1.2.3 1. Prove que $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt[3]{2}$ são irracionais.

2. Prove que se $n \in \mathbb{N}$, então $\sqrt{n}$ é irracional, exceto se $n = m^2$, para algum m natural.

3. Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ é irracional. Idem para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

4. Se p é um número primo e n é número natural maior que 2, sabemos que $\sqrt[n]{p}$ não é racional. Por quê?

5. Dados n e m números naturais, então ou $\sqrt[n]{m}$ é natural ou não é racional. Por quê?

6. Sejam n e m números naturais tais que $\sqrt{n \cdot m}$ não é racional. Prove que $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ não é racional.

7. Decida de cada afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

   (a) Uma fração irredutível cujo denominador é um número primo tem representação decimal infinita e periódica.

   (b) Se p e q são números primos distintos então $\sqrt{pq}$ não é racional.

1.3 Uma estrutura importante

A seguir iremos explorar as propriedades dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ para poder compreender o que difere um conjunto do outro. Veremos nesta aula que ambos têm uma estrutura em comum, conhecida como "corpo ordenado".

Quando entramos na escola, rapidamente temos contato com "as quatro operações". Mas *. . . o que é uma operação*? Uma operação em um conjunto A é uma função que, a cada par de elementos de A associa um novo elemento também pertencente a A.

Desde nossa infância aprendemos duas operações muito importantes, a adição e a multiplicação, inicialmente no conjunto dos naturais e depois suas extensões para os conjuntos dos inteiros e dos racionais.

Dependendo dos conjuntos e das operações, algumas propriedades são satisfeitas, e assim ficam determinadas algumas "Estruturas Algébricas". Dentre essas estruturas, nos interessa a de *corpo*.

Definição 1.3.1 Um *corpo* é um conjunto K munido de duas operações, chamadas de *adição* e *multiplicação* satifazendo os seguintes axiomas:

(A1) A adição é associativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in K$.

(A2) A adição é comutativa: $x + y = y + x, \forall x, y \in K$.

(A3) Existe um elemento 0 tal que $0 + x = x, \forall x \in K$.

(A4) Para cada $x \in K$ existe em K um elemento oposto, indicado por $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

(M1) A multiplicação é associativa: $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in K$.

(M2) A multiplicação é comutativa: $xy = yx, \forall x, y \in K$.

(M3) Existe um elemento 1 tal que $1x = x, \forall x \in K$.

(M4) Para cada $x \in K$ tal que $x \neq 0$ existe um elemento inverso, indicado por $x^{-1} \in K$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

(D) Distributiva: $x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in K$.

Observemos que o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ dos números naturais satisfaz apenas os axiomas (A1), (A2), (A3), (M1), (M2), (M3) e (D). O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros, satisfaz todos os axiomas, exceto (M4). O conjunto $\mathbb{Q}$ satisfaz os nove axiomas e, portanto, é um corpo.

Os axiomas (A1) e (M1) garantem que a adição e a multiplicação de uma quantidade finita de números estão bem definidas, isto é, não há ambiguidade. Por exemplo, $x + y + z$ denota tanto $(x + y) + z$ como $x + (y + z)$, já que são iguais. Da mesma forma, $x + y + z + w = ((x + y) + z) + w = (x + (y + z) + w) = x + ((y + z) + w) = x + (y + (z + w)) = (x + y) + (z + w)$.

A subtração é definida como $x - y = x + (-y)$ e a divisão é dada por $x \div y = x \cdot y^{-1}$.

Com esses nove axiomas, é possível provar outras importantes propriedades que costumamos ensinar aos alunos e que são essenciais para se resolver equações. Vejamos algumas:

(P1) *cancelamento na adição*: Se $a + c = b + c$ então $a = b$.

Suponha $a + c = b + c$. Então:

$$\begin{aligned} a &\overset{(A3+A2)}{=} a + 0 \overset{(A4)}{=} a + [c + (-c)] \overset{(A1)}{=} (a + c) + (-c) \overset{\text{(hipótese)}}{=} \\ &= (b + c) + (-c) \overset{(A2)}{=} b + [c + (-c)] \overset{(A4)}{=} b + 0 \overset{(A3+A2)}{=} b \end{aligned}$$

(P2) *cancelamento na multiplicação*: Se $c \neq 0$ e $ac = bc$ então $a = b$.

Demonstração: exercício.

(P3) *o produto de qualquer número por 0 é 0*

Se a é um número qualquer do corpo K então $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Podemos escrever

$$0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

e, usando o cancelamento (P1), chegamos a $0 = a \cdot 0$.

Como consequência de (P3), vemos que não existe um número 0^{-1} que satisfaz $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Consequentemente, não existe $\dfrac{a}{0}$, ou seja, divisão por 0 é sempre indefinida.

(P4) *se um produto é* 0 *então um dos fatores é* 0.

Suponha $ab = 0$. Se $a \neq 0$ então, pelo axioma M4, existe a^{-1} e $a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0$. Usando M1 e P3, obtem-se $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$ e, por M3, conclui-se que $b = 0$.

Pode acontecer que $a = 0$ e $b = 0$. Essa possibilidade não é excluída quando dizemos "$a = 0$ ou $b = 0$". Em matemática, a palavra "ou" é *sempre* usada no sentido de "um ou outro, ou ambos".

A propriedade (P4) é usada frequentemente na resolução de equações. Por exemplo, se quisermos resolver a equação $(x^2 - 7x + 10)\cos x = 0$ podemos, por (P4), concluir que ou $x^2 - 7x + 10 = 0$ ou $\cos x = 0$. A primeira equação é equivalente a $(x - 5)(x - 2) = 0$, cujas soluções são $x = 5$ ou $x = 2$ e a segunda equação tem soluções da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $\in \mathbb{Z}$. Portanto, as soluções da equação $(x^2-7x+10)\cos x = 0$ são $x = 5$ ou $x = 2$ ou $x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(P5) *regras de sinais*: $(-a)b = -(ab) = a(-b)$ e $(-a)(-b) = ab$.

Para poder entender como demonstrar a regra de sinais (você nunca teve curiosidade de saber por que elas valem?) precisamos entender o significado do que se quer provar. Por exemplo, para provarmos que $(-a)b = -(ab)$, o que vamos fazer é provar que "$(-a)b$ é o oposto de ab". Agora fica fácil: de acordo com o axioma A4, basta somar ab e ver que o resultado é nulo. De fato, como $(-a)b + ab \overset{(D)}{=} [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b \overset{P3}{=} 0$, concluímos que $(-a)b$ é o oposto de ab.

A igualdade $-(ab) = a(-b)$ é provada de modo análogo. (Faça como exercício!)

Finalmente, como $(-a)(-b)+[-(ab)] = (-a)(-b)+(-a)b = (-a)[(-b)+b] = (-a)\cdot 0 = 0$, temos que $\{(-a)(-b) + [-(ab)]\} + (ab) = 0 + (ab)$. Com isso, obtemos $(-a)(-b) = ab$.

Assim, o fato que o produto de dois números negativos é positivo é uma consequência dos axiomas de corpo.

