CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística da USP
Texto: Professoras Cristina Cerri e Martha S. Monteiro
Setembro de 2001

História dos Números Complexos

Introdução

Quando um professor entra na sala de aula e diz que iniciará o estudo dos números *complexos*, os alunos pensam que são números, no mínimo, muito complicados. Ao saber que também existem números chamados de *imaginários* os alunos dirão que tais números, por serem imaginários, não existem, e portanto, para que estudá-los?

Este texto pretende mostrar que não é bem assim. Percorrendo sua história veremos que o surgimento de tais números está intimamente ligado à resolução de equações algébicas, sobretudo às equações de grau 3, e não às de grau 2 como é comum se dizer. Também vamos aprender que sua aceitação, compreensão e utilização ocorreu de maneira lenta e gradual.

Para a elaboração deste texto, sobretudo para as referências históricas, utilizamos o livro de Gilbert G. Garbi, intitulado *Romance das Equações Algébricas*, cuja leitura recomendamos.

O Surgimento dos Números Complexos

Resolver equações sempre foi um assunto que fascinou matemáticos ao longo da história. Os matemáticos antigos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações do 2^o grau baseados no que hoje chamamos de "completamento de quadrado".

Os matemáticos gregos, que desempenharam importante papel no desenvolvimento da matemática, resolviam alguns tipos de equações do 2^o grau com régua e compasso.

A conquista da Grécia por Roma praticamente acabou com o domínio da Matemática Grega. Com o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na Idade das Trevas e o desenvolvimento da Matemática ficou nas mãos dos árabes e dos hindus.

Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas em Álgebra e Baskara é o nome que imediatamente vem à nossa memória quando falamos de equações do 2^o grau. Entretanto a fórmula de Baskara não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara, no século 11.

Relembrando, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ a fórmula de Baskara garante que suas raízes são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependendo da equação, poderia acontecer que o número $\Delta = b^2 - 4ac$ fosse negativo. Entretanto isso não pertubava muito os matemáticos da época. Neste caso eles simplesmente diziam que o problema não tinha solução.

O interesse pelo estudo da Matemática ressurgiu na Europa, mais especificamente na Itália, no século XVI. Lá, e no meio da disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução da equação do 3^o grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras idéias da criação do conjunto dos números complexos surgiram.

Vale à pena falar um pouco desta conturbada história.

Girolamo Cardano nasceu em Pavia, em 1501 e faleceu em Roma, em 1576. Sua vida foi marcada por contrastes e extremos. Sabe-se que era excepcional cientista, mas que também era violento, traidor, invejoso e outras qualificações não muito edificantes. Foi autor do *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu a idéia de probabilidade e também ensinou maneiras de trapacear nos jogos. Sua maior obra, entretanto, foi o *Ars Magna*, publicada na Alemanha em 1545, que na época era o maior compêndio algébrico existente.

Nicoló Fontana, apelidado de Tartaglia, só tinha em comum com Cardano a nacionalidade italiana e o talento matemático. Nascido em Bréscia em 1500, na infância, pobre, foi gravemente ferido por golpes de sabre e, por causa deste incidente, ficou com profunda cicatriz na boca que lhe provocou um permanente defeito na fala. Daí ter sido apelidado de Tartaglia, que significa gago. Ao longo de sua vida publicou diversas obras mas o que o colocou definitivamente nos anais da Matemática foram suas disputas com Cardano.

Consta que, por volta de 1510, um matemático italiano de nome Scipione del Ferro encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas morreu sem publicar sua descoberta. Seu aluno Antonio Maria Fior conhecia tal solução e tentou ganhar notoriedade com ela. Na época eram comuns os desafios entre sábios. Como Tartaglia era um nome que começava a se destacar nos meios culturais da época, Fior propôs a Tartaglia um desafio. Tartaglia, apesar de não saber resolver ainda tais equações, aceitou o desafio, confiando em seu potencial. Sabendo que Fior conhecia a solução das equações acima citadas, não só deduziu a resolução para este caso, como também resolveu as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. O resultado deste desafio foi que Fior saiu humilhado.

