Capítulo 2

Conjuntos Infinitos

Não é raro encontrarmos exemplos equivocados de conjuntos infinitos, como "a quantidade de grãos de areia na praia" ou a "quantidade de estrelas no céu". Acontece que essas quantidades, embora muito grandes, são finitas!

Um exemplo de conjunto infinito é o conjunto dos números naturais: mesmo tomando-se um número natural n muito grande, sempre existe outro maior, por exemplo, seu sucessor $n+1$, ou também o dobro de n, $2n$, ou ainda seu triplo $3n$.

No final do século XIX apareceu a necessidade de compreender melhor os conjuntos infinitos, motivada pelo estudo de funções integráveis: Sabemos que se uma função limitada tem uma quantidade finita de descontinuidades, ela é integrável. E se a quantidade de descontinuidades for infinita? Em alguns casos, a função ainda é integrável, em outros, não! Foi justamente a curiosidade de entender em quais situações a função é integrável e em quais não que levou ao estudo que iremos começar a ver agora.

- *Existem diferentes tipos de infinito!*

Desde crianças aprendemos a contar... *O que é contar*?

Se dermos a uma criança um pacote com 5 lápis e pedirmos a ela que conte, no fundo o que ela faz é estabelecer uma bijeção entre os lápis e o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Uma outra situação corriqueira é *comparar* quantidades de dois conjuntos. Imagine que estamos em uma sala com muitas cadeiras e várias pessoas. Se alguém perguntar se há mais cadeiras ou mais pessoas, não há necessidade de se contar quantas são as cadeiras, quantas são as pessoas. Ao invés disso, podemos pedir a todos que se sentem. Se sobrarem cadeiras vazias, há mais cadeiras. Se sobrarem pessoas em pé, há mais pessoas! Assim pudemos responder rapidamente à pergunta feita, sem a necessidade de contar cada conjunto.

Do ponto de vista da matemática, o que foi feito?

Ao pedirmos para as pessoas que se sentem, estamos estabelecendo uma função que a cada pessoa associa a cadeira onde ela se sentou. Se essa função for bijetora, o número de cadeiras e de pessoas é o mesmo! A função é injetora, pois estamos subentendendo que só pode ter uma pessoa em cada cadeira. Se a função não for sobrejetora, há cadeiras sobrando.

Alguém poderia argumentar sobre a possibilidade de haver pessoas em pé. Nesse caso, não está estabelecida uma correspondência que a cada elemento do domínio associa um no contra-domínio. Matematicamente, a função não estaria bem definida.

O que é feito no estudo de conjuntos infinitos é basicamente encontrar uma função bijetora para comparar o conjunto alvo de nosso estudo com outro já conhecido.

É necessário esclarecer que a terminologia usada neste tópico pode diferir levemente de um livro para outro. Neste texto adotaremos as mesmas definições encontradas no livro do Rudin [5].

Definição 2.0.1 Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos A e B, dizemos que os conjuntos têm *a mesma cardinalidade* e escrevemos $A \sim B$.

Note que a relação $A \sim B$ é uma relação de equivalência, isto é, satisfaz as propriedades:

(i) $A \sim A$ (propriedade reflexiva)

(ii) Se $A \sim B$ então $B \sim A$ (propriedade simétrica)

(iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$ (propriedade transitiva)

Por esse motivo, se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, dizemos que eles são equivalentes (segundo *Cantor*).

Exercício 2.0.2 Verifique que, de fato, a relação "A tem a mesma cardinalidade que B" é uma relação de equivalência.

Definição 2.0.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

(a) Um conjunto A é *finito* se existir uma função bijetora de F_n em A, para algum n. Dizemos, nesse caso, que A tem n elementos. Consideramos o vazio um conjunto finito.

(b) A é *infinito* se A não for finito.

(c) A é *enumerável* se $A \sim \mathbb{N}$.

(d) A é *não enumerável* se A não for finito nem enumerável.

(e) A é *no máximo enumerável* se A for finito ou enumerável.