Um outro exemplo da propriedade distributiva é o funcionamento do algoritmo de multiplicação entre dois inteiros, que aprendemos na escola. Por exemplo, as contas

$$\begin{array}{rr} & 2\ \ 3 \\ \times & 4 \\ \hline & 9\ \ 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrr} & & 2 & 3 \\ & \times & 5 & 4 \\ \hline & & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

são nada mais do que uma maneira prática de escrever as propriedades distributivas das multiplicações de 4 unidades por 3 unidades e 2 dezenas, na primeira conta:

$$23 \cdot 4 = (20+3) \cdot 4 \overset{(D)}{=} 20 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 80 + 12 = 80 + (10+2) \overset{(A1)}{=} (8+1) \cdot 10 + 2 = 90 + 2 = 92$$

e, na segunda conta, completando com o produto de 5 dezenas por 3 unidades e 2 dezenas:

$$\begin{aligned} 23 \cdot 54 &= 23 \cdot (5 \cdot 10 + 4) \overset{(D)}{=} 23 \cdot 5 \cdot 10 + 23 \cdot 4 = \ldots \\ &= 115 \cdot 10 + 90 + 2 \overset{(D)}{=} (115+9) \cdot 10 + 2 = 1242 \end{aligned}$$

- *Por que o resultado da multiplicação de* 5 *por* 23 *fica descolado para a esquerda?*

Exercícios 1.3.2 1. Prove:

(a) Se $a + b = a$ então $b = 0$. (Isto mostra que o elemento neutro da adição é único!)

(b) Se $a + b = 0$ então $b = -a$.

(c) $-(-a) = a$.

(d) Se $a \neq 0$ e $ab = a$ então $b = 1$. (O que isto mostra?)

(e) Se $a \neq 0$ e $ab = 1$ então $b = a^{-1}$.

(f) Se $a \neq 0$ então $(a^{-1})^{-1} = a$.

(g) Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$ então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$.

(h) Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ então $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

(i) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

2. O que está errado na seguinte "demonstração"? Se $x = y$ então

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x-y)(x+y) &= (x-y)y \\ x + y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

1.4 Corpos Ordenados

As próximas propriedades que iremos estudar lidam com desigualdades. Esta seção contém uma tradução livre de uma parte do capítulo 1 de [7].

Definição 1.4.1 Um *corpo ordenado* é um corpo K em que é possível definir um subconjunto $\mathcal{P}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(O1) *Tricotomia*: Para cada número x, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) $x = 0$,

(b) $x \in \mathcal{P}$,

(c) $-x \in \mathcal{P}$.

(O2) Se x e y pertencem a $\mathcal{P}$ então $x + y$ pertence a $\mathcal{P}$.

(O3) Se x e y pertencem a $\mathcal{P}$ então $x \cdot y$ pertence a $\mathcal{P}$.

Além disso, definimos:

$$\begin{aligned} x > y \quad &\text{se} \quad x - y \in \mathcal{P}; \\ x < y \quad &\text{se} \quad y - x \in \mathcal{P}; \\ x \geq y \quad &\text{se} \quad x > y \text{ ou } x = y; \\ x \leq y \quad &\text{se} \quad x < y \text{ ou } x = y. \end{aligned}$$

Em particular, $x > 0$ se e somente se $x \in \mathcal{P}$. Os números x que satisfazem $x > 0$ são chamados *positivos* e os números x que satisfazem $x < 0$ são chamados *negativos*.

Note que as desigualdades $x < y$ (x é menor do que y) e $y > x$ (y é maior do que x) são equivalentes.

Dos axiomas (O1), (O2) e (O3) decorrem algumas propriedades importantes, tais como:

(PO1) Se a e b são números quaisquer de K então exatamente uma das afirmações é verdadeira: $a = b$ ou $a > b$ ou $a < b$.

(PO2) *Propriedade transitiva*: Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

De fato, como $b - a \in \mathcal{P}$ e $c - b \in \mathcal{P}$, por (O2) tem-se que $(b - a) + (c - b) = c - a \in \mathcal{P}$. Ou seja, $a < c$.

Notação 1.4.2 Se as duas desigualdades $a < b$ e $b < c$ são válidas simultaneamente, podemos escrever abreviadamente $a < b < c$.

(PO3) *Compatibilidade da ordem com a adição*: Se $a < b$ então $a + c < b + c$, qualquer que seja $c \in K$.

De fato, se $a < b$ então $b - a \in \mathcal{P}$. Logo, $(b + c) - (a + c) \in \mathcal{P}$, ou seja, $a + c < b + c$.

(PO4) *Compatibilidade da ordem com a multiplicação*: Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$.

Como $b - a \in \mathcal{P}$ e $c \in \mathcal{P}$, então, por (O3), tem-se que $(b - a)c = bc - ac \in \mathcal{P}$, ou, equivalentemente, $ac < bc$.

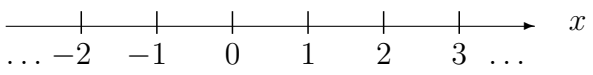
(PO5) Se $a < 0$ e $b < 0$ então $ab > 0$.

Como $a < 0$, tem-se que $0 - a = -a \in \mathcal{P}$. Analogamente, $-b \in \mathcal{P}$. Portanto, por (O3), $(-a)(-b) = ab \in \mathcal{P}$, ou seja, $ab > 0$.

Como consequência de (O3) e de (PO5), tem-se que $x^2 > 0$, para todo $x \neq 0$.

Um outro fato também importante é que, como $1 = 1^2$, tem-se que $1 > 0$. Observe que esse fato não é óbvio: estamos lidando com corpos ordenados abstratos. O símbolo 1 representa o elemento neutro da multiplicação e o símbolo 0, o elemento neutro da adição e, até este momento, não conhecíamos uma relação de ordem entre eles! Note também que, até este momento, por meio dos axiomas só conhecemos os números 0 e 1.

Na desiqualdade $0 < 1$, podemos somar 1 dos dois lados e obter $0 + 1 < 1 + 1 \overset{(\text{def})}{=} 2$. De modo análogo, fazendo o mesmo com cada nova desigualdade, iremos obter $2 < 3$; $3 < 4$, etc. Também, somando-se o oposto de 1 de cada lado, obtemos $-1 < 0$, $-2 < -1$, e assim por diante. Isso justifica o que os professores precisam ensinar no Ensino Fundamental sobre ordem dos números inteiros e sua representação na reta numérica:



Exercícios 1.4.3 Prove as afirmações

1. Se $a < b$ então $-a > -b$.
2. Se $a > 0$ então $a^{-1} > 0$.
3. Se $0 < a < b$ então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
4. Se $a > 1$ então $a^2 > a$.
5. Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.
6. Se $0 < a < b$ então $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$. (A média geométrica é menor do que a média aritmética.)

Agora que sabemos que o inverso de um número positivo é um número positivo, podemos tomar todas as desigualdades já estabelecidas e multiplicar cada uma por $\frac{1}{2}$ (que é positivo), não alterando o resultado, obtendo: $\cdots -2 < -\frac{3}{2} < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < \cdots$. Repetindo o processo com outros inversos de números já definidos, podemos acrescentar mais e mais valores racionais na reta numérica.

