MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Lista de Exercícios sobre Sistemas Lineares

1: Utilizando o método de eliminação de Gauss, calcule o determinante e a seguir a inversa da matriz abaixo. Efetue todos os cálculos utilizando frações.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2: É dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

(a) Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal, utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos.

(b) Efetue uma iteração de refinamento da solução.

(c) Verifique se o sistema linear dado satisfaz o Critério de Sassenfeld. Em caso negativo, troque a posição das equações no sistema, de forma que, para o sistema equivalente assim obtido, o Critério das Linhas assegure a convergência do Método de Gauss-Seidel.

(d) Sem efetuar as iterações, e partindo da aproximação inicial $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$, bem como sabendo que $|x_1| \leq 2$, $|x_2| \leq 2$, $|x_3| \leq 2$, determine um número de iterações que assegure um erro inferior a $\varepsilon = 0,01$ em cada uma das variáveis, ao se aplicar o Método de Gauss-Seidel ao sistema para o qual tal método converge, conforme o item (c).

(e) Calcule duas iterações pelo Método de Gauss-Seidel a partir de $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$.

3: O sistema linear $Ax = b$ (com A e b dados abaixo) foi resolvido pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante de dois algarismos significativos. Os resultados obtidos foram os seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0.5 & 4 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.25 & -1.9 & -0.13 \end{array}\right)$$

$$p_1 = 1\ ,\ p_2 = 3\ ,\ \tilde{x} = (0.14, 0.13, 0.068),$$

onde $[A_\Delta | b_\Delta]$ representa a matriz aumentada triangularizada, juntamente com os multiplicadores, p_1 e p_2 são as informações sobre as permutações de linhas e $\tilde{x}$ é a aproximação da solução obtida. Usando as informações acima, faça uma etapa de refinamento da solução.

4: Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $b = (3, 2, -4)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos,

(a) Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal.

(b) Calcule a primeira coluna da matriz inversa de A.

5: (a) Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique se ele satisfaz o critério de linhas e o critério Sassenfeld.

(b) O sistema do item (a) é equivalente ao sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que você pode afirmar a respeito da convergência do método de Gauss-Seidel para este sistema? Justifique!

(c) O método de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema do item (a) é convergente? Justifique!

6: Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $b = (2.5, 6.0, 20)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 6.0 & 2.0 \\ 2.5 & 9.0 & 4.0 \\ 8.0 & -1.0 & -3.0 \end{pmatrix}.$$

Ao aplicarmos eliminação de Gauss com condensação pivotal para este sistema, trabalhando com dois algarismos significativos, obtivemos como resultado

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 8.0 & -1.0 & -3.0 \\ \hline 0.31 & 9.3 & 4.9 \\ \cline{2-2} 0.19 & 0.67 & -0.7 \end{array}\right),$$

com $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$. Efetue uma etapa de refinamento da solução, partindo de $x^{(0)} = (2.0, -1.0, 2.0)$.

7: Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

8: Resolvendo o sistema da questão anterior pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos obtivemos a matriz triangularizada a seguir (com os multiplicadores em suas respectivas posições):

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.33 \\ 0.33 & 0.085 & 0.091 \\ 0.5 & 0.941 & -0.0006 \end{bmatrix},$$

o vetor de permutações $p_1 = 1, p_2 = 3$ (ou seja, no primeiro passo não houve troca de linhas e no segundo passo foram permutadas a segunda e terceira linha) e a solução $x = (41.4, -224., 217.)$. Calcule 2 passos de refinamento desta solução, utilizando a triangularização fornecida.

9: Resolva o sistema linear da questão 7 com toda a precisão fornecida por sua calculadora. Note a sensibilidade dos resultados em relação ao número de significativos empregados. Substitua agora o valor 0.33 da matriz do sistema por 1/3 e resolva novamente o sistema (trabalhe com toda a precisão). Compare os resultados obtidos. Isto mostra que esta pequena mudança na definição do problema (a troca de 0.33 por 1/3) causa uma mudança significativa em sua solução, caracterizando o que chamamos de uma matriz muito mal condicionada.

10: A matriz do item anterior é um caso particular das chamadas matrizes de Hilbert. Estas são matrizes $n \times n$, onde os coeficientes são da forma $a_{i,j} = 1/(i+j-1)$. Experimente escrever um programa em c para solução de sistemas lineares com estas matrizes para $n = 5, 10, 15$ e 20 e note a sensibilidade numérica envolvida no problema (defina, por exemplo, o lado direito do sistema como a soma das linhas respectivas, sabendo assim que o vetor formado por 1's é solução exata e compare com o que obtém numericmente). Mais adiante no curso você verá como as matrizes de Hilbert surgem naturalmente na resolução de um outro problema ...

