Análise Input-Output (Insumo-Produto) e o método QR para resolução de sistemas lineares

Exercício Programa MAP3121
Para Engenharias de Produção, Petróleo, Ambiental e Naval

Entrega: 14 de Maio de 2017

1 Análise Input-Output (Insumo-Produto)

Em economia, um modelo input-output (insumo-produto) é uma técnica para representar as interdependências entre diferentes setores de uma economia nacional ou de economias regionais. O modelo descreve relações intersetoriais em uma economia, mostrando como a produção de um setor pode se tornar o insumo de outro setor. Por suas contribuiçoes ao desenvolvimento desta análise, o economista Wassily Leontief foi laureado com o prêmio Nobel de economia em 1973.

Leontief foi o primeiro a usar uma representação matricial para uma economia nacional (ou regional). Nesta matriz, os elementos de cada coluna representam insumos (*inputs*) a um setor da economia, enquanto que os elementos de cada linha representam produtos (*outputs*) de um dado setor. Este formato mostra portanto a interdependência entre os setores da economia, indicando para um setor tanto o seu papel de consumidor como de fornecedor relativamente a outros setores.

Em 1949 Leontief, então professor da Universidade de Harvard, EUA, usou o computador MARK II desta universidade para analisar informações sobre 500 setores da economia norte-americana. Para cada setor, ele escreveu uma equação linear descrevendo como o setor distribuía sua produção aos outros setores da economia. Como o MARK II, um dos maiores computadores da época, não tinha capacidade para lidar com um sistema de 500 equações e 500 incógnitas, Leontief condensou o problema em um sistema de 42 equações e 42 incógnitas.

A programação do computador MARK II para estas 42 equações requereu um esforço de várias semanas e o tempo de execução para a inversão da matriz foi de 56 horas! Este foi um dos acontecimentos pioneiros no uso de computadores para analisar um problema matemático de (na época) grande escala. Atualmente há mais recursos computacionais e conseqüentemente problemas de escalas bem maiores podem ser estudados, desde que se faça bom uso dos conceitos apresentados na disciplina de métodos numéricos.

Tabela de insumo-produto

Os dados anuais de uma economia podem ser apresentados de diversas maneiras e discutiremos aqui um formato simplificado assumindo uma consolidação preliminar de informações econômicas. Suponha que a economia de uma nação esteja dividida em n setores que produzem bens ou serviços e suponha também que uma outra parte da economia (chamada de *setor aberto*) não produza bens ou serviços, apenas os consome.

Se denotarmos por $\bar{x}_i$ a produção total anual do setor i e por $\bar{d}_i$ a demanda final anual do setor não produtivo por produtos do setor i, então podemos relacionar a maneira como o setor i distribui sua produção através de vendas para outros setores e para a demanda final por

$$\bar{x}_i = z_{i1} + z_{i2} + \cdots + z_{in} + \bar{d}_i \tag{1}$$

Os termos z_{ij} representam as vendas intersetoriais do setor i para todos os setores j (incluindo ele mesmo quando $j = i$). A relação (1) representa a distribuição da produção do setor i, havendo uma para cada setor. Estas informações podem ser convenientemente armazenadas em uma tabela de insumo-produto na forma

Setor	1	2	...	n	demanda	produção
1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}	$\bar{d}_1$	$\bar{x}_1$
2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}	$\bar{d}_2$	$\bar{x}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	z_{n1}	z_{n2}	...	z_{nn}	$\bar{d}_n$	$\bar{x}_n$

Em um mundo venal como o nosso, os dados acima são em geral apresentados em escalas adequadas de unidades monetárias. Por exemplo, milhões de reais no caso insumo-produto ou milhões de dólares no caso input-output.

Na tabela acima, a coluna

$$\mathbf{z_j} = \begin{bmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \vdots \\ z_{nj} \end{bmatrix}$$

associada ao setor j também tem um significado relevante. Estes elementos indicam compras realizadas pelo setor j dos outros setores produtivos para a manufatura do seu produto. Ou seja, a coluna representa as fontes e magnitudes dos insumos do setor j.

O modelo de Leontief

Os valores z_{ij} representam as demandas intermediárias dos produtores por insumos para as suas próprias produções a fim de atender a demanda final de consumo. Como usar os dados anuais para *prever* a produção a fim de atender uma demanda final *futura* especificada?

