

Universidade de São Paulo  
Instituto de Matemática e Estatística  
Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional

Hanna Miura

**Modelagem do comportamento difuso dos  
preços através de passeios aleatórios com  
catástrofes**

São Paulo, Fevereiro de 2019

# Modelagem do comportamento difuso dos preços através de passeios aleatórios com catástrofes

Esta é a versão final da monografia da disciplina  
MAP2040 - Trabalho de Formatura

Orientador: Prof. Dr. Anatoli Yambartsev  
Coorientador: Prof. Ms. Helder Rojas Molina

# Agradecimentos

Agradeço.



# Resumo

Miura, Hanna. **Modelagem do Comportamento Difuso dos Preços Através de Passeios Aleatórios com Catástrofes**. Trabalho Conclusão Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Nesse trabalho vamos apresentar como ocorre o fenômeno de formação dos preços. Através de dados do mercado de alta frequência é possível com maior precisão entender seu comportamento, que tem característica sub-difusiva, super difusiva e difusiva.

Propomos modelos customizados de microdinâmica dos preços em mercado de alta frequência com catástrofes, modelados através de cadeias de Markov com o objetivo de analisar e discutir se esses modelos replicarão as características esperadas.

**Palavras-chave:** Difusão, spread, mercado de alta frequência, limit order, market order, limit order book, cadeia de Markov.



# Abstract

Miura, Hanna. **Modeling Diffuse Behavior of Prices Through Random Walks with Catastrophes**. Trabalho Conclusão Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

In this work we will present how the phenomenon of price formation occurs. Through high-frequency market data it is possible to more accurately understand its behavior, which has sub-diffusive, super diffusive and diffusive characteristics.

We propose custom microdynamic models of high frequency market prices with catastrophes, modeled by Markov chains with the purpose of analyzing and discussing whether these models will replicate the expected characteristics.

**Palavras-chave:** Diffusion, spread, high frequency trade, limit order, market order, limit order book, Markov chain.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Comportamento difuso dos preços em mercado de alta frequência</b>	<b>11</b>
2.1	Descrições . . . . .	11
2.2	Função Difusão . . . . .	12
2.3	Função Resposta e Fator de Ajuste . . . . .	13
2.4	Relação entre Difusão e Resposta . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Passeios Aleatórios com Catástrofes</b>	<b>17</b>
3.1	Introdução . . . . .	17
3.2	Definição do Modelo . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Simulação de cadeias de Markov e verificação do fenômeno de difusão</b>	<b>23</b>
4.1	Introdução . . . . .	23
4.2	Implementação em R . . . . .	23
4.3	Resultado da Simulação . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>33</b>
6.1	Anexo . . . . .	33
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>35</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>37</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Para que o objetivo e os resultados obtidos nesse trabalho sejam compreendidos precisamos contextualizar como ocorre o mecanismo de criação dos preços no mercado financeiro. A literatura tem bastante interesse em explicar como ocorre o fenômeno de criação dos preços, para criar previsões do comportamento do mercado.

Atualmente, com os dados do *High Frequency Trade (HFT)* é possível entender com maiores detalhes como ocorre o fenômeno. Inclusive na literatura encontramos estudos usando dados do HFT que resultaram em fatos empíricos relevantes que caracterizam a natureza difusa da dinâmica dos preços.

Segundo a literatura, o comportamento difuso dos preços é resultado da interação entre dois fenômenos opostos: (i) *anti-persistência* – reversão ao preço médio – que resulta no comportamento sub-difusivo; (ii) e *persistência* – repulsa ao preço médio – que resulta em um comportamento super difusivo.

Um modelo que consiga replicar a formação dos preços com tais características são conhecidos como passeios aleatórios com catástrofes. Por isso, nesse trabalho vamos propor várias versões de *passeios aleatórios com catástrofes* e analisar se o comportamento desses modelos replicam as características esperadas.