11: Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 3.1 & -1.3 & 1.2 \\ 0.5 & 2.2 & 1.1 \\ 4.2 & -2.0 & 6.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 0.77 \\ 13. \end{bmatrix}$$

12: Vamos refinar a solução obtida na questão 11) através das etapas:

(a) Calcule o resíduo (em dupla precisão) da solução obtida na questão 11.

(b) No processo de refinamento da solução encontrada na questão 11, temos que resolver um sistema linear para o cálculo da correção. Mostre que podemos utilizar o método de Gauss-Seidel para resolver este sistema.

(c) Calcule 1 iteração do método de Gauss-Seidel (partindo de $x = (0, 0, 0)$) para o cálculo da correção e obtenha uma nova solução para a equação da questão 11.

13: Uma barra linear de um metro de comprimento é mantida a 0 graus em um extremo e a 128 graus no outro. Desejamos determinar a temperatura da barra a cada 20 cm. Denominando de $T_0 = 0$ a temperatura de um extremo, de $T_5 = 128$ a temperatura no outro extremo e de T_1, T_2, T_3 e T_4 a temperatura nos pontos interiores e sabendo que a temperatura em cada ponto interior é igual à média aritmética da temperatura de seus dois pontos vizinhos:

(a) escreva um sistema linear para a determinação de T_1, T_2, T_3 e T_4.

(b) Calcule 4 iterações pelo método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema a partir da aproximação inicial nula.

(c) Analise a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema.

14: Resolvendo o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 1.5 & -1.0 & 1.0 \\ 3.0 & -1.0 & 1.0 & 2.0 \\ 1.0 & 1.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos obtivemos a matriz triangularizada a seguir (com os multiplicadores em suas respectivas posições):

$$\left[\begin{array}{cccc} 3.0 & -1.0 & 1.0 & 2.0 \\ 0.33 & 2.3 & 0.67 & 2.3 \\ 0.5 & 0.87 & -2.1 & -2.0 \\ 0.33 & 0.57 & 0.81 & -1.4 \end{array}\right],$$

o vetor de permutações $p_1 = 3, p_2 = 3$ e $p_3 = 3$ (ou seja, no primeiro e segundo passo trocou-se a linha 3 com a linha pivot e no terceiro passo não houve troca). Obteve-se a solução $x = (-0.93, 1.1, 1.1, 1.9)$. Calcule um passo de refinamento desta solução (lembre-se de dobrar a precisão para o cálculo do resíduo).

MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

15: O sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

é levado no sistema equivalente (com os mutiplicadores abaixo da diagonal)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 3,5 \\ 0,5 & 3,5 & 0,5 & 2,2 \\ 0,25 & 0,21 & 3,7 & 3,6 \end{array}\right)$$

ao usarmos o método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e 2 algarismos significativos, onde na primeira etapa trocou-se a linha 1 com a linha 3 ($p_1 = 3$) e na segunda etapa trocou-se a linha 2 com a linha 3 ($p_2 = 3$).

a) Obtenha a solução do sistema usando 2 algarismos significativos.

b) Partindo de $x = (0,5; 0,49; 0,97)$, faça uma etapa de refinamento.

16: Quatro pessoas estão em uma fila para depositar dinheiro no banco. Cada uma irá depositar cem reais a mais que metade da soma dos depósitos dos seus vizinhos na fila (quem está no extremo da fila tem só um vizinho e os outros dois tem dois vizinhos).

a) Escreva na forma $Ax = b$ um sistema linear de ordem 4 para determinar qual o montante x_i que a i-ésima pessoa irá depositar (para $i = 1, \cdots, 4$).

b) Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos.

c) Resolvendo esse sistema pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com três algarismos significativos obtivemos a matriz triangularizada a seguir (com os multiplicadores em suas respectivas posições)

$$\begin{pmatrix} 1,0 & -0,5 & 0,0 & 0,0 \\ -0,5 & 0,75 & -0,5 & 0,0 \\ 0,0 & -0,667 & 0,666 & -0,5 \\ 0,0 & 0,0 & -0,751 & 0,624 \end{pmatrix}$$

sem ter feito trocas de linhas, obtendo a solução $x = (401, 601, 602, 401)$. Calcule um passo de refinamento desta solução utilizando a triangularização fornecida.

