Capítulo 3

Sequências e Séries Numéricas

3.1 Sequências Numéricas

Uma sequência numérica é uma função real com domínio $\mathbb{N}$ que, a cada n associa um número real a_n. Os números a_n são chamados *termos* da sequência.

É comum indicar uma sequência escrevendo apenas uma lista *ordenada* de seus termos:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Alguns autores também denotam uma sequência usando parêntesis:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) \text{ ou } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ ou simplesmente } (a_n)$$

Também podemos descrever uma sequência por meio da fórmula do termo geral a_n, quando houver. Por exemplo, a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ pode ser representada da forma $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ou ainda por meio da expressão $a_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

A imagem da sequência é formada pelo conjunto de todos os valores a_n, e pode ser um conjunto finito ou infinito.

Uma sequência $(a_n)_n$ é *limitada superiormente* se existir um número N tal que

$$a_n \leq N, \text{ para todo } n \geq 1$$

Ela é *limitada inferiormente* se existir um número M tal que

$$M \leq a_n, \text{ para todo } n \geq 1$$

Se uma sequência for limitada superior e inferiormente, diremos que ela é uma *sequência limitada.*

Exemplos 3.1.1 Alguns exemplos importantes de sequências são estudados já no Ensino Fundamental e no Ensino Médio:

- Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência de números tais que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é sempre a mesma. Por exemplo, a sequência 10, 13, 16, 19, ... é uma PA.

  Se o termo inicial da PA é a_1 e a diferença entre os termos é r, então o n-ésimo termo é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$. O professor deve ensinar alguns fatos importantes sobre as PAs, tais como, se $r > 0$, então a sequência cresce indefinidamente (isto é, tende a infinito). Também costuma-se ensinar como obter o valor da soma de uma quantidade finita de termos consecutivos de uma PA: uma fórmula fácil de ser obtida e bastante instrutiva, que pode ser motivada por meio de problemas (ou perguntas) interessantes.

- Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência de números em que o quociente entre um termo e seu antecessor é constante. Esse quociente é uma constante não nula chamada *razão*. Por exemplo, a sequência $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ é uma progressão geométrica de razão 2. A sequência $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ é uma PG de razão $-\frac{1}{3}$. Em geral, uma PG pode ser escrita na forma

  $$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n, \ldots, \text{ para } r \neq 0 \text{ e termo inicial } a$$

  Há muitos aspectos interessantes e fatos importantes sobre as PGs que devem ser ensinados, para preparar melhor os alunos do ensino médio para muito do que eles terão que enfrentar no futuro. Por exemplo, usa-se PG para se calcular o valor, depois de n meses, do capital investido a juros compostos. Também é muito importante saber que se $-1 < r < 1, r \neq 0$, a soma dos infinitos termos da PG é finita. Voltaremos a esse assunto quando formos estudar séries, isto é, somas com infinitas parcelas.

- Uma sequência famosa é a *Sequência de Fibonacci*. Trata-se da sequência cujos dois primeiros termos são iguais a 1 e, todo número a partir do terceiro termo é a soma dos dois que o precedem, isto é:

$$f_1 = f_2 = 1, \ \text{ e } \ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 3$$

Assim, os primeieros termos da sequência de Fibonacci são:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

Há uma quantidade surpreendente de fatos relacionados à sequência de Fibonacci, tanto em Matemática (a razão áurea, o Triângulo de Pascal), como fora dela (em botânica, música, arquitetura, por exemplo)[1].

Exemplos 3.1.2 Nos exemplos de sequências abaixo, cada sequência está descrita de mais de uma maneira.

1. (a) $(2, 4, 6, \ldots)$ (b) $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$

2. (a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right)$ (b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=2}^{\infty}$ (c) $b_n = \frac{n+1}{n}, n \geq 2$

3. (a) $(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots)$ (b) $c_n = (-1)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

4. (a) $(5,\ 5,\ 5,\ 5, \ldots,\ 5, \ldots)$ (b) $d_n = 5, n \in \mathbb{N}$

5. (a) $(-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots)$ (b) $r_n = -n^2, n \in \mathbb{N}$

6. (a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right)$ (b) $s_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ (c) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

7. (a) $t_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ (b) $\left(\frac{(-1)^n n}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ (c) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{-3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots, \frac{(-1)^n n}{2^n}\right)$