As inter-relações entre os setores são muito complexas e a conexão entre a demanda final e a produção é pouco clara. Leontief perguntou se existe um equilíbrio entre o nível de produção e a demanda total de forma que

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{produção} \\ \mathbf{x} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{demanda} \\ \text{intermediária} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{demanda final} \\ \mathbf{d} \end{array} \right\}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor de produção, cuja componente i é a produção do setor i, e $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor de demanda final, cuja componente i é a demanda final pela produção do setor i.

Como o vetor $\mathbf{d}$ é especificado, procura-se uma relação entre a demanda intermediária e o vetor de produção $\mathbf{x}$. A hipótese básica de Leontief consiste em assumir que para cada setor produtivo o *valor dos insumos por unidade de valor produzido é constante*.

Logo, se definirmos o vetor de consumo por

$$\mathbf{c_j} = \mathbf{z_j}/\bar{x}_j = \begin{bmatrix} z_{1j}/\bar{x}_j \\ z_{2j}/\bar{x}_j \\ \vdots \\ z_{nj}/\bar{x}_j \end{bmatrix},$$

então as demandas intermediárias de consumo do setor j associadas a uma produção cujo valor é x_j serão representadas por $x_j\mathbf{c_j}$ e a demanda total intermediária de todos os setores será igual a

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{c_j} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{C} = [\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c_n}]$ é a **matriz de consumo**.

O equlíbrio entre o nível de produção e a demanda total é então equacionado por $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$, ou seja, pelo sistema linear

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n. Por construção, se $d_i = \bar{d}_i$, $1 \leq i \leq n$, o sistema (2) admite a solução $x_i = \bar{x}_i$, $1 \leq i \leq n$. A questão é saber se há solução (que faça sentido econômico) para uma demanda especificada. Isto remete a questões sobre a invertibilidade de $\mathbf{I} - \mathbf{C}$ e sobre propriedades de $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}$, conhecida como Matriz de Leontief.

Rentabilidade e existência do equilíbrio

Pela definição da matriz de consumo, a despeza total do setor j associada a uma produção de valor x_j é igual a $(c_{1j} + c_{2j} + \cdots + c_{nj})x_j$. Logo, se

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1, \tag{3}$$

então o custo total de produção será menor do que o valor do produto. Neste caso, diremos (obviamente) que o setor j é rentável.

Esquecendo momentaneamente a crise econômica, ou supondo um país ideal, vamos assumir que todos os setores da economia são rentáveis. Nesta situação podemos nos valer de um resultado de Álgebra Linear, de aparição freqüente em aplicações, cujo enunciado é:

Teorema. Seja $\mathbf{C}$ uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais não negativos e tal que (3) valha para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Então a matriz $\mathbf{I} - \mathbf{C}$ é inversível e os coeficientes da sua inversa são não negativos.

Implicitamente em nossa discussão é assumido que os coeficientes da matriz de consumo são negativos. O resultado nos diz então que o sistema (2) tem solução única e que, se a demanda final de cada setor for positiva, então o valor da sua produção será também positivo.

Exemplo

Suponha que a economia é formada por três setores — manufatura, agricultura e serviços — com vetores de consumo $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_3}$ definidos na tabela abaixo.

	Manufatura	Agricultura	Serviços
Manufatura	0.50	0.40	0.20
Agricultura	0.20	0.30	0.10
Serviços	0.10	0.10	0.30
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{c_2}$	$\mathbf{c_3}$

A matriz de consumo é

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.40 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.10 \\ 0.10 & 0.10 & 0.30 \end{bmatrix}$$

Para produzir 100 unidades (monetárias), o setor de manufatura irá pedir e consumir 50 unidades de outras partes do setor de manufatura, 20 unidades da agricultura e 10 unidades de serviços, conforme o resultado de $100 \times \mathbf{c_1}$.