Os axiomas e propriedades da ordem também permitem resolver inequações:

Exercícios 1.4.4 Resolva as inequações identificando os axiomas utilizados em cada passagem:

1. $(x-1)(x-3) > 0$.
2. $\dfrac{x-1}{2-x} < 2$.
3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$.

Definição 1.4.5 Para cada número x definimos seu *módulo* ou *valor absoluto* da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vale à pena observar que, representando-se x na reta numérica, $|x|$ pode ser interpretado como a *distância* de x até a origem e, analogamente, fixado um número a, $|x-a|$ representa a distância de x até a.

Teorema 1.4.6 (Desiqualdade Triangular)

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \text{ quaisquer que sejam } x \text{ e } y.$$

Demonstração. Há várias demonstrações em diversos livros. Escolhi esta, que é um pouco longa, porém elementar.

Vamos considerar 4 casos:

1. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a+b \geq 0$, pelo axioma (O2). Portanto, $|a+b| = a+b = |a| + |b|$. (Note que, neste caso, vale a igualdade.)

2. Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$, então $a+b \leq 0$ (Por quê?). Portanto, $|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a| + |b|$. (Neste caso também vale a igualdade.)

3. Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$: Como $a \geq 0$, então $|a| = a$ e, como $b \leq 0$, $|b| = -b$. Logo, $|a|+|b| = a-b$. Por outro lado, não sabemos se $a+b$ é positivo ou negativo. Vamos separar em 2 casos:

   - Se $a+b \geq 0$, então $|a+b| = a+b \leq a-b$, já que $b \leq 0$ e $-b \geq 0$.

   - Se $a+b \leq 0$, então $|a+b| = -(a+b) = -a-b \leq a-b$, já que $-a \leq a$.

   Portanto, se $a \geq 0$ e $b \leq 0$, vale $|a+b| \leq |a| + |b|$. (Se $b < 0$, então $|a+b| < |a| + |b|$.)

4. Se $a \leq 0$ e $b \geq 0$. (Exercício.)

□

Definição 1.4.7 Se $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ é o único número *positivo* cujo quadrado é x.

Por exemplo, $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{2} =$? (Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional. Erra quem escreve $\sqrt{2} = 1,41$, pois 1,41 é uma *aproximação de* $\sqrt{2}$. O valor exato só pode ser indicado usando-se o símbolo da raiz.)

Vamos observar: se $x = -3$ então $x^2 = 9$ e $\sqrt{x^2} = 3 = |-3|$. *Será que é sempre assim?*

Proposição 1.4.8 Para todo número a, vale que $|a| = \sqrt{a^2}$.

Demonstração. Exercício.

Exercícios 1.4.9 1. Expresse cada sentença abaixo sem o símbolo de valor absoluto:

(a) $|x| - |x^2|$

(b) $|x| - |x^3|$

(c) $|a + b| - |b|$ (Não se assuste se a resposta não couber em uma linha. Mesmo assim, ela pode ser organizada e objetiva.)

2. Determine todos os valores de x para os quais vale cada desigualdade:

(a) $|x - 2| = 1$ (b) $|x - 2| < 1$

(c) $|x - 2| > 1$ (d) $|x - 1| + |x + 1| < 2$

(e) $|x - 1| + |x + 1| > 2$

3. Prove que $|x| - |y| \leq |x - y|$. (A demonstração pode ser bem curta, se você escolher um caminho conveniente.)

4. Seja b positivo. Prove que $|a| \leq b$ se e somente se $-b \leq a \leq b$. Faça uma interpretação geométrica.

5. Seja b positivo. Prove que $|a| \geq b$ se e somente se $a \leq -b$ ou $a \geq b$. Faça uma interpretação geométrica.

6. Prove que se $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|y - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, então $|(x + y) - (a + b)| < \varepsilon$.

Notação 1.4.10 O *mínimo* entre dois números a e b é denotado por $\min\{a, b\}$.

A sentença "$x < \min\{a, b\}$" significa que $x < a$ e $x < b$ (simultaneamente). Nos exercícios abaixo em que o mínimo aparece, você irá precisar de uma desigualdade em algum ponto de sua argumentação e a outra desigualdade em outro ponto.

Exercícios 1.4.11 (Exercícios retirados de [7], capítulo 1)

1. Prove que se $|x - a| < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}, 1\right\}$ e $|y - b| < \dfrac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$, então $|xy - ab| < \varepsilon$.

2. Prove que se $b \neq 0$ e $|y - b| < \min\left\{\dfrac{|b|}{2}, \dfrac{b^2\varepsilon}{2}\right\}$, então $y \neq 0$ e $\left|\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{b}\right| < \varepsilon$.

3. Troque os pontos de interrogação por expressões que envolvem ε, a e b, de modo que a conclusão seja verdadeira:

   "se $b \neq 0$, $|y - b| <?$ e $|x - a| <?$, então então $y \neq 0$ e $\left|\dfrac{x}{y} - \dfrac{a}{b}\right| < \varepsilon$."

   Observe que este último exercício é consequência dos dois anteriores.

Algumas respostas. Exercícios 1.4.9

(1a) $x - x^2$, se $x \geq 0$; $-x - x^2$, se $x \leq 0$.

(1c) a, se $b \geq 0$ e $a \geq -b$; $-a$, se $b \leq 0$ e $a \leq -b$;
$-a$, se $b \leq 0$ e $a \leq -b$; $a + 2b$, se $b \leq 0$ e $a > -b$.

(2a) $x = 1$ ou $x = 3$; (2b) $1 < x < 3$.

(2c) $x < 1$ ou $x > 3$ (É impossível escrever a resposta em uma sentença!)

(2d) Não existe x. (O argumento geométrico é mais simples neste caso.)

(2e) Qualquer x diferente de 1 e de -1.

1.5 Conjuntos Limitados

Definição 1.5.1 Sejam K um corpo ordenado e $A \subset K$ um subconjunto não vazio. Dizemos que A é *limitado superiormente* se existir um elemento $M \in K$ tal que $a \leq M, \forall a \in A$. Tal elemento M é chamado *majorante* ou *cota superior* de A.

De modo análogo, dizemos que o conjunto A é *limitado inferiormente* se existir um número $N \in K$ tal que $a \geq N, \forall a \in A$. O número N é chamado *minorante* ou *cota inferior* de A.

Se um conjunto não vazio A é limitado superior e inferiormente, dizemos simplesmente que A é *limitado*. Nesse caso, existem M e N tais que $N \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Exemplos 1.5.2

1. No corpo ordenado $\mathbb{Q}$, o conjunto $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$, formado pelos números primos entre 10 e 40 é limitado e os números 10 e 40 são respectivamente um minorante e um majorante de A.

2. No corpo ordenado $\mathbb{Q}$, considere o subconjunto

$$B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

Como $\dfrac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, vemos que B é um conjunto limitado superiormente, e 1 é um majorante de B. O conjunto B é também limitado inferiormente e 0 é um de seus minorantes, já que todos os elementos de B são positivos.

Observe que os números 5, 10, 100, etc, também são majorantes de A, assim como $-1, -2, -5, \dots$ são minorantes de A.

Se A é um conjunto limitado superiormente e M é um majorante de A então todo número R maior do que M também é majorante de A. De fato, como $a \leq M, \forall a \in A$ e $M < R$, a propriedade transitiva garante que $a \leq R, \forall a \in A$.

