Capítulo 2

Conjuntos Infinitos

O conjunto dos números naturais é o primeiro exemplo de conjunto infinito que aprendemos. Desde crianças, sabemos intuitivamente que tomando-se um número natural n muito grande sempre existe outro maior ainda como, por exemplo, seu sucessor $n + 1$, seu dobro $2n$, seu triplo $3n$, ...

No final do século XIX apareceu a necessidade de compreender melhor os conjuntos infinitos, motivada pelo estudo de funções integráveis: sabemos que se uma função limitada tem uma quantidade finita de descontinuidades, ela é integrável. E se a quantidade de descontinuidades for infinita? Em alguns casos, a função ainda é integrável, em outros, não! Foi justamente a curiosidade de entender em quais situações a função é integrável e em quais não que levou ao estudo que iremos introduzir agora.

2.1 Existem diferentes tipos de infinito

Desde crianças aprendemos a contar... *O que é contar*?

Se dermos a uma criança um pacote com 5 lápis e pedirmos a ela que conte, do ponto de vista da Matemática, o que a criança faz é estabelecer uma bijeção entre os lápis e o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Há situações em que há necessidade de se *comparar* as quantidades de dois conjuntos. Por exemplo, imagine que estamos em uma sala com muitas cadeiras e várias pessoas e queremos saber se há mais cadeiras ou mais pessoas. Uma possibilidade de se obter resposta ao problema é contar quantas são as cadeiras, quantas são as pessoas. Mas é possível evitar essas contagens: podemos pedir a todos que se sentem. Se sobrarem cadeiras vazias, há mais cadeiras. Se sobrarem pessoas em pé, há mais pessoas! Qual é a Matemática que está por trás dessa solução?

Ao pedirmos para as pessoas que se sentem, estamos estabelecendo uma função que a cada pessoa associa a cadeira onde ela se sentou. Se essa função for bijetora, o número de cadeiras e de pessoas é o mesmo! A função é injetora, pois estamos subentendendo que só pode ter uma pessoa em cada cadeira. Se a função não for sobrejetora, há cadeiras sobrando.

Alguém poderia questionar sobre a possibilidade de não haver cadeiras para todas as pessoas. Nesse caso, não está estabelecida uma correspondência que a cada elemento do domínio (conjunto das pessoas) associa um elemento no contra-domínio (conjunto das cadeiras). Matematicamente, a função não estaria bem definida.

O que é feito no estudo de conjuntos infinitos é basicamente encontrar uma função bijetora para *comparar* o conjunto alvo de nosso estudo com outro já conhecido.

Vamos recordar:

Definição 2.1.1 Sejam A e B conjuntos quaisquer e seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que A é o *domínio de* f e B é o *contra-domínio de* f. O conjunto de todos os valores $f(a)$ é o que chamamos de *imagem de* f. Escrevemos $\operatorname{Im} f = \{f(a) : a \in A\}$.

Se $\operatorname{Im} f = B$, dizemos que f leva A *sobre* B, e que f é uma função *sobrejetora.*

Uma função f é *injetora* se elementos distintos do domínio são levados em elementos distintos da imagem.

Uma função injetora e sobrejetora é chamada *bijetora.*

Alguns comentários:

(1) Para demonstrar que uma função $f : A \to B$ é sobrejetora, como $\operatorname{Im} f \subset B$, basta provar a inclusão contrária, ou seja, provar que para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

(2) Para demonstrar que uma função f é injetora, basta provar que

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Definição 2.1.2 Se existir uma função bijetora entre dois conjuntos A e B, dizemos que os conjuntos têm *a mesma cardinalidade* e escrevemos $A \sim B$.

Note que a relação $A \sim B$ é uma relação de equivalência, isto é, satisfaz as propriedades:

(i) $A \sim A$ (propriedade reflexiva)

(ii) Se $A \sim B$ então $B \sim A$ (propriedade simétrica)

(iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$ (propriedade transitiva)

Por esse motivo, se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, dizemos que eles são *equivalentes* (segundo *Cantor*).

Exercício 2.1.3 Verifique que, de fato, a relação "A tem a mesma cardinalidade que B" é uma relação de equivalência.

É necessário esclarecer que a terminologia usada neste tópico daqui para frente pode diferir levemente de um livro para outro. Neste texto adotaremos as mesmas definições encontradas no livro do Rudin [5].

Definição 2.1.4 Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

(a) Um conjunto A é *finito* se existir uma função bijetora de F_n em A, para algum n. Dizemos, nesse caso, que A tem n elementos. Consideramos o vazio um conjunto finito.