Se o vetor de demanda final for de 50 unidades monetárias para manufatura, 30 unidades para agricultura e 20 unidades para serviços, o nível de produção $\mathbf{x}$ que satisfaz esta demanda será solução de (conforme (2))

$$\begin{bmatrix} 0.50 & -0.40 & -0.20 \\ -0.20 & 0.70 & -0.10 \\ -0.10 & -0.10 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $\mathbf{x} \approx [226, 119, 78]^T$ (exercício). Ou seja, aproximadamente o setor de manufatura deverá produzir 226 unidades (monetárias), o de agricultura 119 unidades e o de serviços 78 unidades.

Aplicação

Diversos estudos sobre relações intersetoriais usam a matriz $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}$ para extrair indicadores econômicos. Aqui há um conflito entre o matemático e o usuário dos dados. Um analista numérico raramente inverte uma matriz, priorizando a resolução de sistemas lineares. Porém não se pode exigir de um profissional sem treino matemático que use um algorimtmo para resolução de sistemas lineares cada vez que precisar de uma informação. A multiplicação de matriz por vetores é algo que todo mundo aprendia na escola e facilmente executável em uma planillha.

Para problemas pequenos, isto não é uma grande dificuldade. O IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) contém dados de 67 setores da economia brasileira relativos a 2010 e o BEA (*Bureau of Economic Analysis*), do Departamento de Comércio norte-americano, contém dados de 389 setores da economia norte-americana relativos a 2007. O cálculo da matriz $\mathbf{L}$ é factível. Além disso, os seus coeficientes admitem uma interpretação econômica: l_{ij} lista a produção do setor i para atender a demanda final de uma unidade monetária do setor j.

As metodologias atuais para a construção da matriz de consumo são mais complexas e trazem conseqüências estranhas como a matriz ter alguns coeficientes negativos. O mesmo pode acontecer com a matriz de Leontief. Deixemos para os especialistas esta questão e nos ocupemos apenas de fazer as contas.

2 Tarefa

Faça um programa para implementar a fatoração QR conforme descrito no texto a seguir. Teste o seu programa com os exemplos deste texto e use-o para calcular a matriz $\mathbf{L}$ a partir das matrizes de consumo fornecidas nos arquivos *consumo.txt* (67 setores da economia brasileira) e *consume.txt* (389 setores da economia norte-americana). Estes arquivos possuem apenas uma coluna, onde na primeira linha está a dimensão n, e cada bloco de n dados abaixo armazena as colunas da matriz. Note que inverter uma matriz requer a solução de n sistemas lineares.

- O exercício deve ser feito em Python 3.x (o mesmo usado nos cursos de MAC, veja mais detalhes em https://panda.ime.usp.br/panda/python).
- O exercício pode ser feito em duplas, sempre com alguém da mesma área, não necessariamente da mesma turma.
- Apenas um aluno deve entregar o exercício, definido por ordem alfabética, destacando no relatório e código o nome de ambos os alunos.
- A entrega deve conter o relatório (em .pdf), contendo a análise do problema estudado, e o código usado para as simulações computacionais (arquivos .py). A entrega pode ser feita em um arquivo compactado único.

3 Fatoração QR de matrizes e seu uso na solução de sistemas lineares

Desenvolveremos aqui o método de fatoração QR de matrizes $n \times m$, com $n \geq m$, através de transformações de Householder, descritas a seguir:

Transformações de Householder:

Dado $w \in R^n$ definimos a transformação de Householder $H_w : R^n \to R^n$ dada por $H_w = I - \frac{2ww^t}{w \cdot w}$ (onde I é a identidade), que a cada $x \in R^n$ associa $H_w x = x - 2\frac{w \cdot x}{w \cdot w} w$. Esta transformação determina a reflexão do vetor x em relação ao espaço $w^\perp$.

A transformação linear H_w é ortogonal e simétrica, ou seja, ${H_w}^{-1} = {H_w}^t = H_w$. Verifiquemos:

$$ {H_w}^t = (I - \frac{2ww^t}{w \cdot w})^t = I - \frac{2(ww^t)^t}{w \cdot w} = H_w \quad \text{e} $$

$$ H_w H_w = (I - \frac{2ww^t}{w \cdot w})(I - \frac{2ww^t}{w \cdot w}) = I - \frac{4ww^t}{w \cdot w} + \frac{4w(w^t w)w^t}{(w \cdot w)^2} = I $$

.