Exemplos 2.0.4 **(a)** O exemplo mais simples de conjunto enumerável – e o que serve de modelo para essa ideia – é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

(b) O conjunto $\mathcal{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dos números pares também é enumerável. Neste caso, é fácil ver que a função $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ dada por $f(n) = 2n$ é bijetora.

(c) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. De fato, podemos pensar na função que leva $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ associando os números naturais aos inteiros na seguinte ordem:

$$0, \;\; 1, -1, \;\; 2, -2, \;\; 3, -3, \ldots$$

Essa função pode ser dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par }, \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar }. \end{cases}$$

Fica a cargo do leitor verificar que f é uma função bijetora.

Definição 2.0.5 Uma *sequência* é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$. Se $f : \mathbb{N} \to A$, denotamos $f(n) = a_n$, dizemos que os valores a_n são os *termos* da sequência e que $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é *uma sequência em A*.

As notações (a_n), ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são usadas para indicar a sequência cujos termos são $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Note que uma sequência é uma lista seus termos em uma certa ordem: o elemento indicado por a_1 é o primeiro, o elemento a_2 é o segundo, e assim por diante.

Os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ não precisam ser dois a dois distintos. Por exemplo, a sequência $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots)$ formada pelas potências de 2 tem todos os seus termos distintos entre si. Já a sequência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ dada por $f(n) = 1$, se n é ímpar e $f(n) = 2$, se n é par, é uma sequência cujos termos se repetem no conjunto $\{1, 2\}$.

Como um conjunto enumerável é a imagem de uma função bijetora definida em $\mathbb{N}$, podemos compreender um conjunto enumerável como a imagem de uma sequência formada por termos distintos dois a dois, ou ainda, que os elementos de um conjunto enumerável podem ser organizados em uma sequência.

Cabe agora uma observação muito importante. Quando lidamos com conjuntos finitos, se um conjunto A é um *subconjunto próprio* de B, isto é, se A está contido em um conjunto B e é diferente de B, então B tem uma quantidade de elementos menor do que A. Entretanto, os exemplos acima mostram que com conjuntos infinitos pode acontecer $A \subset B$, $A \neq B$ e $A \sim B$: o exemplo 2.0.4(b) mostrou que $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{P} \sim \mathbb{N}$; o exemplo 2.0.4(c) mostrou que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Como esse fato caracteriza os conjuntos infinitos, alguns autores adotam a seguinte definição: *um conjunto C é infinito se for equivalente a algum de seus subconjuntos próprios.*

Teorema 2.0.6 Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Demonstração. Sejam A um conjunto enumerável e $B \subset A$ um subconjunto infinito.

Como A é enumerável seus elementos podem ser colocados em uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de termos distintos dois a dois ($a_i \neq a_j$ se $i \neq j$).

Vamos construir uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ da sequinte maneira:

Defina n_1 como o primeiro natural tal que $a_{n_1} \in B$.

Tome n_2 como sendo o menor natural que é maior do que n_1 tal que $a_{n_2} \in B$.

Tendo encontrado $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ tome n_k como sendo o menor natural que é maior do que n_{k-1} tal que $a_{n_k} \in B$.

Como B, por hipótese, é um conjunto infinito, B pode ser visto como uma sequência

$$B = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots)$$

É claro que esses termos são distintos dois a dois. Assim obtemos uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to B$ dada por $f(k) = a_{n_k}$. Logo, B é enumerável.

$\square$

A ideia que esse teorema nos apresenta é que os conjuntos enumeráveis são conjuntos do "menor tipo de infinito", já que nenhum conjunto não enumerável pode ser subconjunto de um enumerável.

Definição 2.0.7 Sejam $E_1, E_2, E_3, \ldots$ conjuntos.

A *reunião* de todos esses conjuntos, denotada por $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, é o conjunto U formado pelos elementos x tais que: $x \in E_j,$ para um ou mais índices n.

A *intersecção* desses conjuntos, denotada por $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, é o conjunto P tal que

$$x \in P \iff x \in E_j, \text{ para todo } n.$$

Exemplos 2.0.8

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Observe que cada E_n é um conjunto finito: $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{1, 2\}$, $E_3 = \{1, 2, 3\}$ etc.