2. Considere o conjunto $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \subset \mathbb{Q}$.

Como o conjunto B é formado apenas por números positivos, B é limitado inferiormente e 0 é um de seus minorantes.

Por outro lado,B não é limitado superiormente, já que, qualquer que seja o número $M > 0$ que se tome, por maior que seja, existirá um elemento de B maior do que M. VocÃª sabe dar uma demonstração rigorosa para essa afirmação?

3. Considere o conjunto $C = \{-\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots\} \subset \mathbb{Q}$. Como $\frac{n}{n+1} > 0, \forall n$, temos que $-\frac{n}{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, C é limitado superiormente e 0 é um majorante de C. Por outro lado, como $n < n+1, \forall n \in \mathbb{N}$, temos $\frac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $-\frac{n}{n+1} > -1, \forall n \in \mathbb{N}$, o que nos permite concluir que C é limitado inferiormente e -1 é um minorante de C.

Em muitas situações pode ser importante conhecer o menor dos majorantes ou o maior dos minorantes de um conjunto. Esses números recebem nomes especiais.

Definição 1.5.3 Seja A um subconjunto não vazio e limitado de um corpo ordenado K. O menor dos majorantes de A (se existir) é chamado *supremo* de A. O maior dos minorantes de A (se existir) é chamado *ínfimo* de A.

Assim, um número s é supremo de A (escrevemos $s = \sup A$) se e somente se valem as duas afirmações a seguir:

(a) (s é majorante de A): $a \leq s, \forall a \in A$;

(b) (s é o menor majorante de A): se M é um majorante de A, então $s \leq M$.

De modo análogo um número i é um ínfimo de A ($i = \inf A$) se e somente se valem

(c) $i \leq a, \forall a \in A$ e

(d) se $K \leq a, \forall a \in A$ (ou seja, se K é um minorante de A) então $K \leq i$.

Exercício 1.5.4 Mostre que se s e t são supremos de um conjunto A então $s = t$. Em outras palavras, o supremo de um conjunto, se existir, é único. O mesmo vale para ínfimo.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Em $\mathbb{Q}$, considere o subconjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 4\}$.

É claro que A é não vazio (por exemplo, $2 \in A$) e é limitado superiormente: $M = 4$ é um majorante de A, já que $x < 4, \forall x \in A$. Para provar que 4 é o supremo de A, basta mostrar que 4 é o menor dos majorantes de A, ou seja, que $s = 4$ satisfaz (b).

Vamos mostrar, equivalentemente que $s = 4$ satisfaz:

(b') se $x < s$ então x *não é* majorante de A, isto é, existe $a \in A$ tal que $x < a$.

Seja $x \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < x < 4$. Vamos mostrar que x não é majorante de A. De fato, tome m a média aritmética entre x e 4, $m = \frac{x+4}{2}$. Então $m \in \mathbb{Q}$ e $m < 4$ (de fato, $x < 4 \Rightarrow x + 4 < 8 \Rightarrow \frac{x+4}{2} < 4$). Portanto, $m \in A$. Logo, x não é majorante de A, já que $x < m$. (Confira esta última igualdade!)

Note que A não é limitado inferiormente e, portanto, não admite ínfimo.

Exemplo 2. Em $\mathbb{Q}$, considere o subconjunto $B = \left\{ \frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$.

B é claramente não vazio. Vamos provar que B é limitado: de fato, como $0 < n < n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, 0 é um minorante e 1 é um majorante de B.

Vamos provar que $\sup B = 1$. Para isso, basta tomar $b < 1$, $b \in \mathbb{Q}$ e provar provar que existe um natural n_0 tal que $\frac{n_0}{n_0+1} > b$. Como $\frac{n_0}{n_0+1} \in B$, poderemos então concluir que b não é majorante de B, o que nos permite concluir que 1 é o supremo de B.

Rascunho. ($b < \frac{n_0}{n_0+1} \Leftrightarrow bn_0 + b < n_0 \Leftrightarrow b < n_0(1 - b) \Leftrightarrow n_0 > \frac{b}{1-b}$.)

Seja $b < 1$ (podemos supor $b > 0$) e escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \frac{b}{1 - b} \tag{1.1}$$

Então, $b < \frac{n_0}{n_0+1} \in B$, o que mostra que b não é majorante de B.

Observação. A rigor, é necessário provar que tal n_0 existe. Adiante, em **1.7.1**, iremos demonstrar que o conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado[3].

[3]Se você acredita que isso é óbvio e que não precisa ser demonstrado, talvez você esteja sendo influenciado demais por seu conhecimento intuitivo. Nós estamos "passando a limpo" o conhecimento sobre números, com base em axiomas e teoremas. Todas as afirmações precisam de justificativas rigorosas.

Definição 1.5.5 Seja A um conjunto de números. O maior elemento de A, se existir, é chamado de *máximo* de A e, de modo análogo, o menor elemento de A, se existir, é o *mínimo* de A. Esses números são indicados, respectivamente, por $\max A$ e $\min A$.

Exemplos 1.5.6

1. Se $A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subset \mathbb{Q}$ então $\min A = 2$ e $\max A = 10$.
2. Se $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\} \subset \mathbb{Q}$ então $\min A = \frac{1}{10}$ e $\max A = \frac{1}{2}$.
3. Se $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 5\}$ então $\min A = 1$ e $\max A = 5$.
4. Se $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 5\}$ então $\min A = 1$ e não existe $\max A$. (Por quê?) Note que A tem supremo e $\sup A = 5$.

É interessante observar que, para determinarmos o máximo de um conjunto, olhamos para os elementos pertencentes ao conjunto e, quando precisamos determinar o supremo, olhamos para fora do conjunto (para o conjunto dos majorantes). O mesmo acontece com mínimos e ínfimos.

Exercícios 1.5.7 Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de cada conjunto dado. Justifique todas as suas afirmações.

1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -2 < x \leq 7\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 5x + 6 < 0\}$
4. $D = \{\frac{n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$
5. $E = \{\frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{Q}\}$

1.6 O Conjunto dos Números Reais

Provamos anteriormente (veja 1.2.2) que "não existe x racional tal que $x^2 = 2$". É importante compreender que essa afirmação é diferente de "$\sqrt{2}$ é irracional", já que esta última pressupõe a existência de um número, denotado por $\sqrt{2}$, cujo quadrado é 2. Nós não provamos que esse número existe!

Nosso próximo objetivo será descobrir:

- *Que propriedade distingue o conjunto dos racionais e o conjunto dos reais?*

Vamos observar mais um exemplo:

Exemplo 1.6.1 Em $\mathbb{Q}$, considere o subconjunto $C = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$

Temos:

1) C é não vazio, já que, por exemplo, $x = 1$ pertence a C: $1 \in \mathbb{Q}, 1 \geq 0$ e $1^2 < 2$.

2) C é limitado: De fato, todo x em C satisfaz $0 \leq x < 3$.