## Capítulo 2

# Comportamento difuso dos preços em mercado de alta frequência

### 2.1 Descrições

Para compreender as informações contidas nesse trabalho é essencial fazeremos algumas definições gerais. Existem alguns eventos que mudam a dinâmica dos preços e o spread: *Market orders* são ordens para comprar ou vender um determinado número de ações imediatamente ao melhor preço disponível. *Limit orders* ordens que também estabelecem um preço limite  $\pi$ , correspondendo ao pior preço permitido para a transação. Normalmente os limit orders não são instantâneos e por isso são armazenados em um sistema de filas que chamamos *Limit order book*.

Os limit orders de compra são chamadas de *bid* e os limit order de venda são chamadas de *ask*. *Cancellation order* cancela o último limit order com melhor preço, conseqüentemente, aumenta o spread quando cancela o melhor bid ou melhor ask.

Em qualquer momento, há uma melhor (menor) oferta para vender com preço  $p_{ask}$  e melhor (maior) lance para comprar com preço  $p_{bid}$ . A diferença de preço entre eles é chamado spread  $s(t) = p_{ask} - p_{bid}$ . Os preços não são contínuos, mas mudam em quanta discretos chamados ticks, de tamanho  $p$ . O número de compartilhamentos em um pedido é chamado seu tamanho ou seu volume

## 2.2 Função Difusão

Seja  $n$  o instante do estado atual,  $l$  um incremento de tempo e  $p_n$  o ponto no instante  $n$ . Definimos  $d(l)$  como

$$d(l) = \mathbb{E}[p_{n+l} - p_n]^2.$$

Na ausência de quaisquer correlações lineares entre mudanças sucessivas de preço,  $d(l)$  tem um comportamento estritamente difusivo, ou seja

$$d(l) = dl,$$

onde  $d$  é uma constante. Na presença de correlações de curto alcance, espera-se desvios desse comportamento em tempos curtos. No entanto, em ações líquidas com tamanhos relativamente pequenos, encontra-se um comportamento notavelmente linear para  $d(l)$ , mesmo para  $l$  pequeno.

A inexistência de correlações lineares nas variações de preço significa que as possibilidades de viés estatístico estão ausentes, mesmo para as negociações de alta frequência. Por isso, para enfatizar as diferenças a partir de um comportamento estritamente difusivo, estudamos a função

$$D(l) = \frac{d(l)}{l}.$$

Logo, afirmamos que o comportamento do passeio aleatório difusivo dos preços das ações aparece mesmo no nível de negociação, com uma constante de difusão  $d$  que é da ordem do spread ao quadrado.

O artigo [3] descreve um estudo onde foram analisados dados de negociações e cotações de ações francesas líquidas nos anos de 2001 e 2002. Para ilustrar os resultados foram usados principalmente as ações da France-Telecom, que é uma das ações mais negociadas e com performance particularmente boa.

O efeito da difusão pode ser observado nas ações da France-Telecom, média em três períodos diferentes: primeiro semestre de 2001 (onde o ticket foi de 0,05 Euros), segundo semestre de 2001, e todo o ano de 2002 (onde o ticket foi de 0,01 Euros).

Vemos que  $D(l)/l$  é de fato quase constante, com uma pequena oscilação. Notamos que para ações com ticks maiores, um diminuição lenta de  $D(l)/l$