Nos exemplos acima, a sequência 1 não é limitada (superiormente) pois os valores de a_n crescem arbitrariamente. A sequência 5 também não é limitada (inferiormente), pois os valores de r_n decrescem arbitrariamente, não existindo M tal que $M \leq r_n$ para todo n. Todas as demais são sequências limitadas. De fato,

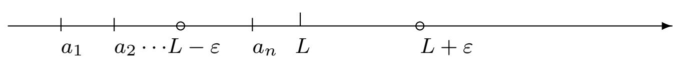
- Na sequência 2 vale que $1 < b_n < 2, \forall n$ (verifique!) e sua imagem é um conjunto infinito (por que?);

[1] veja, por exemplo, `https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_numbers_in_popular_culture`

- Na 3, o conjunto imagem tem apenas dois elementos, -1 e 1. A sequência é limitada, já que $-1 \leq c_n \leq 1, \forall n$;
- A imagem da sequência 4 é o conjunto $\{5\}$. Logo, a sequência é limitada;
- Na 6, tem-se $0 < s_n < 1, \forall n$ (verifique!). A imagem é um conjunto infinito (justifique!).
- O que você pode dizer sobre a sequência 7?

Definição 3.1.3 Dizemos que uma sequência $(a_n)_n$ *converge* para um número real L se para qualquer $\varepsilon > 0$, for possível encontrar um índice n_0 tal que

$$|L - a_n| < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0$$



Observação: Quando testamos a convergência de uma sequência, nos interessam os valores pequenos de ε. De fato, se para cada $\varepsilon_0 > 0$ dado existir n_0 tal que $|L - a_n| < \varepsilon_0$, para todo $n \geq n_0$, e se $\varepsilon > \varepsilon_0$ então $|L - a_n| < \varepsilon_0 < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.

O número L é chamado *limite* da sequência. Usamos as notações

$$L = \lim a_n \qquad \text{ou} \qquad a_n \longrightarrow L$$

para indicar que a sequência (a_n) converge para L.

Exemplo 3.1.4 Vamos demonstrar que a sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_n$ converge para 1.
Rascunho: (Nosso objetivo é provar que, dado um número $\epsilon > 0$ qualquer, consigo determinar n_0 com a propriedade $\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Ou seja, precisamos resolver uma inequação em n.)

Mas $\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. Logo, se tomarmos um natural maior do que $\frac{1}{\varepsilon}$, o problema estará resolvido. Uma última questão é: existe um natural maior do que $\frac{1}{\varepsilon}$, para qualquer ε dado? A resposta afirmativa é consequência da Propriedade Arquimediana, vista no capítulo 1.

Solução: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Pela Propriedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Para todo $n > n_0$, teremos:

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

□

Observação: Esse exemplo ilustra o fato que, quanto menor o número ε, maior o índice n_0 necessário para aproximar o termo a_n do limite L. Por exemplo, se $\varepsilon = 10^{-1}$, precisamos escolher $n_0 > 10$; se $\varepsilon = 10^{-2}$, precisamos de $n_0 > 100$.

Exemplo 3.1.5 A sequência $(-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$ não converge.

Intuitivamente, como há infinitos termos da sequência iguais a 1 e infinitos termos iguais a -1, é impossível que, a partir de algum índice, os termos se aproximem de algum valor L. Mas como provar, de modo rigoroso, que não existe L com a propriedade desejada? A ideia é tomar ε pequeno, de modo que qualquer que seja L, o intervalo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ não possa conter todos os termos da sequência a partir de algum índice.

Solução: Seja $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Qualquer que seja o número real L e para qualquer natural n_0, existirão termos a_n com $n > n_0$ tal que $a_n \notin]L - \frac{1}{4}, L + \frac{1}{4}[$, já que o intervalo tem comprimento $\frac{1}{2}$ e, para n par, teremos $a_n = 1$ e para n ímpar, teremos $a_n = -1$.

Uma outra forma de dizer isso é:

"Dado $\varepsilon = \frac{1}{4}$, para todo $L \in \mathbb{R}$ e todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n > n_0$ tal que $|L - a_n| > \frac{1}{4}$".

□

Quando uma sequência não converge, dizemos que ela diverge.

Se para qualquer número $M > 0$ dado, existir um índice n_0 tal que $a_n > M$, $\forall n > n_0$, dizemos que a sequência "tende a $+\infty$" e escrevemos $\lim a_n = +\infty$ ou $a_n \longrightarrow +\infty$. É o que acontece com a sequência 1 do exemplo 3.1.2.

