# MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

## Lista de Exercícios sobre Sistemas Lineares

**1:** Utilizando o método de eliminação de Gauss, calcule o determinante e a seguir a inversa da matriz abaixo. Efetue todos os cálculos utilizando frações.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2:** É dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \end{cases}$$

(a) Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal, utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos.

(b) Efetue uma iteração de refinamento da solução.

(c) Verifique se o sistema linear dado satisfaz o Critério de Sassenfeld. Em caso negativo, troque a posição das equações no sistema, de forma que, para o sistema equivalente assim obtido, o Critério das Linhas assegure a convergência do Método de Gauss-Seidel.

(d) Sem efetuar as iterações, e partindo da aproximação inicial $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$, bem como sabendo que $|x_1| \leq 2$, $|x_2| \leq 2$, $|x_3| \leq 2$, determine um número de iterações que assegure um erro inferior a $\varepsilon = 0,01$ em cada uma das variáveis, ao se aplicar o Método de Gauss-Seidel ao sistema para o qual tal método converge, conforme o item (c).

(e) Calcule duas iterações pelo Método de Gauss-Seidel a partir de $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$.

**3:** O sistema linear $Ax = b$ (com $A$ e $b$ dados abaixo) foi resolvido pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante de dois algarismos significativos. Os resultados obtidos foram os seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 1 \\ \cline{1-1} 0.5 & \multicolumn{1}{|c}{4} & -0.5 & 0.5 \\ \cline{2-2} 1 & 0.25 & \multicolumn{1}{|c|}{-1.9} & -0.13 \end{array}\right)$$

$$p_1 = 1 \ , \ p_2 = 3 \ , \ \tilde{x} = (0.14, 0.13, 0.068),$$

onde $[A_\Delta | b_\Delta]$ representa a matriz aumentada triangularizada, juntamente com os multiplicadores, $p_1$ e $p_2$ são as informações sobre as permutações de linhas e $\tilde{x}$ é a aproximação da solução obtida. Usando as informações acima, faça uma etapa de refinamento da solução.

**4:** Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $b = (3, 2, -4)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos,

(a) Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal.

(b) Calcule a primeira coluna da matriz inversa de $A$.

**5:** (a) Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique se ele satisfaz o critério de linhas e o critério Sassenfeld.

(b) O sistema do item (a) é equivalente ao sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que você pode afirmar a respeito da convergência do método de Gauss-Seidel para este sistema? Justifique!

(c) O método de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema do item (a) é convergente? Justifique!

**6:** Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $b = (2.5, 6.0, 20)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 6.0 & 2.0 \\ 2.5 & 9.0 & 4.0 \\ 8.0 & -1.0 & -3.0 \end{pmatrix}.$$

Ao aplicarmos eliminação de Gauss com condensação pivotal para este sistema, trabalhando com dois algarismos significativos, obtivemos como resultado

$$\begin{pmatrix} 8.0 & -1.0 & -3.0 \\ \hline 0.31 & \multicolumn{1}{|c}{9.3} & 4.9 \\ \cline{2-2} 0.19 & 0.67 & \multicolumn{1}{|c}{-0.7} \end{pmatrix},$$

com $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$. Efetue uma etapa de refinamento da solução, partindo de $x^{(0)} = (2.0, -1.0, 2.0)$.

**7:** Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

**8:** Resolvendo o sistema da questão anterior pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos obtivemos a matriz triangularizada a seguir (com os multiplicadores em suas respectivas posições):

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.33 \\ 0.33 & 0.085 & 0.091 \\ 0.5 & 0.941 & -0.0006 \end{bmatrix},$$

o vetor de permutações $p_1 = 1, p_2 = 3$ (ou seja, no primeiro passo não houve troca de linhas e no segundo passo foram permutadas a segunda e terceira linha) e a solução $x = (41.4, -224., 217.)$. Calcule 2 passos de refinamento desta solução, utilizando a triangularização fornecida.