Nesta época Cardano estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis*, que continha ensinamentos sobre Álgebra, Aritmética e Geometria. Ao saber que Tartaglia achara a solução geral da equação de grau 3 pediu-lhe que a revelasse, para que fosse publicada em seu próximo livro. Tartaglia não concordou, alegando que ele mesmo iria publicar sua descoberta. Cardano acusou-o de mesquinho e egoísta, e não desistiu. Após muitas conversas e súplicas este, jurando não divulgar tal descoberta, conseguiu que Tartaglia lhe revelasse a solução. Conforme qualquer um poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e, em 1545, fez publicar na *Ars Magna* a fórmula de Tartaglia. No final, como em muitos outros casos, a posteridade não fez justiça a Tartaglia: sua fórmula é até hoje conhecida como "Fórmula de Cardano."

Vamos conhecer a fórmula que gerou tanta polêmica.

Problema 1. *Considere a equação geral do 3^o grau, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbf{R}$ quaisquer. Mostre que esta equação pode ser transformada numa equação do tipo $y^3 + py + q = 0$, fazendo uma substituição $y = x + m$ com algum m conveniente. (Verifique que, de fato, tal m sempre existe.)*

Sendo assim, saberemos resolver qualquer equação do terceiro grau se soubermos resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. A idéia de Tartaglia foi supor que a solução procurada é do tipo $x = A + B$.

Problema 2.

(a) *Tome a equação $x^3 + px + q = 0$ e substitua $x = A + B$. Notando que $x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$, conclua que $3AB = -p$ e que $A^3 + B^3 = -q$. Portanto,*

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad e \quad A^3 + B^3 = -q.$$

(b) *Conclua que A^3 e B^3 são soluções da equação $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$ e mostre que suas soluções são*

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \quad e \quad B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}.$$

(c) *Mostre que*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Um problema inquietante, que abordaremos a seguir, foi o que levou os matemáticos à descoberta dos números complexos.

Problema 3. *Considere a equação* $x^3 - 15x - 4 = 0$.

(a) *Mostre que* $x = 4$ *é solução da equação.*

(b) *Divida* $x^3 - 15x - 4 = 0$ *por* $x - 4$.

(c) *Encontre as outras duas soluções da equação e verifique que são números reais.*

(d) *Aplique a fórmula de Cardano (Tartaglia!) e verifique que a solução fornecida pela fórmula é:*

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

(d) *Reflita: não parece que há algo de errado com essas soluções?*

Assim, questões realmente perturbadoras surgiram e não podiam ser ignoradas. Além da extração de raízes quadradas de números negativos também nos deparamos com uma extração de raizes cúbicas de números de natureza desconhecidas. Quando, nas equações de grau 2 a fórmula de Baskara levava à raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a não existência de soluções. Agora, entretanto, nota-se que há equações de grau 3 com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. Isto não ocorre só com esta equação! Pode-se mostrar, com relativa facilidade, que a equação do tipo $x^3 + px + q = 0$ tem as 3 raízes reais se, e somente se, $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 \leq 0$.

Não havia como negar que os números reais eram insuficientes para se tratar de equações algébricas. O que estava acontecendo no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530, quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números.

Conforme seu próprio relato em 1572 no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua idéia foi supor que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Com algumas contas, ele chegou à conclusão que $a = 2$ e $b = 1$. Vamos seguir as idéias de Bombelli.

Problema 4. *Fazendo de conta que* $\sqrt{-1}$ *é um número conhecido e que, com ele opera-se do mesmo modo que com os outros números que já conhecemos, vamos verificar que*

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121} \qquad e \qquad (2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}$$

No meio do caminho, reflita e tente responder:

(a) *Quais devem ser as regras para operar com* $\sqrt{-1}$ *?*

(b) *Como devem ser a adição e a multiplicação de dois números da forma* $m+n\sqrt{-1}$ *?*

(c) *Quando dois números desta forma são iguais?*

(d) *Conclua que* $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$.

A partir da idéia pioneira de Bombelli, ainda se demorou mais de dois séculos para que se conseguisse, através de Euler, saber como extrair raízes de números complexos.