Observemos ainda que uma transformação ortogonal preserva a norma de um vetor, ou seja

$$ ||H_w u||^2 = H_w u \cdot H_w u = (H_w u)^t H_w u = u^t {H_w}^t H_w u = u^t I u = u^t u = ||u||^2 $$

.

Dados dois vetores x e y não nulos em R^n podemos definir uma transformação de Householder tal que $H_w x = \lambda y$, com $\lambda \in R$. Para tanto basta tomarmos $w = x + \alpha y$, onde $\alpha = \pm \frac{||x||}{||y||}$ (verifique !).

Como exemplo, consideremos x e y em R^3, com $x^t = (1, 1, 0)$ e $y^t = (0, -1, 1)$. Definindo $w = x + y$ temos $w^t = (1, 0, 1)$ e

$$ H_w x = x - 2\frac{w \cdot x}{w \cdot w} w = x - w = -y \quad . $$

Note que para o cálculo de $H_w x$ não necessitamos da representação matricial da transformação H_w, bastando calcular os produtos escalares de w por x e de w por w e depois adicionar dois vetores. Poderíamos escrever a matriz que representa $H_w : R^3 \to R^3$ como

$$ H_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

e então multiplicar pelo vetor x. Isto não só é desnecessário, como seria computacionalmente bem mais ineficiente (teríamos $O(n^2)$ multiplicações na montagem de H_w e também no cálculo de $H_w x$ ao multiplicar a matriz pelo vetor, enquanto que o cálculo dos produtos internos e a soma dos vetores envolve apenas $O(n)$ operações).

Fatoração QR:

Agora iremos mostrar como transformar uma matriz $A_{n \times m}$, com $n \geq m$, em uma matriz $R_{n \times m}$, com $R_{i,j} = 0$ se $i > j$, através de sucessivas transformações de Householder. Ou seja, vamos definir transformações $H_{w_1}, H_{w_2}, ..., H_{w_m}$, tais que $H_{w_m} ... H_{w_2} H_{w_1} A = R$ e portanto, como as transformações de Householder são ortogonais e simétricas, teremos que $A = QR$, com Q ortogonal dada por $Q = H_{w_1} H_{w_2} ... H_{w_m}$. Definiremos w_1 tal que a transformação H_{w_1} leve o vetor a_1, correspondendo à primeira coluna de A em um múltiplo de e_1, o primeiro vetor da base canônica do R^n. Isto é feito definindo $w_1 = a_1 + \delta \frac{||a_1||}{||e_1||} e_1 = a_1 + \delta ||a_1|| e_1$. Escolheremos o δ nesta expressâo igual ao sinal do primeiro elemento de a_1. Temos então $a_1^t = (A_{1,1}, A_{2,1}, ..., A_{n,1})$, $e_1^t = (1, 0, ..., 0)$ e $\delta = sgn(A_{1,1}) = 1$, se $A_{1,1} \geq 0$ e -1 caso contrário.

Após a aplicação de H_{w_1} à matriz A, esta irá adquirir o seguinte formato

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & ... & x \\ 0 & x & x & ... & x \\ 0 & x & x & ... & x \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & x & x & ... & x \end{bmatrix} \quad ,$$

onde os x representam valores quaisquer e zera-se a primeira coluna abaixo da diagonal principal. Suponha agora que foram executadas $i-1$ etapas do processo e que a nova matriz $A = H_{w_{i-1}} ... H_{w_2} H_{w_1} A$ possua zeros abaixo da diagonal principal em suas primeiras $i-1$ colunas. Vamos agora definir a transformação de Householder H_{w_i} a ser aplicada a seguir. Escolhemos $w_i = a_i + \delta \frac{||a_i||}{||e_i||} e_i = a_i + \delta ||a_i|| e_i$, onde $a_i^t = (0, ..., 0, A_{i,i}, A_{i+1,i}, ..., A_{n,i})$, e_i é o i-ésimo elemento da base canônica do R^n e $\delta = sgn(A_{i,i})$. Como as primeiras $i-1$ posições do vetor w_i serão nulas a aplicação da transformação H_{w_i} não irá alterar as primeiras $i-1$ linhas da corrente matriz A e nem as suas primeiras $i-1$ colunas. Como exemplo, vamos supor que após duas etapas do processo tenhamos chegado à matriz seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Teríamos então $w_3 = a_3 + ||a_3|| e_3$, com $a_3^t = (0, 0, 2, -1, 2)$ e $e_3^t = (0, 0, 1, 0, 0)$. Assim, $w_3^t = (0, 0, 5, -1, 2)$ e após a aplicação de H_{w_3} à matriz A obteríamos nova matriz (após 3 etapas):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -11/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/15 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 11/15 & 5/3 \end{bmatrix} \quad .$$