(b) A é *infinito* se A não for finito.

(c) A é *enumerável* se $A \sim \mathbb{N}$.

(d) A é *não enumerável* se A não for finito nem enumerável.

(e) A é *no máximo enumerável* se A for finito ou enumerável.

Com a definição adotada, um conjunto enumerável é infinito.

Note que se um conjunto A é finito, a função bijetora $f : F_n \to A$ é nada mais que a função que usada para *contar* os elementos de A.

Exemplos 2.1.5 **(a)** O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um conjunto enumerável.

(b) O conjunto $\mathcal{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dos números pares também é enumerável. Neste caso, é fácil ver que a função $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ dada por $f(n) = 2n$ é bijetora.

(c) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. De fato, podemos pensar na função que leva $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ associando os números naturais aos inteiros na seguinte ordem:

$$0,\ \ 1, -1,\ \ 2, -2,\ \ 3, -3, \ldots$$

Essa função pode ser dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par },\\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar }. \end{cases}$$

Fica a cargo do leitor verificar que f é uma função bijetora.

Exemplos 2.1.6 **(a)** Seja $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ tal que $f(n) = \dfrac{1}{n}$

A função f é injetora pois $f(n) = f(m) \iff \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \iff \frac{m-n}{nm} = 0 \iff m = n.$

Claramente f não é sobrejetora, já que existem números reais x no intervalo $[0, 1]$ que não são da forma $\frac{1}{n}$.

Mas é interessante notar que $\operatorname{Im} f = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é um conjunto enumerável.

(b) Seja $g : \mathbb{N} \to [0, 1]$ tal que $g(n) = 0$, se n for par, $g(n) = 1$, se n for ímpar. Neste caso, a função não é injetora nem sobrejetora. $\operatorname{Im} g = \{0, 1\}$, que é finito.

Os exemplos acima ilustraram o fato que se uma função tem domínio $\mathbb{N}$, sua imagem pode ser finita ou enumerável. A imagem de uma função com domínio $\mathbb{N}$ não pode ser um conjunto infinito não enumerável.

Se uma função $f : A \to B$ é injetora, então A e $\operatorname{Im} f$ têm a mesma cardinalidade. Em particular, se $A = \mathbb{N}$ e f é injetora, $\operatorname{Im} f$ é enumerável.

Definição 2.1.7 Uma *sequência* é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$. Se $f : \mathbb{N} \to A$, denotamos $f(n) = a_n$, dizemos que os valores a_n são os *termos* da sequência e que $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é *uma sequência em* A.

As notações $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (a_n) são usadas para indicar a sequência cujos termos são $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Note que uma sequência é uma lista de seus termos em uma certa ordem: o elemento indicado por a_1 é o primeiro, o elemento a_2 é o segundo, e assim por diante.

Os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ não precisam ser dois a dois distintos. Por exemplo, a sequência $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots)$ formada pelas potências de 2 tem todos os seus termos distintos entre si. Já a sequência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ dada por $f(n) = 1$, se n é ímpar e $f(n) = 2$, se n é par, é uma sequência cujos termos se repetem no conjunto $\{1, 2\}$.

Como um conjunto enumerável é a imagem de uma função bijetora definida em $\mathbb{N}$, podemos compreender um conjunto enumerável como a imagem de uma sequência de termos distintos dois a dois, ou ainda, que os elementos de um conjunto enumerável podem ser organizados em uma sequência.

Cabe agora uma observação muito importante. Quando lidamos com conjuntos finitos, se um conjunto A é um *subconjunto próprio* de B, isto é, se A está contido em um conjunto B e é diferente de B, então A tem uma quantidade de elementos menor do que B. Entretanto, os exemplos acima mostram que com conjuntos infinitos pode acontecer $A \subset B$, $A \neq B$ e $A \sim B$: o exemplo 2.1.5(b) mostrou que $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{P} \sim \mathbb{N}$; o exemplo 2.1.5(c) mostrou que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Esse fato caracteriza os conjuntos infinitos e, por isso, alguns autores adotam a seguinte definição: *um conjunto C é infinito se for equivalente a algum de seus subconjuntos próprios.*

Teorema 2.1.8 Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Demonstração. Sejam A um conjunto enumerável e $B \subset A$ um subconjunto infinito.

Como A é enumerável seus elementos podem ser colocados em uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de termos distintos dois a dois ($a_i \neq a_j$ se $i \neq j$).