17: Os sistemas lineares

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são equivalentes. Deseja-se aproximar a solução pelo método de Gauss-Seidel. Escolha, justificando, qual deles é mais adequado. Para o sistema escolhido, calcule uma iteração partindo de $(0, 0, 0)$ e número mínimo de iterações para se garantir um erro menor do que $0,0001$ considerando que a solução exata está contida em $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.

18: Uma companhia norte-americana tem um lucro de \$100,000 (cem mil dólares) antes dos impostos. Essa companhia concordou em fazer uma contribuição C de 10% do seu lucro, descontados os impostos estadual E e federal F, ao fundo de assistência da Cruz Vermelha. A companhia também deve pagar impostos estaduais E de 5% de seu lucro (descontada a contribuição C) e impostos federais F de 40% de seu lucro (descontados a contribuição C e o pagamento dos impostos estaduais E). Calcule os montantes pagos C, E e F resolvendo o sistema linear que eles satisfazem pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal usando três algarismos significativos.

19: Considere a matriz A de ordem 3 dependendo dos parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Determine as regiões do plano $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ para as quais:

a) O critério das linhas é satisfeito.

b) O critério de Sassenfeld é satisfeito.

Represente graficamente as regiões obtidas.

20: Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) O método de Gauss-Seidel é convergente para este sistema? Justifique;

b) Faça duas iterações do método de Gauss-Seidel partindo da aproximação inicial $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$. Trabalhe com 2 algarismos significativos;

c) Sabendo que a solução do sistema está no cubo $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$, estime um número de iterações do método de Gauss-Seidel (se tal número existir) que assegure encontrar esta solução com precisão 10^{-10}, partindo da origem como aproximação inicial;

d) Faça duas iterações do método de Jacobi, partindo da mesma aproximação inicial. Trabalhe com 3 algarismos significativos;

e) Qual a melhor aproximação entre (b) e (d)? Justifique.

21: A inversa de uma matriz A pode ser obtida através da solução de sistemas lineares simultâneos da forma $AA^{-1} = I$. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3.3 & 1.6 & -0.9 \\ 3.2 & 1.5 & -0.9 \\ 3.3 & 1.8 & -1.0 \end{bmatrix}$$

em um sistema de ponto flutuante com 2 algarismos significativos. Esta matriz escalonada e com os multiplicadores nas respectivas posições é dada por

$$\begin{bmatrix} 3.3 & 1.6 & -0.9 \\ 1 & 0.2 & -0.1 \\ 0.97 & -0.5 & -0.08 \end{bmatrix}$$

com $p_2 = 3$.

a) Determine A^{-1}.

b) Realize uma etapa de refinamento.

22: A soma da idade de Ana com o triplo da idade de Bia e o dobro da idade de Carla perfaz 100 anos. Há 5 anos a soma das idades de Ana e Bia excedia a idade de Carla em 1 ano. Daqui a 4 anos a idade de Carla será o triplo da diferença entre as idades de Bia e Ana. Escreva o sistema linear na ordem em que as equações foram dadas. Resolva usando o método da eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante de 3 algarismos significativos.

23: Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Analisando apenas as condições suficientes de convergência, verifique se o método de Jacobi converge, quando aplicado a este sistema.

b) Resolva o sistema de equações usando o método iterativo de Jacobi, utilizando para aproximação inicial o ponto $(0, 0, 0)^T$. Continue as iterações até que as duas últimas iterações sucessivas sejam idênticas e utilize 3 algarismos significativos.

24: Uma fábrica de tintas pretende utilizar as sobras de tinta de 4 tipos diferentes de tonalidades de tinta verde para criar uma tonalidade de tinta verde mais popular. Uma unidade de medida (u.m.) de nova tinta será composta por x_1 u.m. de tinta do tipo 1, x_2 u.m. de tinta do tipo 2, x_3 u.m. de tinta do tipo 3 e x_4 u.m. de tinta do tipo 4. Cada u.m. de tinta nova composta por 4 pigmentos que estão relacionados pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 81 & 0 & 30 & 10 \\ 0 & 80 & 10 & 10 \\ 16 & 20 & 60 & 72 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 27 \\ 31 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes da matriz representam a porcentagem de pigmento em cada uma das 4 diferentes tonalidades de tinta verde, por exemplo, a tinta com a nova tonalidade deverá conter 31% de pigmento 3, sabendo que a tinta tipo 1 contém 16%, a tinta tipo 2 contém 20% e a tinta tipo 4 contém 72% do mesmo pigmento.

a) Analisando apenas as condições suficientes de convergência, verifique se o método de Gauss-Seidel converge, quando aplicado a este sistema.

b) Resolva o sistema de equações usando o método iterativo de Gauss-Seidel, utilizando para aproximação inicial o ponto $(0.5, 0.2, 0.2, 0)^T$ e utilizando como critério de parada $\epsilon = 0.25$ ou $n_{max} = 2$.