Note neste exemplo que nesta etapa só alteramos a submatriz onde tanto $i \geq 3$, como $j \geq 3$ e que o resultado corresponde à aplicação de uma transformação de Houlseholder $H_{\tilde{w}_3}$ de R^3 em R^3 às 3 colunas desta submatriz, com $\tilde{w}_3^t = (5, -1, 2)$. (Faça as contas!). Este é um fato geral. A aplicação da matriz $H_{\tilde{w}_k}$ à matriz A na k-ésima etapa apenas altera a submatriz onde tanto $i \geq k$, como $j \geq k$. Tal fato deve ser usado na implementação do algoritmo, evitando-se operações desnecessárias. Após as m etapas do processo, a matriz A abaixo da diagonal principal estará zerada.

Resolvendo sistemas lineares através da Fatoração QR:

Sistemas determinados

Seja A uma matriz $n \times n$ não singular e $b \in R^n$. Podemos resolver o sistema linear $Ax = b$, com $x \in R^n$, com o auxílio da construção apresentada na seção anterior. Vimos que $H_{w_m} ... H_{w_2} H_{w_1} A = R$, com R triangular superior. Como as transformações de Householder são ortogonais, a matriz R também será não singular. Para resolver o sistema, observemos que:

$$H_{w_m} ... H_{w_2} H_{w_1} A x = R x = H_{w_m} ... H_{w_2} H_{w_1} b = \tilde{b} \quad .$$

Assim, se durante o processo de transformação da matriz A na matriz triangular superior R, também aplicarmos as transformações de Householder ao vetor b, terminaremos com um sistema linear equivalente $Rx = \tilde{b}$, de simples resolução.

Observação: Neste caso, como $n = m$, bastam $m-1$ etapas do processo para obtermos R triangular superior. No caso geral o número de etapas deve ser igual ao mínimo entre m e $n-1$.

Sistemas sobredeterminados

Seja A uma matriz $n \times m$ com colunas linearmente independentes e $b \in R^n$. Para solução do sistema $Ax = b$ no sentido de mínimos quadrados, ou seja, para a determinação de $x \in R^m$ que minimiza o valor de $E = ||Ax - b||$, com a norma Euclidiana do R^n, também podemos fazer uso da fatoração $A = QR$. Primeiramente observemos que como Q é ortogonal (ou seja, $Q^tQ = I$) temos que $||Q^tx||^2 = (Q^tx)^t(Q^tx) = x^tQQ^tx = x^tx = ||x||^2$. Assim temos que minimizar o valor de $= E = ||Ax - b||$ é equivalente a minimizar $||Q^tAx - Q^tb|| = ||Rx - \tilde{b}||$. Como as primeiras m linhas de R formam uma matriz $m \times m$ triangular superior e não singular, está definido unicamente $x \in R^m$ que satisfaz às m primeiras equações de $Rx = \tilde{b}$. Em virtude do fato de que as últimas $n - m$ linhas de R são nulas, estas equações não serão satisfeitas se o correspondente lado direito não for nulo, independentemente do valor de x. Assim, é evidente que a solução $x \in R^m$ das m primeiras equações de $Rx = \tilde{b}$ minimiza o valor de $||Rx - \tilde{b}||$ (e consequentemente de $= E = ||Ax - b||$). Mais ainda, obtemos que

$$E = ||Ax - b|| = \sqrt{\tilde{b}_{m+1}^2 + \tilde{b}_{m+2}^2 + ... + \tilde{b}_n^2} \quad .$$