Analogamente, se para cada $M > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < -M$, $\forall n \geq n_0$, escrevemos $\lim a_n = -\infty$. Um exemplo para esse caso é o da sequência 5 em 3.1.2.

Se uma sequência tende a $+\infty$ ou a $-\infty$ ela também é considerada *divergente*.

Proposição 3.1.6 (Propriedades do limite)

Se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são sequências convergentes tais que $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$ e se k é um número real qualquer, então

(a) a sequência $(a_n + b_n)_n$ é convergente e $\lim(a_n + b_n) = a + b$;

(b) a sequência $(k + a_n)_n$ é convergente e $\lim(k + a_n) = k + a$.

(c) a sequência $(ka_n)_n$ é convergente e $\lim(ka_n) = ka$.

(d) a sequência $(a_n b_n)_n$ é convergente e $\lim(a_n b_n) = ab$;

(e) se $a_n \neq 0$, $\forall n$ e $a \neq 0$ então a sequência $\left(\frac{1}{a_n}\right)_n$ é convergente e $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$

Demonstração.

(a) Seja $\varepsilon > 0$. (Precisamos encontrar n_0 tal que $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$.)

Por hipótese, como $a = \lim a_n$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_1$. Analogamente, como $b = \lim b_n$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_2$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Para todo $n \geq n_0$ temos:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(b) Exercício.

(c) Exercício.

(d) (Rascunho: precisamos provar que, a partir de algum índice n_0, $|a_n b_n - ab|$ se torna tão pequeno quanto se queira, sabendo que $|a_n - a|$ e $|b_n - b|$ podem ser escolhidos tão pequenos quanto quisermos. Um dos problemas é relacionar $|a_n b_n - ab|$ com as diferenças $|a_n - a|$ e $|b_n - b|$. O que fazer? Uma ideia pode ser a seguinte:

$$\begin{aligned}(a_n - a)(b_n - b) &= a_n b_n - a_n b - ab_n + ab = a_n b_n - (a_n - a)b - a(b_n - b) - ab \\ &= (a_n b_n - ab) - (a_n - a)b - (b_n - b)a\end{aligned}$$

Equivamentemente podemos escrever:

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + (b_n - b)a \tag{3.1}$$

Pronto: conseguimos relacionar a diferença $a_nb_n - ab$ com as diferenças $|a_n - a|$ e $|b_n - b|$. Agora basta finalizar alguns detalhes.)

Solução. Seja $\varepsilon > 0$. Existem índices n_1 e n_2 tais que $|a_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$, $\forall n \geq n_1$ e $|b_n - b| < \sqrt{\varepsilon}$, $\forall n \geq n_2$. Logo, para todo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, temos $|(a_n - a)(b_n - b)| < \varepsilon$.

Isso prova que

$$\lim(a_n - a)(b_n - b) = 0 \tag{3.2}$$

Portanto, da expressão (3.1) temos:

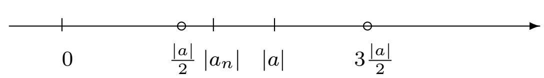
$$\begin{aligned}
\lim a_nb_n - ab &= \lim[(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + (b_n - b)a] \\
&\overset{(a)}{=} \lim[(a_n - a)(b_n - b)] + \lim[(a_n - a)b] + \lim[(b_n - b)a] \\
&\overset{(3.2)}{=} 0 + \lim[(a_n - a)b] + \lim[(b_n - b)a] \\
&\overset{(c)}{=} b\lim(a_n - a) + a\lim(b_n - b) = 0
\end{aligned}$$

(e) (Rascunho: precisamos provar que, a partir de algum índice n_0, $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right|$ se torna tão pequeno quanto se queira, sabendo que $|a_n - a|$ pode ser tão pequeno quanto quisermos. Façamos algumas contas para ver como é possível relacionar essas desigualdades:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a\, a_n|}$$

Se conseguirmos garantir que $|a\, a_n| > M$ para alguma constante M, conseguiremos concluir que $\dfrac{|a - a_n|}{|a\, a_n|} < \dfrac{|a - a_n|}{M} < \varepsilon$, se $|a - a_n| < \varepsilon M$. Assim, o problema estará resolvido se encontrarmos um número M adequado, tal que $|a\, a_n| > M$, para índices n suficientemente grandes.