3) C não admite supremo! De fato, os majorantes de C são os elementos do conjunto $D = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 \geq 2\}$. Vamos provar que D não tem um menor elemento, ou seja, que não existe o menor dos majorantes de C:

   Seja $p \in D$ qualquer. Como provamos que não existe racional cujo quadrado é igual a 2, sabemos que $p^2 > 2$.

   Defina $q = p - \dfrac{p^2 - 2}{p + 2} \in \mathbb{Q}$. Sendo $p^2 - 2 > 0$, temos que $q < p$. Também temos:

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{p^2 + 2p - (p^2 - 2)}{p + 2} = 2\,\frac{p + 1}{p + 2} > 0.$$

   Logo, $0 < q < p$.

   Além disso, $q^2 - 2 = 2\dfrac{p^2 - 2}{(p + 2)^2} > 0$ (*confira as contas!*).

   Portanto, $q \in D$. Assim, provamos que para todo p em D existe q também em D tal que $q < p$. Ou seja, o conjunto D não tem mínimo. Isso garante que C não tem supremo (em $\mathbb{Q}$).

Axioma do Supremo. Todo subconjunto de K não vazio e limitado superiormente admite um supremo em K.

O exemplo 1.6.1 acima nos mostrou que o conjunto $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma do supremo.

O teorema a seguir será apenas enunciado. Ele garante a existência de um corpo ordenado que satisfaz o axima do supremo.

Há duas demonstrações, ambas bastante longas e trabalhosas, para este teorema. Cada uma das demonstrações consistem em construir, a partir de $\mathbb{Q}$, um conjunto $\mathbb{R}$ que tem todas as propriedades desejadas. O conjunto construído contém $\mathbb{Q}$ não apenas como subconjunto, mas como subcorpo, isto é, as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{R}$, quando aplicadas a elementos de $\mathbb{Q}$, coincidem com as operações usuais de $\mathbb{Q}$. É possível provar também que o conjunto dos racionais positivos são elementos positivos de $\mathbb{R}$.

É também possível demonstrar que $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado que satisfaz a propriedade do supremo, a menos de isomorfismo.

Intuitivamente, o axioma do supremo é o que garante que $\mathbb{R}$ pode ser identificado com os pontos da reta orientada, sem deixar buraquinhos. Por esse motivo, é possível caracterizar o conjunto dos números reais como sendo o único "corpo ordenado completo".

A primeira apresentação rigorosa do conceito de número real foi feita pelo matemático alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916). Há uma outra maneira de construir o conjunto $\mathbb{R}$: por meio de sequências *sequências de Cauchy*.

Teorema 1.6.2 Existe um corpo ordenado que tem a propriedade do supremo. Além disso, esse corpo contém $\mathbb{Q}$ como subcorpo.

Os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados *números reais*. Também dizemos que um número real é *irracional* se não for racional, isto é, se for um elemento do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Podemos agora afirmar que é o axioma do supremo que distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, já que provamos que $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma, mas $\mathbb{R}$ sim.

Exemplo 1. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do conjunto

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x+5} \leq 0 \right\}$$

Solução: Observamos que o $\frac{2x-1}{x+5} \leq 0$ se e somente se $-5 < x \leq \frac{1}{2}$, o que nos permite ver que -5 é o ínfimo de B e $\frac{1}{2}$ é o seu supremo. Note que, neste exemplo, o ínfimo não pertence ao conjunto B, enquanto que o supremo pertence a B.

Exemplo 2. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do conjunto $A = \left\{ \frac{n}{2n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Solução: Observamos que $A = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \frac{5}{12}, \dots \right\}$. Vamos provar que $\inf A = \frac{1}{4}$ e que $\sup A = \frac{1}{2}$.

Podemos observar que, conforme n cresce, o valor de $\frac{n}{2n+2}$ aumenta. De fato,

$$\frac{n+1}{2(n+1)+2} - \frac{n}{2n+2} = \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(2n+4)(2n+2)} = \frac{2}{(2n+4)(2n+2)} > 0$$

e, com isso, vemos que $\dfrac{n}{2n+2} < \dfrac{n+1}{2n+4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, o valor mínimo de A é obtido fazendo $n = 1$ na expressão dos termos de A. Assim, $\inf A = \min A = \dfrac{1}{4}$. $\big($Como $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{n}{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{4}$ é um minorante de A. Além disso, é o menor dos minorantes de A pois se x é um número real tal que $x > \frac{1}{4}$, x não pode ser um minorante de A, já que $\frac{1}{4} \in A$. Portanto, $\frac{1}{4}$ é o ínfimo de A. $\big)$

Como $\frac{n}{2n+2} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, vemos que $\frac{1}{2}$ é um majorante de A. Para provarmos que é o menor dos majorantes de A, vamos tomar um número real x tal que $x < \frac{1}{2}$ e mostrar que x não pode ser majorante de A. Isto é, vamos mostrar que existe um elemento de A (necessariamente da forma $\frac{n}{2n+2}$) que é maior do que x. Como $x < \frac{1}{2}$ vemos que $1 - 2x > 0$. Logo, pela propriedade arquimediana, existe um número natural k tal que $\frac{1}{k} < 1 - 2x$. Mas $\frac{1}{k} < 1 - 2x \iff 1 - \frac{1}{k} > 2x \iff \frac{k-1}{k} > 2x \iff \frac{k-1}{2k} > x$. Fazendo $n = k - 1$, a última desigualdade torna-se $\frac{n}{2(n+1)} > x$, provando que x não é majorante de A.

Exemplo 3. Seja A um conjunto de números reais não vazio e limitado superiormente e seja b um número qualquer fixado. Defina o conjunto $T = \{a + b : a \in A\}$. Prove que existe o supremo de T e que $\sup T = \sup A + b$.

Solução: Para provar que o $\sup T$ existe, basta verificar que

- T é não vazio: de fato, como A é não vazio, existe $a \in A$. Logo, existe um elemento $a + b$ em T.

- T é limitado superiormente: de fato, como A é limitado superiormente, existe um número M tal que $a \leq M, \forall a \in A$. Somando b dos dois lados, obtemos

$$\underbrace{a+b}_{\in T} \leq M + b, \qquad \forall a \in A$$

  Isso mostra que $M+b$ é um majorante de T e, portanto, T é limitado superiormente.

Portanto, pelo axioma do supremo, existe o supremo de T.

Agora vamos provar que $\sup T = \sup A + b$:

Para isso, precisamos mostrar que $\sup A + b$ é um majorante de T e $\sup A + b$ é o menor dos majorantes de T.

Vamos denotar $s = \sup A$ (é claro que, sendo A não vazio e limitado superiormente, pelo axioma do supremo, existe tal s).

- Sabemos que $a \leq s, \forall a \in A$. Somando b dos dois lados da desigualdade, obtemos

$$a + b \leq s + b, \qquad \forall a \in A$$

  Portanto, $s + b$ é um majorante de T.

- Seja $x < s+b$ um número real. Vamos provar que x não é majorante de T, e portanto, que $s + b$ é o menor dos majorantes de T.

  Mas $x < s + b \iff x - b < s$. Como $s = \sup A$, existe $a \in A$ tal que $x - b < a \leq s$. Somando b, obtemos $x < \underbrace{a+b}_{\in T} \leq s + b$, ou seja, existe um elemento em T, maior do que x. Logo x não é majorante de T.