Matrizes de Banda

Definimos para cada linha i de uma matriz dois valores, $inicio(i)$ e $final(i)$ como sendo, respectivamente, as colunas onde se encontram o primeiro e o último elemento não nulo desta linha. Associados a estes dois valores, podemos então definir a largura da banda esquerda da linha i $lbe(i) = i - inicio(i)$ e a largura da banda direita $lbd(i) = final(i) - i$. Definimos então a semilargura de banda da matriz como sendo o máximo dentre todos os valores de $lbe(i)$ e $lbd(i)$. Por exemplo, uma matriz tridiagonal tem semilargura de banda 1 (e largura de banda igual a 3). Matrizes com valores pequenos de semilargura de banda (com zeros quando nos afastamos da diagonal), permitem que de maneira simples se explore este padrão de esparsidade, para reduzir os custos computacionais dos algoritmos. Veremos a seguir, como podemos usar uma estrutura de banda para reduzir os custos computacionais durante o processo de redução de uma matriz A com semilargura de banda lb à forma triangularizada R através das transformações de Householder. Primeiramente observe que o vetor w_i (definindo a transformação de Householder H_{w_i}) tem suas primeiras $i - 1$ posições nulas. Além disso, se lb é a semilargura de banda da matriz, então as posições de $i + 1 + lb$ a n de w_i (caso $i + 1 + lb \leq n$) também serão nulas. Este fato pode ser explorado ao computarmos o produto interno de w_i por outros vetores, pois não temos que computar os termos que de antemão sabemos ser nulos. Além disso, a matriz R terá uma largura de banda direita no máximo igual a $2lb$ e portanto ao aplicar H_{w_i} à matriz modificaremos apenas as colunas de i até no máximo $i + 2lb$ (caso este valor ainda seja menor que m, a coluna final). A estrutura de banda de R também pode ser utilizada para economizar operações na solução do sistema $Rx = \tilde{b}$.

Ordem das linhas e a semilargura de banda

Se quisermos minimizar a semilargura de banda (o que favorece a economia computacional), podemos reordenar as linhas por ordem crescente de seu início (ou seja, a linha i deve anteceder a linha j caso $inicio(i) < inicio(j)$). Além disso, se $inicio(i) = inicio(j)$ e $fim(i) < fim(j)$ a linha i deve anteceder a linha j. Para diminuir ainda mais a semilargura de banda, seria necessário alterar também a ordem das incógnitas, mas a complexidade de como fazer isso ultrapassa o escopo deste projeto. (Os interessados podem por exemplo consultar o livro *Direct Methods for Sparse Matrices, I. Duff, A. Erisman e J. Reid, Oxford Science Publications.*)

Sua tarefa e testes

Dados uma matriz A $n \times m$ e um vetor $b \in R^n$ você deve desenvolver um algoritmo que através de sucessivas transformações de Householder transforma A na matriz triangular superior R e o vetor b no vetor modificado $\tilde{b}$ e a seguir resolve o sistema $Rx = \tilde{b}$. Estes algoritmos devem ser escritos para poderem ser utilizados na solução dos problemas de seu projeto. Como testes iniciais dos algoritmos, considere os casos:

a) $n = m = 64$, $A_{i,i} = 2, i = 1, n$, $A_{i,j} = -1, se|i - j| = 1$ e $A_{i,j} = 0, se|i - j| > 1$. Use $b(i) = 1, i = 1, n$.

b) $n = 20, m = 17$, $A_{i,j} = 1/(i + j - 1), se|i - j| \leq 4$ e $A_{i,j} = 0, se|i - j| > 4$. Use $b(i) = 1, i = 1, n$

Após desenvolver e testar seu algoritmo, procure torná-lo mais eficiente no caso da matriz ter uma semilargura de banda lb (projetos que explorem bem este fato serão melhor avaliados). Use os exemplos acima para testar se os mesmos resultados ainda são obtidos. Divirta-se!

Referências

[1] Wassily W. Leontief, *Input-Output Economics*, Scientific American, October 1951, pp. 15–21

[2] David C. Lay, Steven R. Lay, and Judi J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, Pearson Education, Inc., 2016

[3] Ronald E. Miller and Peter D. Blair, *Input-Output Analysis*, Cambridge University Press, 2009

[4] www.ibge.gov.br/home/estatistica/economia/matrizinsumo_produto/

[5] bea.gov/industry/io_annual.htm