   Temos: $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{N}$; $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{1\}$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $E_n = \{n\}$. Temos: $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{N}$; $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$.

Teorema 2.0.9 Seja $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis e seja $U = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Então U é enumerável.

Demonstração. Primeiramente vamos observar que, como $E_1 \subset U$, U é infinito.

Os elementos de cada E_n podem ser colocados em uma lista infinita, já que E_n é enumerável. Assim, vamos considerar a matriz

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1n} & \ldots \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2n} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ e_{m1} & e_{m2} & \ldots & e_{mn} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

em que a primeira linha é formada por todos os elementos do conjunto E_1, a segunda linha, pelos elementos de E_2, e assim por diante.

Os elementos da matriz são os elementos do conjunto U. Para mostrar que U é um conjunto enumerável, teríamos que escrever os elementos de U em uma lista sem repetições. Como não sabemos quais termos se repetem na matriz, é possível escrever tal lista! Para contornar essa dificuldade, vamos colocar os elementos da matriz em uma sequência (que pode ter repetições),

$$s : e_{11}, \quad e_{21}, e_{12}, \quad e_{31}, e_{22}, e_{13}, \quad e_{41}, e_{32}, e_{23}, e_{14}, \ldots$$

Observe que a sequência s tem uma regra de formação: primeiramente começamos com o termo e_{11}, depois os termos cuja soma dos índices é 3, a saber, e_{21} e e_{12}, depois termos cuja soma dos índices é 4: e_{31}, e_{22} e e_{13} e assim por diante.

Como conseguimos escrever todos os elementos da matriz em forma de uma sequência, existe uma função de $\mathbb{N}$ no conjunto U, que associa os números 1, 2, 3, ..., respectivamente a $e_{11}, e_{21}, e_{12}, e_{31}, e_{22}, e_{13}, e_{41}, e_{32}, e_{23}, e_{14}, \ldots$ Como a primeira linha da matriz já é um conjunto enumerável, logo infinito, os termos da sequência s formam um conjunto enumerável.

Assim, U é um subconjunto infinito do conjunto enumerável formado pelos termos da sequência s. Pelo teorema 2.0.6, U é enumerável.

□

Corolário 2.0.10 A reunião finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Demonstração. Se U é o conjunto do teorema anterior, tem-se que a reunião finita $F = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \subset U$ é um subconjunto infinito de um conjunto enumerável. Logo, F é enumerável.

□

Corolário 2.0.11 Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são conjuntos finitos ou enumeráveis, então $R = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ é no máximo enumerável.

Demonstração. De fato, se cada E_k for finito, então R será um conjunto finito. (*Por que?*) Se algum E_k for enumerável, como $E_k \subset R$, a reunião R será um conjunto infinito. Logo, enumerável.

Teorema 2.0.12 Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

é enumerável.

Demonstração. Para cada $a \in A$ fixado, considere o conjunto $B_a = \{(a, b) : b \in B\}$. Esse conjunto é equivalente a B e, portanto, enumerável.

Mas observe que $A \times B = \bigcup_{a \in A} B_a$, ou seja, $A \times B$ é uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis. Portanto, pelo teorema 2.0.9, $A \times B$ é enumerável.

□

Exercício 2.0.13 Prove que se A é enumerável, então o conjunto das n-uplas

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_j \in A\}$$

é enumerável.
Dica: use indução.

Corolário 2.0.14 $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Q}$. Então $x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ que, a cada par (p, q) associa o número $x = \frac{p}{q}$.

É claro que f é uma função. Seu domínio é um conjunto enumerável (*por que?*) e, claramente, f é sobrejetora.

Como a imagem de um conjunto enumerável ou é um conjunto finito, ou é um conjunto enumerável, basta mostrarmos que a imagem de f não é finita. (Note que f não é injetora, já que, por exemplo, $f(1, 2) = f(2, 4) = f(3, 6)$.)