Podemos assim concluir que $s+b$ é o menor dos majorantes de T, ou seja, $\sup A+b = \sup T$.

Exercícios 1.6.3 1. Decida de cada afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

(a) A soma de um número racional com um irracional é irracional.

(b) A soma de dois números irracionais é irracional.

(c) O produto de um número racional com um irracional é irracional.

(d) O produto de dois números irracionais é irracional.

2. Determine um número irracional entre $0,001$ e $0,002$.

3. Dê exemplos de infinitos irracionais entre 1 e 2.

4. Obtenha o supremo e o ínfimo de cada um dos subconjuntos:

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \text{e} \qquad C = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Justifique sua resposta.

5. Prove que o supremo do conjunto $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \{0,9; 0,99; 0,999; \ldots\}$ é igual a 1. Interprete.

Nos próximos exercícios, A e B são dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

6. Prove que se A é não vazio e limitado inferiormente, então A tem ínfimo.

7. Prove que se $A \subseteq B$, então $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

8. Sendo $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$, mostre que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

9. Se A é limitado inferiormente, mostre que $-A = \{-x : x \in A\}$ é limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf A$

10. Suponha que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Prove ainda que $\sup A = \inf B$ se, e somente se, qualquer que seja $\epsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \epsilon$.

11. Seja A um subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$. Prove que $b = \sup A$ se e somente se b é majorante de A e para todo $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $b - \epsilon < a \leq b$.

1.7 Algumas Consequências da Propriedade do Supremo

Um fato bastante conhecido, e que foi mencionado anteriormente neste texto sem demonstração, é que $\mathbb{N}$ não é limitado. Vamos provar tal afirmação.

Teorema 1.7.1 O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Como $\mathbb{N}$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ admite um supremo $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $n \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $n+1 \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$, já que $n+1 \in \mathbb{N}$. Mas esta última desigualdade equivale a $n \leq \alpha - 1, \forall n \in \mathbb{N}$, o que significa que $\alpha - 1$ é um majorante de $\mathbb{N}$, menor do que o supremo α, o que é uma contradição.

□

O teorema 1.7.1 é equivalente ao teorema a seguir, que é chamado por muitos autores de *propriedade arquimediana*.

Teorema 1.7.2 Se x e y são dois números reais e $x > 0$, então existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $nx \leq y$, para todo n natural. Então o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. A é não vazio pois $x = 1 \cdot x$ pertence a A. Logo, pelo Axioma do Supremo, existe um número real $s = \sup A$.

Como $x > 0$, tem-se que $s - x < s$. Logo, $s - x$ não é majorante de A. Isso significa que existe um elemento $mx \in A$ tal que $s - x < mx$, ou, equivalentemente, $s < (m+1)x$. Como $m + 1$ é natural, $(m+1)x \in A$, o que contradiz o fato de s ser majorante de A.

Portanto, a afirmação "$nx \leq y$ para todo n natural" é falsa. Ou seja, existe um número natural n tal que $nx > y$.

□

Corolário 1.7.3 Para cada $x > 0$ existe um natural n tal que $\dfrac{1}{n} < x$.

Demonstração. Como $x > 0$, podemos afirmar, pelo teorema 1.7.2, que existe um número natural n tal que $nx > 1$.

□

Corolário 1.7.4 Para todo real x existe um natural n tal que $n > x$.

Demonstração. Sabemos que $1 > 0$. Pelo teorema 1.7.2, existe um natural n tal que $n \cdot 1 > x$.

□

A seguir, daremos uma demonstração rigorosa para o importante e intuitivo fato que entre dois reais quaisquer sempre existe um racional.

Proposição 1.7.5 Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Demonstração. Como $b - a > 0$, a propriedade arquimediana garante que existe um natural n tal que $n(b - a) > 1$. Além disso, usando novamente a propriedade arquimediana, existem naturais s e t tais que $s > na$ e $t > -na$. Portanto, $-t < na < s$. Logo, existe pelo menos um inteiro m entre $-t$ e s, tal que $m - 1 \leq na < m$. Temos:

$$na < m \leq 1 + na < nb$$

Como $n > 0$, tem-se $a < \dfrac{m}{n} < b$, o que prova a proposição, sendo $r = \dfrac{m}{n}$.

□

Definição 1.7.6 Um conjunto A é *denso em* $\mathbb{R}$ se entre dois números reais distintos existe um elemento de A.

Uma vez estabelecida essa definição, a proposição 1.7.5 poderia ter sido enunciada da seguinte maneira: $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$.

1.8 Intervalos

Alguns subconjuntos de números reais desempenham um papel bastante importante na compreensão de certas ideias da análise. Dentre eles destacam-se os intervalos.

Se a e b são números reais tais que $a < b$, definimos:
o *intervalo fechado* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

o *intervalo aberto* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

além dos intervalos

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, e

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

O *comprimento* de qualquer um desses invervalos é, por definição, a diferença $b - a$.

O teorema a seguir é conhecido como *Propriedade dos Intervalos Encaixantes.*

Teorema 1.8.1 Sejam $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$,..., $[a_n, b_n]$, ... intervalos tais que

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Então a intersecção de todos os intervalos é não vazia.

Se, além disso, o comprimento dos intervalos tender a zero conforme n cresce, ou seja, se $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, então existe um único ponto a pertencente a todos os intervalos, ou seja, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{a\}$.

Demonstração. Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ dos números reais que são as extremidades direitas de cada intervalo. Como os invervalos estão encaixados, temos

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq b_n, \ \ \forall n$$

Assim sendo, o conjunto A é não vazio e limitado superiormente e cada b_n é majorante de A. Pela propriedade do supremo, existe $\sup A = \alpha$.

Como α é um majorante de A, temos $a_n \leq \alpha$, para todo n. Por outro lado, como $a_n < b_n$, para todo n, podemos concluir que $\alpha \leq b_n, \forall n$. (Prove!) Logo, para cada n, vale $a_n \leq \alpha \leq b_n$, o que mostra que $\alpha \in \bigcap[a_n, b_n]$.

Além disso, no caso em que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, podemos ver facilmente que α será o único número real pertencente à intersecção. De fato, se $\beta \in \bigcap[a_n, b_n]$, teremos $|\beta - \alpha| \leq (b_n - a_n), \forall n$. Fazendo n crescer indefinidamente, concluímos que $\beta = \alpha$.

□

Exercício 1.8.2 Nas condições do teorema acima, prove que também vale que:

1. existe $\gamma = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$;

2. a intersecção de todos os intervalos encaixantes é o intervalo $[\alpha, \gamma]$.

Observação 1.8.3 Para provarmos que o conjunto dos números reais satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes usamos o fato que $\mathbb{R}$ satisfaz o axioma do supremo. Ocorre que a propriedade dos intervalos encaixantes e o axioma do supremo são equivalentes. Isto é, se um corpo ordenado satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes, então ele satisfaz a propriedade que "todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem um supremo".

Exercício 1.8.4 Admitindo que um corpo ordenado K satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes, prove que K satisfaz o axioma do supremo.