Os Números Complexos São Definidos

A Aritmética e a Geometria tiveram origens independentes mas com o tempo foram sendo descobertas relações entre números e formas. A idéia de empregar sistemas de coordenadas para definir posições de pontos no plano e no espaço já havia sido utilizada da no século III a.C. por Apolônio, em seus trabalhos sobre secções cônicas. Entretanto, foi na primeira metade do século XVII que os geniais matemáticos franceses Pierre de Fermat e René Descartes inventaram, independentemente e quase simultaneamente, o que hoje conhecemos por Geometria Analítica. Fermat não se preocupou em publicar suas idéias, ao contrário de descartes que, no apêndice de seu mais famoso livro *Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências*, publicado em 1637, escreveu um trabalho denominado *La Geometrie*, que é considerado a pedra fundamental da Geometria Analítica.

Com o domínio da geometria Analítica Descartes estudou, entre outras coisas, as equações algébricas. Em uma passagem do *Discurso do Método* Descartes escreveu a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são **imaginárias**”.

Por esse motivo, até hoje o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número *imaginário*, termo que se consagrou juntamente com a expressão "número complexo". Infelizmente, são designações um tanto inadequadas e subjetivas para objetos matemáticos.

Depois de Bombelli, em 1530, outros personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre, amigo de Isaac Newton, e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Euler.

Leonhard Euler nasceu em Basiléia, Suiça, no ano de 1707, quando o Cálculo Diferencial e Integral, inventado por Newton e Leibniz, estava em expansão. Foi um dos matemáticos que mais produziu e publicou em todos os tempos, além de ter sido muito boa pessoa. Aos 28 anos perdera a vista esquerda e viveu totalmente cego os últimos 18 anos de sua vida, período em que continuou produzindo, guiado pela sua memória. Faleceu em 1783. Seu nome ficou ligado para sempre ao número irracional **e**, conhecido como número de Euler, cujo valor é aproximadamente 2,71828, e que aparece freqüentemente em equações que descrevem fenômenos físicos. A descoberta deste número ocorreu devido a uma pergunta de Jacques Bernoulli sobre juros compostos.

Dentre as inúmeras contribuições de Euler foi notável seu empenho na melhoria da simbologia. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações propostas por Euler destacamos o **i** substituindo $\sqrt{-1}$.

Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Esses números são chamados de números complexos.

Pergunta: *Todo número real é um número complexo. Por que?*

Através das próximas atividades vamos percorrer as idéias de Euler, que é considerado o matemático que dominou os números complexos.

Problema 5.

(a) *Defina as operações de adição e multiplicação para os números da forma $z = a + bi$, tendo em vista os estudos de Bombelli.*

(b) *Verifique que, para estes números, valem as seguintes propriedades: associativa da adição e associativa da multiplicação, comutativa da adição e comutativa da multiplicação, existência de um elemento neutro para a adição e outro neutro para a multiplicação, existência, para cada número, de elemento oposto.*

(c) *Verifique também existência, para cada elemento não nulo, de seu inverso, isto é, mostre que se $z = a + bi, z \neq 0$, existe um número complexo w (que você deve calcular qual é) tal que $z \cdot w = 1$.*

Em geral denota-se por **C** o conjunto dos números complexos. Com o que acabamos de verificar, o conjunto **C** e suas operações tem uma estrutura que modernamente chamamos de *corpo*.

Os Números Complexos e a Trigonometria

Logo se percebeu que é possível escrever $z = a + bi$ na forma

$$z = \sqrt{a^2+b^2}(\frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}}) = \sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i).$$

Como $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ são números que pertencem ao intervalo $[-1, 1]$ e a soma de seus quadrados é 1, existe um número θ tal que

$$cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{e} \qquad sen(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Chamando o número positivo $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ de **módulo de** z e θ de **argumento de** z, escreve-se

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta).$$

Esta maneira de escrever o número z é chamada *Forma Polar de z.*

Problema 6.

(a) *Usando a forma polar e utilizando fórmulas da trigonometria, mostre que o produto de dois números complexos $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$ pode ser escrito na forma*

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$$

(b) *Como ficam o oposto de z e o inverso de z, com $z \neq 0$ na forma polar?*

Tendo em mãos a Geometria Analítica, os matemáticos da época puderam interpretar geometricamente o número $z = a + bi$ como um par ordenado (a, b) num sistema ortogonal.