Como $a \neq 0$, sabemos que $|a| > 0$.



Como $\lim a_n = a$, existe n_1 tal que $|a - a_n| < \dfrac{|a|}{2}$ para todo $n \geq n_1$. Com isso, é possível provar (exercício) que $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$, $\forall n \geq n_1$. (Veja a figura acima.) Portanto

$|a_n|\,|a| > \dfrac{|a|}{2}|a| = \underbrace{\dfrac{a^2}{2}}_{M}$, para todo $n \geq n_1$. Essa foi a parte difícil! Vamos então escrever a demonstração formal.

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Existe n_1 tal que

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}, \ \forall n \geq n_1 \qquad (*)$$

Além disso, existe n_2 tal que

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}a^2, \ \forall n \geq n_2 \qquad (**)$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Para todo $n \geq n_0$ temos:

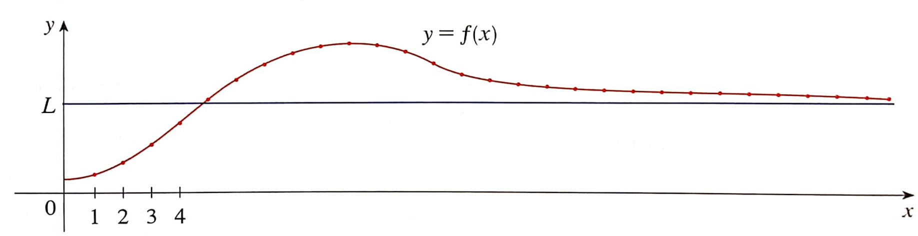
$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a|\,|a_n|} \overset{(*)}{\leq} \frac{|a - a_n|}{|a|\,\dfrac{|a|}{2}} = \frac{2}{a^2}|a - a_n| \overset{(**)}{<} \frac{2}{a^2}\,\frac{\varepsilon}{2}a^2 = \varepsilon$$

□

A seguir, enunciamos alguns resultados bastante úteis para o cálculo de limites de sequências.

Proposição 3.1.7 Seja f uma função real, definida em um intervalo da forma $[K, +\infty[$ e suponha que exista $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. Se $a_n = f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim a_n = L$$



(figura copiada da página 695 do livro *Calculus: early transcendentals*, de James Stewart, 4a. ed.)

Demonstração. Exercício.

Exemplo 3.1.8 Calcule $\lim \dfrac{\ln n}{n}$

Solução. Observe que tanto o numerador quanto o denominador tendem a $+\infty$ quando n cresce. Mas não podemos usar a regra de L'Hôspital para calcular o limite da sequência, já que não tem sentido usar derivadas neste contexto. Entretanto, podemos considerar a função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, definida no intervalo $[1, +\infty[$.

É claro que $a_n = \dfrac{\ln n}{n} = f(n)$. Usando a regra de L'Hôspital para f, podemos agora calcular

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Logo, pela proposição 3.1.7, podemos concluir que $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

Proposição 3.1.9 Se $\lim a_n = L$ e se f é uma função contínua em L, então o limite de $f(a_n)$ existe e

$$\lim f(a_n) = f(L)$$

Exemplo 3.1.10 Calcule $\lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

Solução. A função seno é contínua em todos os pontos. Em particular, é contínua em 0, que é o limite da sequência dada por $a_n = \frac{1}{n}$. Assim, a proposição 3.1.9 nos permite concluir:

$$\lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim \frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

Proposição 3.1.11 (Teorema do confronto) Sejam (a_n), (b_n), e (c_n) três sequências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$. Suponha que $\lim a_n = L = \lim c_n$. Então a sequência (b_n) converge e seu limite é L.

Exemplo 3.1.12 Calcule $\lim \dfrac{2^n}{n^n}$

Solução. Para $n = 1$, temos $a_1 = \dfrac{2}{1} = 2$; se $n = 2$, temos $a_2 = \dfrac{2^2}{2^2} = 1$; se $n = 3$, temos $a_3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$; $a_4 = \left(\dfrac{2}{4}\right)^4$, e assim por diante. Notamos que $a_n = \dfrac{2}{n}\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}$ e que, para $n \geq 3$, $\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1} < 1$. Portanto, para $n \geq 3$, vale:

$$0 \leq a_n \leq \frac{2}{n}$$

Como $\lim \dfrac{2}{n} = 0$, pela proposição 3.1.11, concluímos que $\lim \dfrac{2^n}{n^n} = 0$.