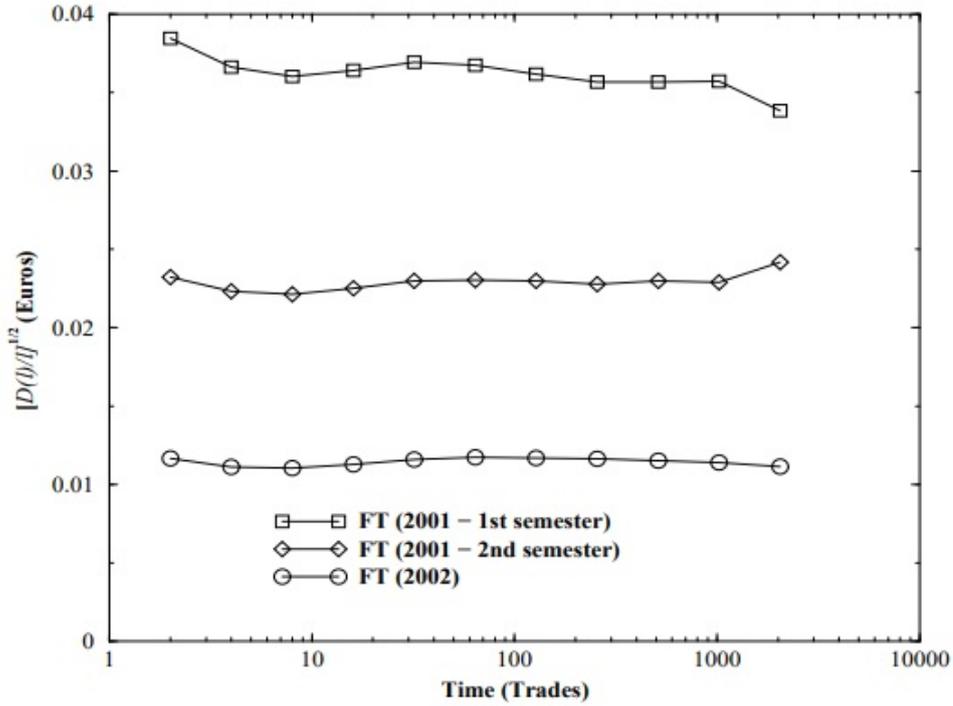


Figura 2.1: Efeito difuso nas ações da Telecon-France.

é observada, correspondendo a um rápido efeito de anti-persistência (ou sub-difusão). A seguir o gráfico que ilustra esse efeito:

A variação de  $D(l)/l$  é muito pequena, em particular quando o ticket é pequeno (0.01 Euros) no período de Julho de 2001 à Dezembro de 2002. Para grandes tickets (0,05 Euros) no período de Janeiro de 2001 à Junho de 2001 existe uma sistemática tendência descendente.

### 2.3 Função Resposta e Fator de Ajuste

A fim de compreender melhor o impacto das negociações nas mudanças dos preços estudamos a função resposta  $R(l)$  definida como

$$R(l) = \mathbb{E}([p_{n+l} - p_n]\epsilon_n),$$

onde

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } p_n - p_{n-1} > 0, \\ -1, & \text{se } p_n - p_{n-1} < 0, \end{cases}$$

representa o fator de ajuste da  $n$ -ésima negociação. A função  $R(l)$  mede quanto, em média, o preço sobe condicionado ao bid no tempo 0 ou o ask move o preço para baixo um tempo  $l$  depois. Além disso, ela captura pequenos efeitos

sistemáticos que relacionam mudanças no preço médio em relação ao fator de ajuste.

## 2.4 Relação entre Difusão e Resposta

O estudo das partículas brownianas relaciona o coeficiente de difusão  $D$  com a resposta  $R$  da partícula a uma força externa. Uma relação semelhante pode ser observada também nos mercados financeiros, foi o que [?] sugeriu ineditamente, resultando em alguns resultados empíricos. Em [3] foi realizada uma análise relacionada, mas diferente da de Rosenow. Digamos que em qualquer dia de negociação, seja possível calcular a constante de difusão local média  $D(l)$  em um determinado tempo, por exemplo  $l = 128$ , e a resposta de preço local médio  $R(l)$  na mesma escala de tempo. Rosenow, por outro lado, computa uma suscetibilidade como a inclinação da variação do preço médio em um determinado intervalo de tempo versus o desequilíbrio de volume durante o mesmo intervalo de tempo, e relaciona essa suscetibilidade à constante de difusão. Igualmente ao resultado de Rosenow (que foi motivado por uma equação de Langevin para variações de preço), concluímos que existe uma relação linear entre  $R(l)^2$  e  $D(l)$ . Como ilustrado no gráfico a seguir, por dois períodos diferentes (primeiro semestre de 2001 e 2002):