Problema 7. *Interprete geometricamente o módulo e o argumento de um número complexo z. Interprete também o oposto e o inverso de um número z não nulo. Interprete a soma e o produto de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$.*

Com a forma polar fica muito mais simples calcular potências inteiras de números complexos. A fórmula

$$z^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

é conhecida como Fórmula de Moivre.

Problema 8. *Mostre a veracidade da fórmula acima. (cuidado com $n < 0$) Pratique o uso da fórmula, calculando:* $(i-1)^{12} = \ldots; \quad (1+i)^{-3} = \ldots$

A Fórmula de Moivre nos diz que

$$(cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta).$$

Se chamarmos $cos\theta + isen\theta$ de $f(\theta)$, então temos que

$$(f(\theta))^n = f(n\theta).$$

Repare que esta é uma propriedade de funções exponenciais: $((a^x)^n = a^{nx})$ e não escapou a Euler: ele então conjecturou a existência de uma função exponencial com variáveis complexas. Utilizando método de séries infinitas Euler demonstrou que

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta.$$

No caso em que $\theta = \pi$ teremos que

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

uma igualdade que envolve os cinco mais importantes números da Matemática.

Voltando às potências de números complexos, foi Euler também quem se propôs a descobrir como extrair raiz n-ésima de um número da forma $a + bi$. Mas a idéia central (da fórmula de Moivre) já estava pronta. Bastava agora acertar alguns detalhes.

Lembrem-se de que esta era a questão que perturbava os matemáticos desde que a Fórmula de Cardano (Tartaglia) foi obtida. Este é o assunto do próximo parágrafo.

As Raízes Complexas

Todos sabem que, em $\mathbf{R}$, a equação $x^n = 1$ tem duas raízes se n for par ($x = 1$ ou $x = -1$) e apenas uma se n for impar ($x = 1$). Euler se perguntou o que ocorreria se as soluções pudessem ser números complexos.

Formalmente, dado um número complexo w queremos encontrar *todos* os números complexos z tais que $z^n = w$. Vamos primeiramente supor que $n > 0$. Usando a fórmula de Moivre temos o seguinte.

Chamando $z = \rho(cos\phi + isen\phi)$ e $w = r(cos\theta + isen\theta)$, com $0 \leq \theta,\ \phi < 2\pi$, como $z^n = \rho^n(cos(n\phi) + isen(n\phi))$, teremos:

$$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n(cos(n\phi) + isen(n\phi)) = r(cos\theta + isen\theta).$$

Portanto

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{e} \quad n\phi = \theta + 2k\pi \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Concluimos que as soluções da equação $z^n = w$ são números complexos da forma

$$z_k = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + sen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})) \quad \text{para todo } k \in \mathbf{Z}.$$

Aparentemente encontramos infinitas soluções para a equação $z^n = w$ já que há infinitos valores para k. Mas isto não é verdade: há soluções repetidas. Vamos entender melhor.

Problema 9. *Seja $w = 1 + i$.*

(a) *Escreva w na forma trigonométrica.*

(b) *Encontre, usando a fórmula obtida acima, todas as soluções complexas da equação $z^3 = w$.*

(c) *Represente geometricamente w e as soluções $z_0, z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2}, z_3, z_{-4}, z_5$ e z_{-5}.*

(d) *Quantos z_k distintos existem ?*

O caso geral é análogo. As raízes z_k e z_{k+n} são sempre iguais. (Verifique!) Por isso, na verdade, só existem n raízes distintas z_k para a equação $z^n = w$, que normalmente são representadas por $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$.

Note que a equação $z^2 = 1$ tem duas soluções tanto em $\mathbf{R}$ quanto em $\mathbf{C}$ que são $z = 1$ ou $z = -1$. Mas a equação $z^3 = 1$ tem 3 soluções em $\mathbf{C}$ e apenas uma em $\mathbf{R}$!