1.8.1 Existência de raízes

No ensino básico vemos alguns exemplos de números irracionais, como por exemplo $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[3]{5}$, definidos respectivamente como "o número cujo quadrado é 2" ou "o número cujo cubo é 5". Mas há uma questão que não é levantada: tais números existem? Chegou a hora de passarmos isso a limpo de modo rigoroso.

O objetivo desta seção é o de concluir que vale o seguinte:

Teorema 1.8.5 Para todo número real $a > 0$ e todo natural n existe um único real $b > 0$ tal que $b^n = a$.

O número real b do teorema anterior é chamado raiz n-ésima de a e denotado por $\sqrt[n]{a}$.

Uma demonstração geral desse fato está esboçada no exercício 1.8.7. A ideia dessa demonstração é simples: construímos um conjunto especial de números reais, a saber, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x^n < a\}$, mostramos que ele é não vazio e limitado superiormente. Com isso, o axioma do supremo garante que existe um número real $b = \sup A$. A demonstração fica completa se provarmos que $b^n = a$, o que é trabalhoso.

Vamos apresentar a seguir uma demonstração de um caso particular, usando a propriedade dos intervalos encaixantes ao invés do axioma do supremo.

Teorema 1.8.6 Existe um único real $b > 0$ tal que $b^2 = 2$.

Demonstração. Vamos começar com a unicidade. Suponha que existam $x > 0$ e $y > 0$ tais que $x^2 = 2$ e $y^2 = 2$. Então $x^2 - y^2 = 0$, ou equivalentemente, $(x - y)(x + y) = 0$. Como x e y são ambos maiores do que 0, segue que $x = y$.

Para provarmos a existência, vamos construir uma sequência de intervalos encaixantes da seguinte maneira:

Escolhemos $[a_0, b_0] = [1, 2]$. Observe que esse intervalo tem a seguinte característica: $a_0^2 = 1^2 < 2$ e $b_0^2 = 2^2 > 2$ (ou seja, $a_0^2 < 2 < b_0^2$).

Escolhemos o segundo intervalo com o seguinte critério: $a_1 = a_0 + \frac{d}{10}$ e $b_1 = a_0 + \frac{d+1}{10}$, com $d \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ tais que $a_1^2 < 2$ e $b_1^2 > 2$ (ou seja, $a_1^2 < 2 < b_1^2$). Calculando os quadrados dos números $1,1$; $1,2$; $1,3$, etc, concluímos que $[a_1, b_1] = [1,4; 1,5]$, pois $a_1^2 = (1,4)^2 = 1,96 < 2$ e $b_1^2 = (1,5)^2 = 2,25 > 2$.

A seguir vamos escolher a_2 e b_2 tais que $a_2 = a_1 + \frac{d}{100}$ e $b_2 = a_1 + \frac{d+1}{100}$, para um algarismo d conveniente de modo que $a_2^2 < 2$ e $b_2^2 > 2$. Com um pouco de contas, chegamos à conclusão que $a_2 = 1,41$ e $b_2 = 1,42$.

Procedemos de modo análogo, indefinidamente: tendo o intervalo $[a_n, b_n]$, definimos $a_{n+1} = a_n + \frac{d}{10^n}$ e $b_{n+1} = a_n + \frac{d+1}{10^n}$, com d escolhido entre os algarismos de 0 a 9 de modo que $a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2$.

É fácil entender que os intervalos são encaixantes, já que, por construção, para cada índice n vale

$$a_n \leq a_{n+1} = a_n < b_{n+1} = a_n \leq b_n = a_n \qquad \text{(Por quê?)}$$

Além disso, os comprimentos dos intervalos tendem a 0, pois $b_n - a_n = 10^{-n+1}$, que tende a zero conforme n cresce. Logo, pelo teorema 1.8.1, existe um único número real b tal que

$$a_n \leq b \leq b_n \qquad (*)$$

Note que $b > 0$. Resta provar que b é a raiz quadrada de 2, ou seja, que $b^2 = 2$.

Note que, de (*), vale que $a_n^2 \leq b^2 \leq b_n^2$. (Por quê?)

Ora, os números a_n e b_n foram escolhidos de modo que $a_n^2 < 2 < b_n^2$. Além disso, os intervalos $[a_n^2, b_n^2]$ também satisfazem a propriedade dos intervalos encaixantes, com $\lim b_n^2 - a_n^2 = 0$.

Portanto, a segunda parte do teorema 1.8.1 garante $b^2 = 2$.

□

Exercício 1.8.7 (Uma demonstração do teorema 1.8.5).

Fixados $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o subconjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x^n < a\}$.

1. Mostre que A é não vazio. (Sugestão: considere o número $\frac{a}{a+1}$)

2. Mostre que A é limitado superiormente. (Sugestão: tome $M = 1 + a$)

3. Conclua que existe (em $\mathbb{R}$) o supremo de A, que será chamado de b. Verifique que $b > 0$.

   O próximo passo é provar que $b^n = a$, ou seja, que b é a raiz procurada. Para isso, nos próximos itens usaremos o resultado a seguir, cuja demonstração fica a seu cargo:

   $$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) < (x-y)nx^{n-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < x.$$

4. Suponha que $b^n < a$. Mostre que existe $0 < h < 1$ tal que $(b+h)^n < a$ e $b + h \in A$. Conclua que isso não pode ocorrer.

5. Suponha que $b^n > a$. Mostre que existe $0 < r < b$ tal que se x satisfaz $(b - r) < x < b$, então $x^n > a$. Conclua que isso não pode ocorrer.

6. Conclua que $b^n = a$ e prove a unicidade.

Corolário 1.8.8 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a > 0$ e $b > 0$. Então $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

Demonstração. Sabemos que as raízes $\sqrt[n]{ab}$, $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ existem, já que a, b e ab são números positivos. Basta mostrar a igualdade.

Por definição, $\sqrt[n]{ab}$ é o (único) número cuja n-ésima potência é igual a ab. Mas usando a propriedade comutativa da multiplicação várias vezes, obtemos

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$$

Logo, a unicidade da raiz n-ésima de ab nos garante que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

□

1.8.2 E a sala de aula?

Tendo em vista que as representações decimais dos números racionais são finitas ou infinitas e periódicas, costumamos encontrar a definição de número irracional como sendo um número cuja representação decimal é infinita e não periódica. Também encontramos a definição de que o conjunto dos números reais é a reunião dos racionais com os irracionais. Assim, um número irracional positivo é da forma $\alpha = a, c_1c_2c_3\ldots$, em que a é um inteiro positivo ($a \geq 0$) e c_j é um número inteiro entre 0 a 9 (c_j é a j-ésima casa decimal de α), e com a restrição que essa sequência de algarismos c_j não seja periódica.

Um aluno poderia perguntar: "Como é feita a adição de dois números como esse?" "E a multiplicação?"

É possível operar com números que têm infinitas casas decimais? Por exemplo, seria possível somar ou multiplicar $\sqrt{2}$ por π escritos na forma decimal?