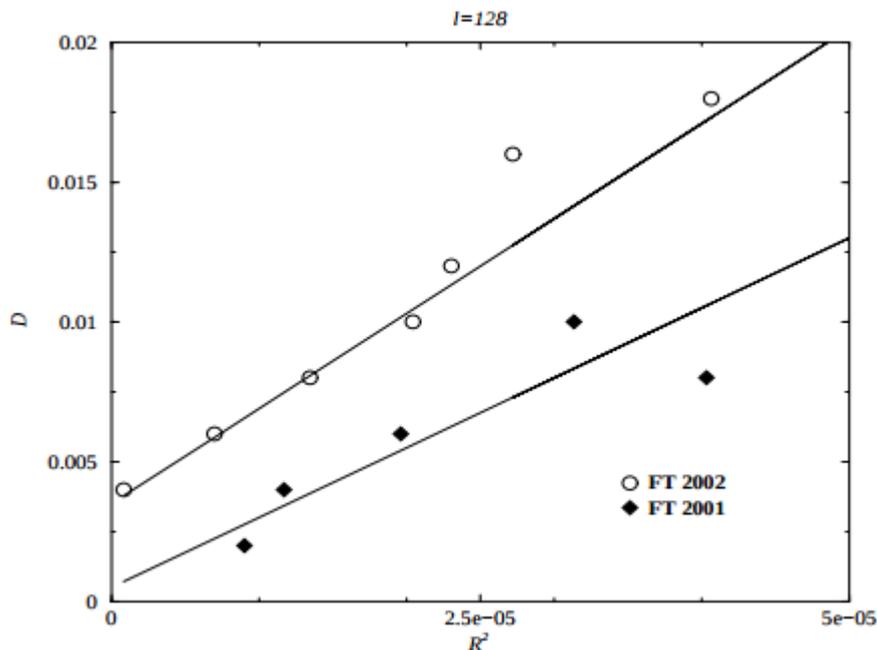


Figura 2.2: Relação entre  $D(l)$  e  $R(l)^2$

Constante média de difusão  $D = D(l)/l$ , calculada para  $l = 128$ , e condicionada a um certo valor de  $R^2(l)$ , também computada para  $l = 128$  (FT). O tamanho do ticket era 5 vezes maior para o primeiro semestre de 2001. Correspondentemente, o eixo x foi redimensionado para baixo por um fator 25 e o eixo y por um fator cinco para esse conjunto de dados.



## Capítulo 3

# Passeios Aleatórios com Catástrofes

### 3.1 Introdução

Para que um modelo consiga replicar a formação dos preços apresentada no capítulo 1 precisa ter três características: sub-difusão, super-difusão e difusão geral. Nessa seção nosso intuito é mostrar através de fatos empíricos se o comportamento da dinâmica dos preços já estudado, também pode ser observado para os modelos Markovianos que vamos apresentar.

### 3.2 Definição do Modelo

Seja  $\xi(t) = (P_-(t), P_+(t)) \in \mathbb{R}^2$  a Cadeia de Markov no tempo  $t$  contínuo, e  $E = \{(b, a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : b < a\}$  o espaço de estados. Chamamos  $P_+(t)$  preço ask e  $P_-(t)$  preço bid no instante  $t$ .

**Definição 1** *Definimos Spread bid-ask como:*

$$S(t) = P_+(t) - P_-(t)$$

A cadeia  $\xi(t)$  é definida através das seguintes taxas de transição:

$$\begin{aligned}(b, a) &\rightarrow (b, a - \Delta) \text{ com taxa } \alpha_-(\Delta), \\(b, a) &\rightarrow (b, a + \Delta) \text{ com taxa } \alpha_+(\Delta), \\(b, a) &\rightarrow (b + \Delta, a) \text{ com taxa } \beta_+(\Delta), \\(b, a) &\rightarrow (b - \Delta, a) \text{ com taxa } \beta_-(\Delta),\end{aligned}$$

em que  $\Delta \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \Delta < S(t)$  e  $\alpha_{\pm}$  and  $\beta_{\pm}$  são funções pre-definidos em  $\mathbb{N}$  que dependem de spread corrente; a escolha dessas funções-taxas vai definir o modelo de estudo.

Observa, que junto com a cadeia  $\xi(t)$  podemos definir  $\eta(t) = (P_-(t), S(t))$ ,  $t > 0$  uma Cadeia de Markov equivalente com tempo contínuo mas com espaço de estados  $E = \{(b, a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : b < a\}$ .