Quando estamos trabalhando com números complexos as n soluções da equação $z^n = w$ são chamadas de *raízes n-ésimas de* w. Infelizmente, são indicadas também com o símbolo $\sqrt[n]{w}$, isto é,

$$\sqrt[n]{w} = z_0, z_1, \cdots, \text{ ou } z_{n-1}.$$

Observação. Sabemos que, por exemplo, as soluções reais da equação $x^2 = 4$ são 2 e -2. Pode-se até escrever $x = \pm\sqrt{4}$ ou ainda $x = \pm 2$. Porém, a convenção utilizada em $\mathbf{R}$ é que $\sqrt{4} = 2$, pois entende-se que, *no conjunto dos Números Reais*, o símbolo $\sqrt{x}$ indica a única raiz positiva do número real x.

A convenção, porém, é diferente no conjunto dos Números Complexos: o símbolo $\sqrt{z}$ é usado para representar *todas* as raízes do número complexo z! Precisamos estar atentos a esse fato para podermos transmitir essas convenções de modo claro para nossos alunos!

Voltando à história e usando a consagrada terminologia, o que Euler descobriu foi algo fantástico: *Qualquer número complexo não nulo (os reais em particular) tem exatamente n raízes n-ésimas* em $\mathbf{C}$.

Exercícios 10. *Encontre todas as soluções de $z^n = w$ e localize-as no plano:*

(a) $n = 3$ *e* $w = -8$

(b) $n = 2$ *e* $w = -1$

(c) $n = 2$ *e* $w = i$

(d) $n = 2$ *e* $w = 1 + i$

(e) $n = 4$ *e* $w = i - 1$

Exercício 11. *Encontre todas as soluções de $z^n = 1$ e, para os casos $n = 2$, 3, 4 e 5,* localize-as no plano.

As soluções de $z^n = 1$ são chamadas de **raízes n-ésimas da unidade**. Geometricamente são representadas pelos os vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio 1, tendo como um dos vértices o ponto $(1, 0)$. Normalmente são denotadas por $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$, sendo que $w_0 = 1$.

Da fórmula que deduzimos, é fácil mostrar que $w_k = (w_1)^k$.

Repare nas soluções encontradas no Problema 9. Você notou que as raízes cúbicas de w são os vértices do triângulo inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[3]{|w|}$ e centrada na origem?

Este fato não é coincidência: as raízes n-ésimas de um número $w = r \cdot e^{i\theta}$ são os vértices do polígono regular inscrito na circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. O primeiro vértice, também chamado de raíz principal, comumente é indicado por $z_0 = \sqrt[n]{r}(sen\frac{\theta}{n} + i\cos\frac{\theta}{n})$. Os outros são $z_k = (z_0)^k$, para $k = 1, 2, \cdots, n-1$.

Voltemos à fórmula de Cardano (Tartaglia). Com as descobertas acima explicadas, Euler estava pronto para desvendar o mistério da solução de Tartaglia para a equação de grau 3.

Como já vimos esta fórmula, à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ nos fornece a solução

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

ou equivalentemente, a

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Problema 12.

(a) *Verifique que o módulo de* $2 + 11i$ *é* $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ *e que seu argumento é* $\theta = arccos(\frac{2\sqrt{5}}{25})$.

(b) *Verifique que o módulo de* $2 - 11i$ *é* $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ *e que seu argumento é* $-\theta$.

(c) *Determine as raízes cúbicas de* $2 + 11i$ *e de* $2 - 11i$.

(d) *Conclua, usando as descobertas de Euler sobre raízes de números complexos, que a fórmula de Tartaglia nos fornece 3 soluções da equação acima. Determine-as.*

Assim a fórmula de Tartaglia nos fornece **todas** as soluções de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, ou seja, Tartaglia embora não soubesse, estava resolvendo de forma total as equações de grau 3. Bombelli deu o primeiro passo para a compreensão das questões que surgiram em seguida, mas foi Euler que desvendou completamente o mistério. Por tudo isto e muito mais é que Euler é conhecido como o *matemático que dominou os números complexos.*

Conseqüências Importantes da Teoria dos Números Complexos

Ainda restavam outras questões importantes sobre as equações algébricas que ainda não haviam sido respondidas. Será que outros números não conhecidos poderiam vir a ser necessários para que outras equações possam ser resolvidas? Vejamos quem colocou um ponto final a essas questões e como.