Vamos construir uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ da sequinte maneira:

Defina n_1 como o primeiro natural tal que $a_{n_1} \in B$.

Tome n_2 como sendo o menor natural que é maior do que n_1 tal que $a_{n_2} \in B$.

Tendo encontrado $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ tome n_k como sendo o menor natural que é maior do que n_{k-1} tal que $a_{n_k} \in B$.

Como B, por hipótese, é um conjunto infinito, B pode ser visto como uma sequência

$$B = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots)$$

É claro que esses termos são distintos dois a dois. Assim obtemos uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to B$ dada por $f(k) = a_{n_k}$. Logo, B é enumerável.

$\square$

A ideia que esse teorema nos apresenta é que os conjuntos enumeráveis são conjuntos do "menor tipo de infinito", já que nenhum conjunto não enumerável pode ser subconjunto de um enumerável.

Definição 2.1.9 Sejam $E_1, E_2, E_3, \dots$ conjuntos.

A *reunião* de todos esses conjuntos, denotada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, é o conjunto U formado pelos elementos x tais que: $x \in E_j,$ para um ou mais índices n.

A *intersecção* desses conjuntos, denotada por $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, é o conjunto P tal que

$$x \in P \iff x \in E_j, \text{ para todo } n.$$

Exemplos 2.1.10

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Observe que cada E_n é um conjunto finito: $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{1, 2\}$, $E_3 = \{1, 2, 3\}$ etc.
   Temos: $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{N}$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{1\}$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $E_n = \{n\}$. Temos: $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{N}$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$.

Teorema 2.1.11 Seja $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis e seja $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Então U é enumerável.

Demonstração. Primeiramente vamos observar que, como $E_1 \subset U$, U é infinito.

Os elementos de cada E_n podem ser colocados em uma lista infinita, já que E_n é enumerável. Assim, vamos considerar a matriz

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} & \dots \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

em que a primeira linha é formada por uma sequência de todos os elementos do conjunto E_1, a segunda linha, por uma sequência dos elementos de E_2, e assim por diante.

Os elementos da matriz são os elementos do conjunto U. Para mostrar que U é um conjunto enumerável, teríamos que escrever os elementos de U em uma lista sem repetições. Mas não sabemos quais termos se repetem na matriz. Para contornar essa dificuldade, vamos colocar os elementos da matriz em uma sequência (que pode ter repetições),

$$s : e_{11}, \quad e_{21}, e_{12}, \quad e_{31}, e_{22}, e_{13}, \quad e_{41}, e_{32}, e_{23}, e_{14}, \dots$$

Observe que a sequência s tem uma regra de formação: primeiramente começamos com o termo e_{11}, depois os termos cuja soma dos índices é 3, a saber, e_{21} e e_{12}, depois termos cuja soma dos índices é 4: e_{31}, e_{22} e e_{13} e assim por diante.

Como conseguimos escrever <u>todos</u> os elementos da matriz em forma de uma sequência, existe uma função de $\mathbb{N}$ no conjunto U, que associa os números 1, 2, 3, ..., respectivamente a $e_{11}, e_{21}, e_{12}, e_{31}, e_{22}, e_{13}, e_{41}, e_{32}, e_{23}, e_{14}, \dots$ Como a primeira linha da matriz já é um conjunto enumerável, logo infinito, os termos da sequência s formam um conjunto enumerável.

Assim, U é um subconjunto infinito do conjunto enumerável formado pelos termos da sequência s. Pelo teorema 2.1.8, U é enumerável.

$\square$

Corolário 2.1.12 A reunião finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

<u>*Demonstração*</u>. Se U é o conjunto do teorema anterior, tem-se que a reunião finita $F = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \subset U$ é um subconjunto infinito de um conjunto enumerável. Logo, F é enumerável.

$\square$

Corolário 2.1.13 Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são conjuntos finitos ou enumeráveis, então $R = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ é no máximo enumerável.

<u>*Demonstração*</u>. De fato, se cada E_k for finito, então R será um conjunto finito. (*Por que?*) Se algum E_k for enumerável, como $E_k \subset R$, a reunião R será um conjunto infinito. Logo, enumerável.

Teorema 2.1.14 Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

é enumerável.

<u>*Demonstração*</u>. Para cada $a \in A$ fixado, considere o conjunto $B_a = \{(a, b) : b \in B\}$. Esse conjunto é equivalente a B e, portanto, enumerável.