Estamos interessados em analisar o comportamento assintótico de  $\xi(t)$ , apesar de  $\xi(t)$  e  $\eta(t)$  conterem as mesmas informações, a segunda representação nos dá maior controle na análise assintótica. Seja  $(b, s)$  estado da Cadeia de Markov  $\eta(t)$ , e as taxas de transição para  $\eta(t)$  são definidas como:

$$\begin{aligned} (b, s) &\rightarrow (b, s + \Delta) \text{ com taxa } \alpha_+(\Delta), \\ (b, s) &\rightarrow (b, s - \Delta) \text{ com taxa } \alpha_-(\Delta), \\ (b, s) &\rightarrow (b - \Delta, s + \Delta) \text{ com taxa } \beta_+(\Delta), \\ (b, s) &\rightarrow (b - \Delta, s - \Delta) \text{ com taxa } \beta_-(\Delta). \end{aligned}$$

Observe, que as taxas de transição de  $\eta(t)$  dependem apenas da segunda coordenada, o Spread. Supomos  $S(t) = s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} s &\rightarrow s + \Delta \text{ com taxa } \gamma_-(\Delta) = \alpha_+(\Delta) + \beta_-(\Delta), \\ s &\rightarrow s - \Delta \text{ com taxa } \gamma_+(\Delta) = \alpha_-(\Delta) + \beta_+(\Delta). \end{aligned}$$

Contudo, neste trabalho consideremos três modelos de liquidez:

1. Modelo 1: Regime Alta Liquidez Competitivo
2. Modelo 2: Alta Liquidez Não Competitivo e
3. Modelo 3: Baixa Liquidez.

Todos regimes são definidos por taxas que dependem do incremento  $\Delta$ .

### Modelo 1: Regime de Alta Liquidez Competitiva

Para definir as taxas do regime de alta liquidez usamos as taxas de transição  $\alpha_-^h, \alpha_+^h, \beta_-^h, \beta_+^h$  que são números reais estritamente positivos. Para algum  $k > 1$  definimos  $I_k = \{1, 2, \dots, k - 1\}$ .

Supomos que em algum momento a Cadeia de Markov  $\xi$  está em algum estado  $(b, a) \in \mathbb{X}$ , definimos as taxas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\alpha_+(\Delta) &= \begin{cases} \alpha_+^h, & \text{se } \Delta = 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \alpha_-(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\alpha_-^h}{a-b-1}, & \text{se } b-a > 1, \forall \Delta \in I_b - a, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \beta_-(\Delta) &= \begin{cases} \beta_-^h, & \text{se } \Delta = 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \beta_+(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\beta_+^h}{a-b-1}, & \text{se } b-a > 1, \forall \Delta \in I_b - a, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}\end{aligned}$$

Como podemos observar, a cadeia  $S(t)$  sozinha é uma Cadeia de Markov. Nesse regime as taxas de transição de  $S(t)$  podem ser representadas de seguinte forma: Supomos que para algum momento,  $S(t) = k \in \mathbb{N}$ , seja  $\gamma_+^h = \beta_-^h + \alpha_+^h$  e  $\gamma_-^h = \beta_+^h + \alpha_-^h$  temos

$$\begin{aligned}k &\rightarrow k+1 \text{ com taxa } \gamma_+^h, \\ k &\rightarrow k-\Delta \text{ com taxa } \frac{\gamma_-^h}{k-1}, \Delta \in I_k\end{aligned}$$

Notemos que a Cadeia de Markov  $S(t)$  é irredutível.

**Teorema 1** *Cadeia  $S(t)$  é ergódica.*

## Modelo 2: Regime de Alta Liquidez Não Competitiva

Com intuito de definir as taxas do Regime de Alta Liquidez Não Competitiva fixamos as taxas de transição  $\alpha_-^c, \alpha_+^c, \beta_-^c, \beta_+^c$  que são números reais, positivos. Supomos que em algum momento a Cadeia de Markov esteja em algum estado