Depois que Euler mostrou que as equacões do tipo $z^n = w$ tinham n soluções em $\mathbf{C}$, os matemáticos passaram a acreditar que toda equação de grau n deveria ter n raízes complexas. Vários matemáticos tentaram provar esta conjectura e Jean le Rond d'Alembert publicou, em 1746, algo que considerou uma prova deste fato. Entretanto um jovem matemático mostrou que tal prova era "insatisfatória e ilusória" e apresentou uma demonstração correta. Este matemático foi Carl Friedrich Gauss. Aos 21 anos, em 1799, Gauss apresentou o que ainda hoje é considerado a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Nela está a prova do Teorema Fundamental da Álgebra, cuja denominação foi dada pelo proprio Gauss. Esse teorema afirma que:

Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa.

A demostração deste importante resultado não é simples. A mais fácil disponível foi produzida por Argand em 1815 e simplificada por Cauchy, e pode ser vista em [1].

Com o teorema de Gauss, o procurado e esperado resultado sobre equações algébricas pode finalmente ser provado. A seguir veremos por que é que **"toda equação de grau n tem exatamente n raízes, eventualmente repetidas."**

Problema 13 *Seja* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, *onde, para cada* $i = 0, ..., n$, *os coeficientes* a_i *são números complexos.*

(a) *Aplicando o Teorema Fundamental da Álgebra conclua que a equação* $P(x) = 0$ *tem uma solução que denotaremos por* α_1. *Conclua também que* $P(x)$ *é divisível por* $(x - \alpha_1)$.

(b) *Como* $P(x) = (x - \alpha_1) \cdot Q(x)$, *o que se pode dizer sobre o grau de* $Q(x)$*?*

(c) *Aplique novamente o Teorema Fundamental da Álgebra, agora para o polinômio* $Q(x)$, *e conclua que* $P(x)$ *tem duas raízes.*

(d) *Repetindo este raciocínio veja que* $P(x)$ *deve ter* n *raízes, eventualmente repetidas.*

Assim, o Teorema Fundamental da Álgebra resolveu a questão das soluções de equações algébricas e ainda mostrou que o conjunto dos números complexos é o melhor conjunto para se tratar do assunto, pois contém <u>todas</u> as soluções de <u>qualquer</u> equação algébrica, de qualquer grau.

Entretanto, encontrar efetivamente as soluções não é tarefa simples. Fórmulas gerais para as de graus 2 e 3 já tinham sido encontradas. Outro matemático italiano, Ludovico Ferrari (1522-1560), discípulo de Cardano, encontrou uma maneira de obter as soluções de uma equação geral de grau 4. Seu mérito maior foi o de mostrar que é possível encontrar as soluções de uma equação de quarto grau apenas com operações algébricas.

Vários matemáticos tentaram encontrar fórmulas gerais para obter as raízes das equações de graus superiores a 5. Não poderiam ter sucesso, pois o famoso matemático norueguês Neils Henrik Abel (1802-1829) demostrou que, embora algumas equações particulares possam ser resolvidas completamente, *é impossível resolver a equação geral de grau 5 utilizando-se apenas operações algébricas, isto é, usando-se apenas adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação.*

Mas isto é assunto para um outro curso!

Como curiosidade, vamos resolver as questões abaixo e prestar atenção a um detalhe: as soluções complexas de equações algébricas com coeficientes reais aparecem sempre aos pares.

Problema 14.

(a) *Encontre todas as soluções de* $z^3 + z^2 + z = 0$.

(b) *Encontre todas as soluções de* $z^5 - z^4 + z - 1 = 0$.

(c) *Seja* $P(x)$ *um polinômio de grau* n *e coeficientes reais. Mostre que se* $w = a + bi$ *é uma solução de* $P(x) = 0$ *então* $\overline{w} = a - bi$ *também o é.*

Bibliografia

[**1**] Gilberto G. Garbi, *O Romance das Equações Algébricas*, Makron Books, 1997.

[**2**] M. P. do Carmo, A. C. Morgado, E. Wagner, *Trigonometria - Números Complexos* IMPA-VITAE, 1992.