25: Deseja-se calcular a temperatura $t(x, y)$ para (x, y) no interior do quadrado $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, com condições de fronteira $t(0, y) = -3$, $t(x, 0) = -3$, $t(x, 1) = 6x - 3$ e $t(1, y) = 6y - 3$. Considerando-se $(x_i, y_j) = (i/3, j/3)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, e denotando-se por t_{ij} a temperatura nos pontos (x_i, y_j), sabe-se que $t_{ij} = (t_{i-1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1} + t_{i+1,j})/4$ para $1 \leq i, j \leq 2$: **a)** escreva um sistema linear para a determinação de t_{11}, t_{12}, t_{21} e t_{22}, considerados nesta ordem, e verifique que a matriz do sistema linear satisfaz o Critério de Sassenfeld; **b)** sabe-se que a temperatura no interior de Ω é menor ou igual ao máximo da temperatura na fronteira, e maior ou igual ao mínimo da temperatura na fronteira. Usando este fato, estime quantas iterações do Método de Gauss-Seidel seriam necessárias para se garantir um erro menor do que 10^{-3}, partindo-se da aproximação inicial nula; **c)** calcule uma iteração pelo método SOR, com $w = 1.2$, partindo-se da aproximação inicial nula.

26: Considere a discretização da equação diferencial $-x''(t) = 2$ em $[0, 1]$ com $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$, dada por $-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 2h^2$, $i = 1, \ldots, n-1$, $h = \frac{1}{n}$ e $x_0 = 0$ e $x_n = 1$.

a) Mostre que o sistema linear 4×4 obtido com $n = 5$ pode ser resolvido pelo método de Gauss-Seidel.

b) Calcule 1 iteração pelo método de Gauss-Seidel a partir da aproximação inicial nula e delimite o erro.

c) Calcule 1 iteração pelo método de SOR com $\omega = 1.5$ a partir do mesmo valor inicial.

27: A idade j de João é o dobro da diferença entre as idades p de Pedro e m de Maria. Daqui a um ano Pedro terá 6 vezes a idade de Maria. O triplo da diferença entre as idades de João e Pedro, somado à idade de Maria é 54. Escreva um sistema linear para a determinação das 3 idades, ordenando-o de forma a garantir a convergência do método de Gauss-Seidel em sua solução. Calcule uma iteração a partir dos valores iniciais $m = 2$, $p = 20$ e $j = 30$ e delimite o erro em relação à solução exata após esta iteração.

28:

a) Resolva o sistema linear abaixo pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Partindo da solução obtida no item a) execute uma iteração do método de Gauss-Seidel e delimite o erro em relação à solução exata do sistema (sem calculá-la).

29:

a) Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 3.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 2.0 & 1.0 \\ 4.0 & -2.0 & 6.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0 \\ -0.5 \\ 12.0 \end{bmatrix}$$

b) Mostre que o sistema do item a) pode ser resolvido pelo método de Gauss-Seidel e calcule 1 iteração a partir de $x_0 = (1.1, -0.9, 0.9)$. Trabalhe com 3 algarimos significativos neste item.

30: Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -12 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & -10 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ -10 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) A matriz A satisfaz o *Critério das Linhas* para alguma permutação de linhas?

b) A matriz A tem alguma permutação das linhas a qual satisfaz o *Critério de Sassenfeld* ? Qual? Justifique.

c) Escreva as equações de recorrência do método de Gauss-Seidel e calcule uma iteração a partir de $x^{(0)} = (0, -3, -5, -1)$.

d) Quantas iterações são necessárias para que o erro seja menor que 10^{-2} ?

31: Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

a) Determine a decomposição LU da matriz do sistema ou da matriz obtida desta através de uma permutação de linhas. Utilize a decomposição para resolver o sistema. (Obs.: Trabalhe com frações.)

b) Reescreva o sistema, ordenando as incógnitas e equações de forma que o método de Gauss-Seidel seja convergente quando aplicado ao sistema resultante. Calcule uma iteração do método a partir de $x^{(0)} = (0, -\frac{1}{2}, 1)$. Delimite o erro após esta iteração e estime o número de iterações necessárias para garantir um erro menor que 10^{-3}, sem utilizar o conhecimento de solução.

32: A decomposição $PA = LU$ de uma matriz 3×3 é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Usando a decomposição acima, resolva o sistema linear $Ax = b$, onde $b = [1 \quad 2 \quad -1]^T$.

b) Obtenha a matriz A.