$(b, a) \in \mathbb{X}$ , as taxas de transição para a Cadeia de Markov  $\xi$  são definidas como:

$$\begin{aligned}\alpha_+(\Delta) &= \begin{cases} \alpha_+^c, & \text{se } \Delta = 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \alpha_-(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\alpha_-^c}{\Delta^\mu}, & \text{se } b - a > 1, \forall \Delta \in I_b - a, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \beta_-(\Delta) &= \begin{cases} \beta_-^c, & \text{se } \Delta = 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \beta_+(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\beta_+^c}{\Delta^\mu}, & \text{se } b - a > 1, \forall \Delta \in I_b - a, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}\end{aligned}$$

Supomos que para algum momento,  $N \in \mathbb{K}$  seja o Spread e seja  $\gamma_+^c = \beta_-^c + \alpha_+^c$  e  $\gamma_-^c = \beta_+^c + \alpha_-^c$  temos

$$\begin{aligned}k &\rightarrow k + 1 \quad \text{com taxa } \gamma_+^h, \\ k &\rightarrow k - \Delta \quad \text{com taxa } \frac{\gamma_-^h}{k - 1}, \Delta \in I_k\end{aligned}$$

Observamos que as Cadeias de Markov  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $S(t)$  são irredutíveis.

### Modelo 3: Regime de Baixa Liquidez

Para definir as taxas do regime de baixa liquidez fixamos as taxas de transição  $\alpha_-^h, \alpha_+^h, \beta_-^h, \beta_+^h, K_a, K_b$  que são números reais, positivos e  $\theta \in (0, 1)$ . Supomos que em algum momento a Cadeia de Markov esteja em algum estado  $(b, a) \in \mathbb{X}$ , as taxas de transição para a Cadeia de Markov  $\xi$  são definidas como:

$$\begin{aligned}\alpha_+(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\alpha_+^I}{(a-b)^{k_a}} \cdot \theta(1-\theta)^{\Delta-1}, & \text{se } \Delta \in N, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \alpha_-(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\alpha_+^I}{(a-b)^{k_a}} \cdot \frac{\theta(1-\theta)^{\Delta-1}}{1-(1-\theta)^{a-b-1}}, & \text{se } a - b > 1 \text{ para } \Delta \in I_{a-b}; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \beta_-(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\beta_-^I}{(a-b)^{k_b}} \cdot \theta(1-\theta)^{\Delta-1}, & \text{se } \Delta \in N, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \\ \beta_+(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\beta_+^I}{(a-b)^{k_b}} \cdot \frac{\theta(1-\theta)^{\Delta-1}}{1-(1-\theta)^{a-b-1}}, & \text{se } a - b > 1 \text{ para } \Delta \in I_{a-b}; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}\end{aligned}$$

A Cadeia de Markov em algum estado  $(b, a)$  pode ser descrita como

Com taxa  $\frac{\alpha_+^I}{(a-b)^{k_a}}$  a cadeia decide incrementar o preço ask de acordo com a distribuição geométrica com parametro  $\theta$ ;

Com taxa  $\frac{\alpha_-^I}{(a-b)^{k_a}}$  a cadeia decide decrementar o preço ask com parametro  $\theta$  que tem distribuição geométrica truncado e os valores  $I_{a-b} = (1, \dots, a - b - 1)$ ;

Com taxa  $\frac{\beta_-^I}{(a-b)^{k_b}}$  a cadeia decide decrementar o preço bid com parametro  $\theta$  que tem distribuição geométrica;

Com taxa  $\frac{\beta_+^I}{(a-b)^{k_b}}$  a cadeia decide incrementar o preço bid com parametro  $\theta$  que tem distribuição geométrica truncado e os valores  $I_{a-b} = (1, \dots, a - b - 1)$ .

Supomos que em algum momento a cadeia  $t$  esteja em algum estado  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
 k \rightarrow k + 1, \quad \text{com taxa} \quad & \left( \frac{\alpha_+^t}{k^{k_a}} + \frac{\beta_-^t}{k^{k_b}} \right) \cdot \theta(1 - \theta)^{\Delta-1}, \quad \text{para } \Delta \in \mathbb{N} \\
 k \rightarrow k - \Delta, \quad \text{com taxa} \quad & \left( \frac{\alpha_-^t}{k^{k_a}} + \frac{\beta_+^t}{k^{k_b}} \right) \cdot \frac{\theta(1 - \theta)^{\Delta-1}}{I - (1 - \theta)^{a-b-1}}, \quad \text{para } \Delta \in I_{a-b}
 \end{aligned}$$



## Capítulo 4

# Simulação de cadeias de Markov e verificação do fenômeno de difusão

### 4.1 Introdução

O objetivo principal desta seção, é estudar através de simulações computacionais o comportamento dos modelos apresentados no capítulo 2, que foram customizados através de Cadeias de Markov com tempo contínuo.