Uma outra dúvida, ainda mais básica, que pode surgir é "como saber se um número é irracional?" Por mais casas decimais que possamos escrever, nunca teremos certeza se há ou não uma sequência de casas decimais formando período a partir de algum ponto. Assim, apenas observar as casas decimais não nos permite decidir se um número é ou não racional. Isso precisa ser muito claro para o professor e, caso um aluno pergunte, tem que ser esclarecido para ele também. A demonstração de que um número é irracional é feita por absurdo, e nem sempre é fácil. Já vimos como demonstrar que certos números da forma $\sqrt[n]{x}$ são irracionais. Veremos adiante a demonstração de que o número e é irracional. A demonstração de que π é irracional é muito trabalhosa e só foi feita no século XVIII, apesar desse número ser conhecido desde a antiguidade.

Exercício 1.8.9 Depois de quantas casas decimais começa a parte periódica do número $\dfrac{41387}{99000}$?

Exercício 1.8.10 Dê um exemplo de um número racional em que o período só aparece depois de 10 casas decimais.

Exercício 1.8.11 Dê um exemplo de um número racional em que o período só aparece depois de 100 casas decimais.

O restante desta seção é opcional, embora bastante interessante, em minha opinião.

- *Uma definição alternativa para o conjunto* $\mathbb{R}$.

Vamos admitir que os números da forma $\alpha = a, c_1c_2c_3\ldots$, em que a é um inteiro positivo e c_j é um número inteiro de 0 a 9, estejam bem definidos, isto é, vamos admitir que a soma infinita $a + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{c_3}{10^3} + \ldots$ seja finita.

A esses números daremos o nome de número real positivo.

Por exemplo, o número π pode ser escrito como $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots$

Observe que os racionais cuja representação decimal é finita são tais que $c_j = 0$, a partir de um certo índice. Por exemplo, $3,14 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{0}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \ldots$, ou seja, $c_j = 0$ para $j \geq 3$.

Também é interessante saber que o número 3,14 é uma aproximação de π, bem como 3,15. O primeiro é uma aproximação por falta e o segundo, por excesso. Aproximações por falta são facilmente obtidas, bastando "truncar" o número, isto é, apagar as casas decimais a partir de algum ponto.

Sempre que aproximamos, cometemos um "erro de aproximação". No caso do exemplo acima, tanto 3,14 como 3,15 são aproximações de π com erro menor do que 0,01. Se precisarmos de uma aproximação com erro menor, basta acrescentar mais casas. Assim, 3,1416 é uma aproximação por excesso, com erro menor do que 10^{-4}.

Sabemos também que, como $0,\overline{9} = 1$, também é verdade que $0,4\overline{9} = 0,5$; $0,836\overline{9} = 0,837$ e assim por diante. Para evitar ambiguidades, vamos considerar os números α definidos acima, com a restrição que a sequência de algarismos $c_1, c_2, \ldots$ não tenha, a partir de um certo ponto, só algarismos 9.

Com essa definição, um número real é um objeto bem concreto.

Esboçaremos, em forma de exercício, uma maneira de obter a estrutura de corpo ordenado:

1. Se $\alpha = a, c_1c_2c_3\ldots$ e $\beta = b, d_1d_2d_3\ldots$, defina $\alpha < \beta$ se $a < b$, ou se $a = b$ e existe um n tal que $c_j = d_j$ para $1 \leq j < n$ e $c_n < d_n$.

   (a) Dê exemplo de um par de números irracionais $\alpha < \beta$ que diferem apenas na terceira casa decimal.

   (b) Mostre que o conjunto de números assim definidos e com essa relação de ordem satisfaz a propriedade do supremo.

2. Seja $\alpha = a, c_1c_2c_3\ldots$ e defina o número racional $\alpha_k = a, c_1c_2\ldots c_k$, ou seja, α_k é o racional obtido pelo truncamento de α a partir da k-ésima casa decimal. Note que dado um racional da forma $r = a, c_1c_2\ldots c_k$, podemos considerar o número real $r' = a, c_1c_2\ldots c_k\,0\,0\,0\ldots$, ou seja, $r' = a, c_1'c_2'c_3'\ldots$, sendo $c_n' = c_n$ para todo índice n tal que $1 \leq n \leq k$ e $c_n' = 0$, se $n > k$.

   Assim, podemos definir a soma e o produto de dois reais da seguinte maneira: Para $\alpha = a, c_1c_2c_3\ldots$ e $\beta = b, d_1d_2d_3\ldots$, defina

$$\alpha + \beta = \sup\{(\alpha_k + \beta_k)' : k \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad \alpha \cdot \beta = \sup\{(\alpha_k \cdot \beta_k)' : k \in \mathbb{N}\}$$

   É possível verificar que todas as propriedades de corpo estão satisfeitas (o que dá um enorme trabalho). Como exercício para poder perceber quais são as dificuldades envolvidas, prove apenas o axioma (A3): para cada número real α existe um oposto $(-\alpha)$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Para um aluno do ensino médio, o que podemos dizer é que a soma e o produto de dois números reais podem ser obtidos por meio de aproximações com quantas casas decimais desejarmos. Veja, por exemplo, uma aproximação por falta, com 5 casas decimais, da soma: $\frac{31}{99} + \pi \approx 0,31313 + 3,14159 = 3,45472$. O valor correto é maior, já que é uma aproximação por falta, e o erro cometido é menor do que 10^{-5}.

Também é importante ensinar para os alunos que, quando fazemos contas, mesmo com uma calculadora, usamos sempre números racionais para aproximar os irracionais. As calculadoras usam muitas casas decimais, mas sempre há um erro de aproximação! Quando queremos uma resposta exata, sem aproximações, deixamos indicado, como por exemplo, nas fórmulas ensinadas: a área do círculo de raio r é $A = \pi r^2$; o volume da esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; etc.

Exercícios de revisão

1. Prove que $\sqrt{12}$ é irracional.

2. Prove que $\log_3 2$ é irracional.

3. Prove que se $p, q \in \mathbb{N}$ e p e q são primos então $\sqrt{pq}$ é irracional. (Encontrado em [1], 2.1).

4. Prove que se x e y são irracionais tais que $x^2 - y^2$ é racional não nulo, então $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais. Por exemplo, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. (Encontrado em [1], 2.1).

5. Seja $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$. Determine, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A. Justifique.

6. Observe que o número racional 0,999 pode ser escrito como $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$. De modo geral, $0,\underbrace{99\ldots9}_{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$.

   Considere o conjunto $D = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Prove que $\sup(D) = 1$. Interprete.

7. Seja $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de algarismos ($a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$) e considere os números $s_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$.

   (a) Cada número s_n é racional ou irracional?

   (b) Mostre que o conjunto $E = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ é não vazio e limitado superiormente.

   (c) Conclua que $s = \sup(E)$ é um número real entre 0 e 1.

Referências Bibliográficas

[1] Geraldo Ávila. *Análise Matemática para Licenciatura*. Edgard Blucher Ltda, 3 edition, 2006.

[2] Hamilton Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, volume 1. LTC Editora, 2001.

[3] Hamilton Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, volume 4. LTC Editora, 2001.

[4] Elon Lages Lima. *Análise Real*. IMPA, CNPq, 1997.

[5] Ivan Niven. *Números: racionais e irracionais*. SBM, 1984.

[6] Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. Ed. Ao Livro Técnico S.A., 1971.

[7] Michael Spivak. *Calculus*. Addison Wesley, 1967.