Exemplo 3.1.13 Um exemplo importante, cujo resultado será útil mais adiante, é a sequência dada por $a_n = \sqrt[n]{n}$. Vamos provar que seu limite é 1.

Solução. Uma maneira de provar é por meio da proposição 3.1.7, calculando o limite, para $x \to +\infty$ da função $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > 1$, e é deixada como exercício.

Vamos mostrar uma maneira direta de provar que o limite da sequência é 1. Inicialmente notamos que $a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$ são todos números maiores do que 1. (Por quê?)

Logo, podemos escrever $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, para algum $h_n > 0$. Assim,

$$n = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

já que todos os termos são positivos.

Portanto $\frac{n-1}{2}h_n^2 < 1$, ou, equivalentemente, $h_n^2 < \frac{2}{n-1}$, que tende a 0 quando n cresce.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe, pela propriedade Arquimediana, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. Se $n > n_0$, teremos:

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |h_n| < \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{2}{n_0-1}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

□

Definição 3.1.14 Dizemos que uma sequência $(a_n)_n$ é *crescente*, se $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$, isto é, se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Ela é dita *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Se uma sequência for ou crescente ou decrescente, diremos que ela é *monótona*.

Exemplos 3.1.15 (a) A sequência $\left(\dfrac{1}{2n+5}\right)_n$ é decrescente pois, como $2n+5 < 2(n+1)+5$, temos

$$\frac{1}{2n+5} > \frac{1}{2(n+1)+5}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) A sequência dada por $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ não é monótona. De fato, os primeiros termos dessa sequência são $2-1, 2+\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \ldots$

De um modo geral, se n é ímpar, temos $a_n = 2 - \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$; se n é par, temos $a_n = 2 + \frac{1}{n} > 2 - \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$.

A seguir apresentamos um dos principais resultados deste capítulo. A ideia da demonstração é simples. Tente não se intimidar com os ε's e apreciar a ideia bacana.

Teorema 3.1.16 Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. Faremos a demonstração supondo a sequência crescente e limitada superiormente. A demonstração do caso de sequência decrescente e limitada inferiormente é análoga e fica como exercício.

Por hipótese, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots$ e existe uma constante M tal que $a_n \leq M$, para todo n.

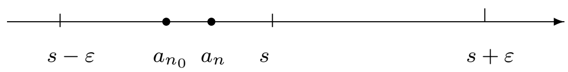
Seja $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots\}$ o conjunto de todos os valores da sequência. Então A é não vazio e limitado superiormente (por M). Portanto, pelo axioma do supremo, existe um número real $s = \sup A$.

Vamos provar que $\lim a_n = s$.

Seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de supremo, $a_n \leq s$ para todo n. Além disso, existe um elemento a_{n_0} em A tal que $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$ (caso contrário, o supremo seria menor do que $s - \varepsilon$).

Como a sequência é não-decrescente, para todo $n \geq n_0$ vale $a_{n_0} \leq a_n$. Mas $a_n \leq s$.

Portanto, para todo $n \geq n_0$, vale $s - \varepsilon < a_n \leq s < s + \varepsilon$, ou seja, $|s - a_n| < \varepsilon$.



$\square$

Exemplo 3.1.17 Considere a sequência

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

Existe $\lim a_n$? Em caso afirmativo, calcule-o.

Solução. Para podermos perceber propriedades que a sequência possa ter, vamos calcular alguns termos:

$$a_1 = 1\,; \quad a_2 = 3 - 1 = 2\,; \qquad a_3 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5\,;$$
$$a_4 = 3 - \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{13}{5} = 2,6\,; \qquad a_5 = 3 - \frac{1}{\frac{13}{5}} = 3 - \frac{5}{13} = \frac{34}{13} = 2,\overline{615384}\,; \quad \ldots$$

Observando esses números, percebemos que eles estão aumentando, mas cada vez mais devagar. Será a sequência crescente? Será limitada?

- Vamos provar, por indução, que a sequência é crescente, isto é, que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n. A desigualdade vale para $n = 1$ pois $a_1 = 1 < 2 = a_2$.

  Suponhamos $a_{k-1} \leq a_k$ para algum k. Como os termos da sequência são todos positivos, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{k-1}} &\geq \frac{1}{a_k} \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{a_{k-1}} &\leq -\frac{1}{a_k} \\ \Rightarrow 3 - \frac{1}{a_{k-1}} &\leq 3 - \frac{1}{a_k} \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_k \leq a_{k+1}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita, podemos concluir que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n.