Para tal análise utilizaremos basicamente um conjunto de parâmetros fixados e variáveis iniciais com valores escolhidos aleatoriamente. Chamamos  $N$  o número máximo de simulações, onde  $N$  é igual a 40 mil repetições.  $M$  é a matriz com informações dos estados e tempos. O algoritmo utilizado para simular a Cadeia de Markov pode ser representado em 5 passos de acordo com o pseudocódigo:

---

**Algorithm 1** Simulação de Cadeia de Markov com tempo contínuo

---

- 1: Selecciona parâmetros
  - 2: Preenche linha  $i$  da matriz  $M$  de acordo com as condições iniciais
  - 3: **for all**  $i \in 1 : N$  **do**
  - 4:   Gera tempo que a cadeia fica no estado atual
  - 5:   Se  $i$  é diferente de  $N$ , gerar próximo estado
  - 6: **end for**
  - 7: Preenche linha  $i$  da matriz  $M$  de acordo estado atual
- 

### 4.2 Implementação em R

Funções utilizados na simulação:

- *SimulaModelo*: simula a cadeia de Markov correspondente a um dos três modelos, a partir dos parâmetros e condições iniciais dados. Ela simula o pro-

cesso indo de um estado para outro (gerando aleatoriamente os tempos exponenciais entre dois estados distintos), parando quando já tiver Nsim estados simulados. Durante este procedimento, a função armazena em uma matriz M os valores de b e a (nas duas primeiras colunas), assim como os tempos exponenciais (na terceira coluna), o intervalo de tempo em que a cadeia de Markov ficou em cada estado (quarta e quinta colunas) e o preço (valor médio de a e b) em cada intervalo (sexta coluna).

- *Preco*: recebe um vetor t de instantes de tempo e retorna o preço em cada um destes instantes (de acordo com a matriz M), utilizando-se da função linhas. Esta função, por sua vez, diz quais linhas da matriz M correspondem ao estado em que a cadeia de Markov se encontrava em cada um dos instantes de tempo listados no vetor t.

- *d*, *D* e *r*: calculam as funções de mesmo nome: *d* corresponde à média de  $(p_{t_i+l} - p_{t_i})$ , onde  $t_i = hi$  para algum  $h > 0$  dado (ou seja, os instantes  $t_i$  são igualmente espaçados) e  $l > 0$  é dado também, *D* é igual a  $d/l$ , enquanto que *r* é a média de  $(p_{t_i+l} - p_{t_i})\epsilon_t$ , onde  $\epsilon_t = 1$  ou  $-1$  dependendo se o valor de *b* aumentou ou não, respectivamente, do estado em que a cadeia estava em  $t_i$  para o próximo estado. O código se utiliza das funções *precos* e *linhas*, descritas anteriormente, para encontrar os valores de  $p_t$  e  $\epsilon_t$ .

- *GeraGrafico*: calcula o valor de  $f(M, l, h)$  para a sequência desejada de valores de *l* (de acordo com a função fornecida f e os valores fornecidos para M e h) e gera um gráfico com os valores calculados. A função também pode inserir a reta de regressão linear no gráfico (neste caso, os coeficientes da regressão são impressos na tela) e exportá-lo como imagem.