Mas a imagem de f contém todos os números inteiros, pois, se $n \in \mathbb{Z}$ então $n = f(n, 1)$. Portanto, $\mathbb{Q}$ é enumerável.

□

Teorema 2.0.15 O intervalo $[0, 1]$ não é enumerável.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $[0,1]$ seja enumerável. Como esse conjunto contém o conjunto infinito $A = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, vemos que $[0,1]$ é também infinito.

Seja $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ uma enumeração de $[0,1]$. Podemos escrever cada x_j na forma decimal infinita e, para evitar repetições vamos escolher as representações decimais que não terminam com infinitos algarismos iguais a 9. Por exemplo, o número $0,5$ será representado como $0,5000\ldots$ e não $0,49999\ldots$. Assim,

$$\begin{array}{ccl} x_1 & = & 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\ x_2 & = & 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ são os algarismos da representação decimal de $x_i)$

Vamos agora definir o número $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ da seguinte maneira:

$$b_1 = 5, \text{ se } a_{11} \neq 5 \text{ e } b_1 = 6, \text{ se } a_{11} = 5;$$
$$b_2 = 5, \text{ se } a_{22} \neq 5 \text{ e } b_2 = 6, \text{ se } a_{22} = 5$$

e assim por diante. Ou seja, $b_n = 5$, se $a_{nn} \neq 5$ e $b_n = 6$, se $a_{nn} = 5$, para cada n.

Você sabe argumentar por que tal b existe? (Lembre-se de que b é um número que pode ser escrito na forma $b = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{10^j} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\}$).

Mas veja que interessante: o número b é diferente de x_1, pois, por construção, sua primeira casa decimal é diferente da primeira casa decimal de x_1 $(b_1 \neq a_{11})$.

O número b também é diferente de x_2, pois $b_2 \neq a_{22}$, ... Para cada n, o número b é diferente de x_n, pois $b_n \neq a_{nn}$.

Mas isso contradiz o fato de $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ ser uma enumeração de $[0,1]$, já que encontramos um número $b \in [0,1]$ que não estava nessa lista!

$\square$

Corolário 2.0.16 $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Corolário 2.0.17 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável.

Exercícios

1. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se B é um conjunto finito e C, um conjunto enumerável então $B \cup C$ é enumerável.

2. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se F e G são conjuntos enumeráveis então $F \cup G$ é enumerável.

3. Seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n e com coeficientes inteiros. Prove que $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ é enumerável.
   Sugestão: Verifique que $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ é equivalente a $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n+1}$

4. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros. Prove que $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ é enumerável.

5. O conjunto dos números irracionais é enumerável?

6. Prove que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então o intervalo $[a, b]$ é um conjunto não enumerável.

7. Prove que o conjunto de todos os pontos do intervalo $]0, 1[$ é equivalente (segundo Cantor) ao conjunto de todos números reais.
   Sugestão: use a função $f(x) = a \operatorname{arctg} x + b$ para a e b convenientes.

8. Um número real r é dito *algébrico* se r é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

   (a) Verifique que os números 2, $\dfrac{1}{13}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{267}$ são algébricos, encontrando funções polinomiais que têm esses números como raízes.

   (b) Verifique que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{2}(1 + \sqrt{5})$ são algébricos. (Você irá precisar de equações de grau 4).

   (c) Seja $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots\}$ uma enumeração de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Seja A_n o conjuntos das raízes reais de p_n. Conclua que o conjunto A formado por todos os números algébricos, é enumerável.

   (d) Um número real é dito *transcendente* se não é algébrico. Mostre que o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável.

Referências Bibliográficas

[1] Geraldo Ávila. *Análise Matemática para Licenciatura*. Edgard Blucher Ltda, 3 edition, 2006.

[2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise I*. Livros Técnicos e Científicos S.A., 1975.

[3] Elon Lages Lima. *Análise Real*. IMPA, CNPq, 1997.

[4] Ivan Niven. *Números: racionais e irracionais*. SBM, 1984.

[5] Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. Ed. Ao Livro Técnico S.A., 1971.