**9:** Resolva o sistema linear da questão 7 com toda a precisão fornecida por sua calculadora. Note a sensibilidade dos resultados em relação ao número de significativos empregados. Substitua agora o valor 0.33 da matriz do sistema por 1/3 e resolva novamente o sistema (trabalhe com toda a precisão). Compare os resultados obtidos. Isto mostra que esta pequena mudança na definição do problema (a troca de 0.33 por 1/3) causa uma mudança significativa em sua solução, caracterizando o que chamamos de uma matriz muito mal condicionada.

**10:** A matriz do item anterior é um caso particular das chamadas matrizes de Hilbert. Estas são matrizes $n \times n$, onde os coeficientes são da forma $a_{i,j} = 1/(i+j-1)$. Experimente escrever um programa em c para solução de sistemas lineares com estas matrizes para $n = 5, 10, 15$ e 20 e note a sensibilidade numérica envolvida no problema (defina, por exemplo, o lado direito do sistema como a soma das linhas respectivas, sabendo assim que o vetor formado por 1's é solução exata e compare com o que obtém numericmente). Mais adiante no curso você verá como as matrizes de Hilbert surgem naturalmente na resolução de um outro problema ...

**11:** Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 3.1 & -1.3 & 1.2 \\ 0.5 & 2.2 & 1.1 \\ 4.2 & -2.0 & 6.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 0.77 \\ 13. \end{bmatrix}$$

**12:** Vamos refinar a solução obtida na questão 11) através das etapas:

(a) Calcule o resíduo (em dupla precisão) da solução obtida na questão 11.

(b) No processo de refinamento da solução encontrada na questão 11, temos que resolver um sistema linear para o cálculo da correção. Mostre que podemos utilizar o método de Gauss-Seidel para resolver este sistema.

(c) Calcule 1 iteração do método de Gauss-Seidel (partindo de $x = (0, 0, 0)$) para o cálculo da correção e obtenha uma nova solução para a equação da questão 11.

**13:** Uma barra linear de um metro de comprimento é mantida a 0 graus em um extremo e a 128 graus no outro. Desejamos determinar a temperatura da barra a cada 20 cm. Denominando de $T_0 = 0$ a temperatura de um extremo, de $T_5 = 128$ a temperatura no outro extremo e de $T_1, T_2, T_3$ e $T_4$ a temperatura nos pontos interiores e sabendo que a temperatura em cada ponto interior é igual à média aritmética da temperatura de seus dois pontos vizinhos:

(a) escreva um sistema linear para a determinação de $T_1, T_2, T_3$ e $T_4$.

(b) Calcule 4 iterações pelo método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema a partir da aproximação inicial nula.

(c) Analise a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema.

**14:** Resolvendo o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 1.5 & -1.0 & 1.0 \\ 3.0 & -1.0 & 1.0 & 2.0 \\ 1.0 & 1.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos obtivemos a matriz triangularizada a seguir (com os multiplicadores em suas respectivas posições):

$$\left[\begin{array}{cccc} 3.0 & -1.0 & 1.0 & 2.0 \\ \hline 0.33 & \multicolumn{1}{|c}{2.3} & 0.67 & 2.3 \\ \cline{2-4} 0.5 & 0.87 & \multicolumn{1}{|c}{-2.1} & -2.0 \\ \cline{3-4} 0.33 & 0.57 & 0.81 & \multicolumn{1}{|c}{-1.4} \end{array}\right],$$

o vetor de permutações $p_1 = 3, p_2 = 3$ e $p_3 = 3$ (ou seja, no primeiro e segundo passo trocou-se a linha 3 com a linha pivot e no terceiro passo não houve troca). Obteve-se a solução $x = (-0.93, 1.1, 1.1, 1.9)$. Calcule um passo de refinamento desta solução (lembre-se de dobrar a precisão para o cálculo do resíduo).