Mas observe que $A \times B = \bigcup_{a \in A} B_a$, ou seja, $A \times B$ é uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis. Portanto, pelo teorema 2.1.11, $A \times B$ é enumerável.

$\square$

Exercício 2.1.15 Prove que se A é enumerável, então o conjunto das n-uplas

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_j \in A\}$$

é enumerável.
<u>Dica</u>: use indução.

Corolário 2.1.16 $\mathbb{Q}$ é enumerável.

<u>*Demonstração*</u>. Seja $x \in \mathbb{Q}$. Então $x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ que, a cada par (p, q) associa o número $x = \frac{p}{q}$.

É claro que f é uma função. Seu domínio é um conjunto enumerável (por quê?) e, claramente, f é sobrejetora.

Como a imagem de um conjunto enumerável ou é um conjunto finito, ou é um conjunto enumerável, basta mostrarmos que a imagem de f não é finita. (Note que f não é injetora, já que, por exemplo, $f(1,2) = f(2,4) = f(3,6)$.)

Mas a imagem de f contém todos os números inteiros, pois, se $n \in \mathbb{Z}$ então $n = f(n,1)$ e, portanto, é infinita.

Assim, podemos concluir que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

$\square$

Teorema 2.1.17 O intervalo $[0,1]$ é infinito e não enumerável.

Demonstração. O intervalo $[0,1]$ contém o conjunto infinito $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Logo, $[0,1]$ é também infinito.

Suponha, por absurdo, que $[0,1]$ seja enumerável. Logo existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to [0,1]$

Defina $f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \ldots$

Podemos escrever cada x_j na forma decimal infinita e, para evitar ambiguidade, os números de representação decimal finita serão escritos com infinitos algarismos iguais a 9. Por exemplo, o número $0,5$ será representado por $0,49999\ldots$, o número $0,27$ será escrito na forma $0,26999\ldots$ e o número 1 será escrito como $0,999\ldots$. Assim,

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\
x_2 & = & 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\
\vdots & & \vdots \\
x_n & = & 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

($a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ são os algarismos da representação decimal de x_i)

Vamos agora definir o número $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ que tem suas casas decimais $b_1, b_2, b_3, \ldots$ escolhidas da seguinte maneira:

$$b_1 = 5, \text{ se } a_{11} \neq 5 \text{ e } b_1 = 6, \text{ se } a_{11} = 5;$$
$$b_2 = 5, \text{ se } a_{22} \neq 5 \text{ e } b_2 = 6, \text{ se } a_{22} = 5$$

e assim por diante. Ou seja, $b_n = 5$, se $a_{nn} \neq 5$ e $b_n = 6$, se $a_{nn} = 5$, para cada n.

Pergunta: Esse número b existe?

(Lembre-se de que $b = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{10^j} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N} \right\}$).

Mas veja que interessante: o número b é diferente de x_1, pois, por construção, sua primeira casa decimal é diferente da primeira casa decimal de x_1 ($b_1 \neq a_{11}$).

O número b também é diferente de x_2, pois $b_2 \neq a_{22}$, ... Para cada n, o número b é diferente de x_n, pois $b_n \neq a_{nn}$.

Mas isso contradiz o fato de $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ ser uma enumeração de $[0, 1]$, já que encontramos um número $b \in [0, 1]$ que não estava nessa lista!

□

Corolário 2.1.18 $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Corolário 2.1.19 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável.

Exemplo 2.1.20 Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se B é um conjunto finito e C, um conjunto enumerável então $B \cup C$ é enumerável.

Solução. (Precisamos provar que existe uma função bijetora entre $\mathbb{N}$ e $B \cup C$.)

- Vamos começar com o caso mais simples, em que B e C são conjuntos disjuntos.

  Como B é finito, pela definição 2.1.4(a), existe uma bijeção $g : \{1, 2, \ldots n\} \to B$, para algum n. Vamos indicar $b_k = g(k)$, para $1 \leq k \leq n$. Assim, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

  Como C é enumerável, pela definição 2.1.4(c), existe uma bijeção $h : \mathbb{N} \to C$. Indicaremos $c_j = h(j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$.