- Vamos provar, também por indução, que a sequência é limitada, mostrando que

$$1 \leq a_n \leq 3, \text{ para todo } n \qquad (*)$$

O primeiro passo da demonstração é apenas a constatação de que $1 = a_1 \leq 3$.

Vamos supor que $1 \leq a_k \leq 3$ para algum k. Então

$$\begin{aligned} 1 \geq & \quad \frac{1}{a_k} \quad \geq \frac{1}{3} \\ -1 \leq & \quad -\frac{1}{a_k} \quad \leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Portanto,

$$3 - 1 \leq 3 - \frac{1}{a_k} \leq 3 - \frac{1}{3}$$

Dessa forma, vale $1 \leq a_{k+1} \leq 3$.

Pelo Princípio de Indução Finita, podemos concluir que $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo crescente e limitada, o teorema 3.1.16 nos garante que (a_n) converge para algum número L. Mas o teorema não nos conta qual é o valor do limite. Entretanto, sabemos que existe $L = \lim a_n$ e que $L \neq 0$ (por quê?). Isso nos permite calcular o seguinte:

$$\lim a_{n+1} = \lim \left(3 - \frac{1}{a_n}\right) = 3 - \lim \frac{1}{a_n} = 3 - \frac{1}{\lim a_n}$$

Como a_n converge para L, é claro que a_{n+1} também converge para L. Portanto, termos:

$$L = 3 - \frac{1}{L}$$

A última equação é equivalente a $L^2 - 3L + 1 = 0$, cujas raízes são $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Como todos os termos da sequência são maiores do que 1, seu limite necessariamente é maior ou igual a 1. Portanto, a raiz $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38$ não pode ser o limite. Dessa forma, concluímos que

$$L = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Exercícios 3.1.18 1. Determine se a sequência (a_n) dada é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule seu limite:

a) $a_n = \dfrac{1-n+2n^4}{2+3n^4}$ b) $a_n = \sqrt{n+5}-\sqrt{n}$ c) $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

d) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}$ f) $a_n = \dfrac{n}{3+\sqrt{n}}$

g) $a_n = ne^{-n}$ h) $a_n = \operatorname{arctg} n$ i) $a_n = \cos(n^3)\,2^{-n}$

j) $a_n = \dfrac{n!}{(n+2)!}$ l) $a_n = \dfrac{7^{n+1}}{10^n}$ m) $a_n = \dfrac{n^2}{e^n}$

2. Se $(a_n)_n$ é uma sequência convergente tal que $a_n \geq 1$ para todo n, mostre que $\lim a_n \geq 1$.

3. Se $(a_n)_n$ é uma sequência convergente, mostre que $\lim a_n = \lim a_{n+1}$

4. [2]Seja $(f_n)_n$ a sequência de Fibonacci definida no exemplo 3.1.1. Defina $a_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

   (i) Determine os 10 primeiros termos de (a_n).

   (ii) Verifique que $a_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_{n-2}}$ para todo $n \geq 3$.

   (iii) Supondo que $(a_n)_n$ seja convergente, calcule seu limite.

5. Seja f uma função contínua e seja x um ponto qualquer de seu domínio. Defina a sequência $a_1 = x$, $a_2 = f(x)$, $a_3 = f(a_2)$, $\ldots a_{n+1} = f(a_n)$. Mostre que se $\lim a_n = L$ então $f(L) = L$. (Por esse motivo, o número L é chamado *ponto fixo* de f.)

6. Encontre uma aproximação com 5 casas decimais para a solução da equação $\cos x = x$. Sugestão: Use o exercício anterior tomando $f(x) = \cos x$ e $a = 1$.

[2]Exercício extraído do livro [5]

Referências Bibliográficas

[1] Geraldo Ávila. *Análise Matemática para Licenciatura.* Edgard Blucher Ltda, 3 edition, 2006.

[2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise I.* Livros Técnicos e Científicos S.A., 1975.

[3] Elon Lages Lima. *Análise Real.* IMPA, CNPq, 1997.

[4] Walter Rudin. *Princípios de Análise Matemática.* Ed. Ao Livro Técnico S.A., 1971.

[5] James Stewart. *Cálculo*, volume II. Cengage Learning, 2010.