  Vamos agora definir $f : \mathbb{N} \to B \cup C$ da seguinte maneira:

$$f(1) = b_1, f(2) = b_2, \ldots, f(n) = b_n, f(n+1) = c_1, f(n+2) = c_2, \ldots f(n+j) = c_j, \ldots$$

  Ou seja,

$$f(i) = \begin{cases} b_i, & \text{se } 1 \leq i \leq n \\ c_{i-n}, & \text{se } i > n \end{cases}$$

Vamos provar que f é bijetora[1]:

f é injetora: Sejam $f(i)$ e $f(j)$ em $B \cup C$ e suponha $f(i) = f(j)$. (Vamos provar que $i = j$.) Como B e C são disjuntos, ou $f(i)$ e $f(j)$ pertencem ambos a B, ou ambos a C. No primeiro caso, $f(i) = f(j) \iff b_i = b_j \iff g(i) = g(j)$. Mas g é injetora! Logo, $i = j$. No segundo caso, $f(i) = f(j) \iff c_{i-n} = c_{j-n} \iff h(i-n) = h(j-n)$. Mas h é injetora! Logo, $i - n = j - n$, ou seja, $i = j$.

f é sobrejetora: Seja $x \in B \cup C$. (Temos que provar que x pertence à imagem de f.)

Como os conjuntos B e C são disjuntos, temos que ou $x \in B$ ou $x \in C$. Se $x \in B$, como g é sobrejetora, $x = g(i) = b_i$, para algum $i \in \{1, 2, \ldots n\}$. Mas $b_i = f(i)$. Portanto, $x = f(i)$, para algum i.

Se $x \in C$, como h é sobrejetora, $x = h(j) = c_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Mas $c_j = f(j + n)$. Portanto, x pertence à imagem de f também neste caso.

- Passemos agora ao caso em que B e C não são disjuntos. Então existem elementos em B e em C simultaneamente. Seja $D = B - C = \{b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots, b_{n_m}\}$ o conjunto (finito) dos elementos de B que não estão em C. Temos que $B \cup C = D \cup C$. Claramente D e C são disjuntos. Portanto, pelo caso anterior, $D \cup C$ é enumerável.

$\square$

Exemplo 2.1.21 Dúvida de uma aluna: *Dois conjuntos enumeráveis podem ter uma interseção infinita?*

Solução. Sim. Vejamos um exemplo: Considere os conjuntos

$$\mathcal{P}_2 = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{P}_3 = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$$

respectivamente o conjunto dos múltiplos de 2 e o dos múltiplos de 3.

Qual a interseção desses conjuntos?

$$\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\} = \{6, 12, 18, \ldots\} = \{6n : n \in \mathbb{N}\}$$

[1]Em nosso entender, a demonstração a seguir é bastante direta, não oferecendo qualquer dificuldade técnica. Ela foi colocada aqui para atender ao pedido de alguns alunos. Aconselho que os alunos que não acham claro que f é bijetora reflitam melhor sobre a construção dessa função. Pela própria forma como foi definida, deveria ser fácil perceber que cada elemento em $B \cup C$ está associado a exatamente um número natural por meio de f.

Exercícios

1. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se F e G são conjuntos enumeráveis então $F \cup G$ é enumerável.

2. Seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n e com coeficientes inteiros. Prove que $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ é enumerável.
   Sugestão: Verifique que $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ é equivalente a $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n+1}$

3. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros. Prove que $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ é enumerável.

4. O conjunto dos números irracionais é enumerável?

5. Prove que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então o intervalo $[a, b]$ é um conjunto não enumerável.

6. Prove que o conjunto de todos os pontos do intervalo $]0, 1[$ é equivalente (segundo Cantor) ao conjunto de todos números reais.
   Sugestão: use a função $f(x) = a \operatorname{arctg} x + b$ para a e b convenientes.

7. Um número real r é dito *algébrico* se r é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

   (a) Verifique que os números 2, $\dfrac{1}{13}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{267}$ são algébricos, encontrando funções polinomiais que têm esses números como raízes.

   (b) Verifique que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{2}(1 + \sqrt{5})$ são algébricos. (Você irá precisar de equações de grau 4).

   (c) Seja $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots\}$ uma enumeração de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Seja A_n o conjuntos das raízes reais de p_n. Conclua que o conjunto A formado por todos os números algébricos, é enumerável.

   (d) Um número real é dito *transcendente* se não é algébrico. Mostre que o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável.

Referências Bibliográficas

[1] Geraldo Ávila. *Análise Matemática para Licenciatura*. Edgard Blucher Ltda, 3 edition, 2006.

[2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise I*. Livros Técnicos e Científicos S.A., 1975.

[3] Elon Lages Lima. *Análise Real*. IMPA, CNPq, 1997.

[4] Ivan Niven. *Números: racionais e irracionais*. SBM, 1984.

[5] Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática*. Ed. Ao Livro Técnico S.A., 1971.