### 4.3 Resultado da Simulação

- Modelo 1: Regime Alta Liquidez Competitivo

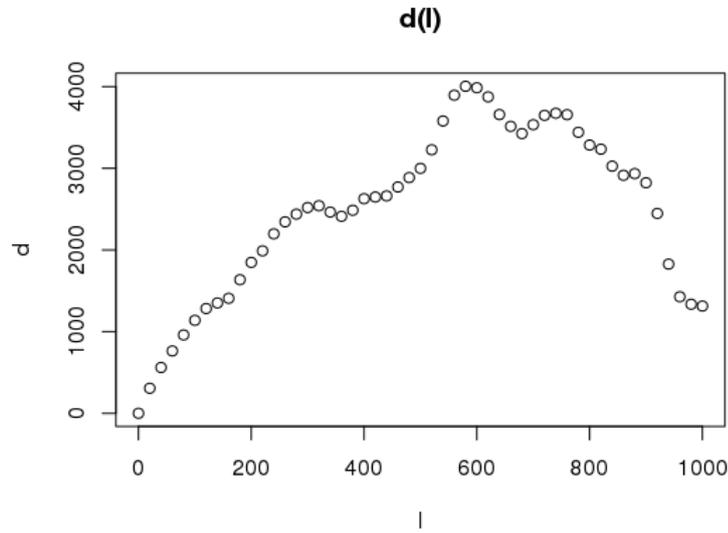


Figura 4.1: Efeito difusivo - Regime Alta Liquidez Competitivo

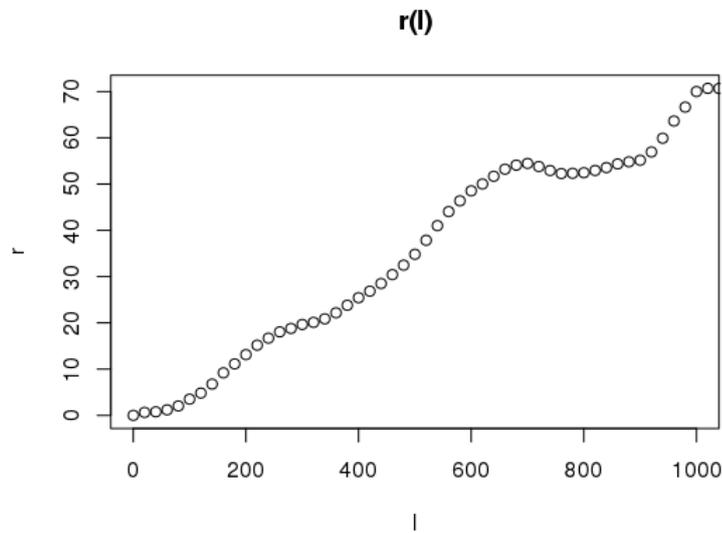


Figura 4.2: Função resposta - Regime Alta Liquidez Competitivo

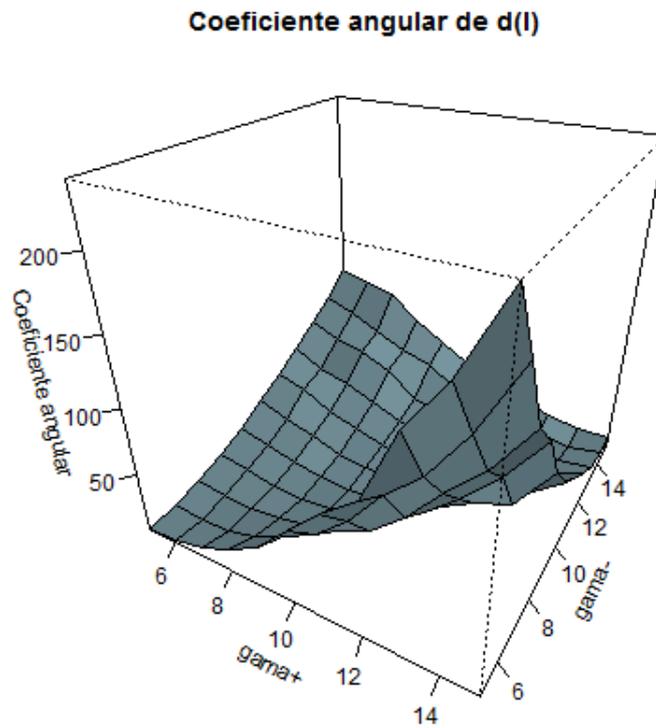


Figura 4.3: Coeficiente angular - Regime Alta Liquidez Competitivo

- Modelo 2: Alta Liquidez Não Competitivo

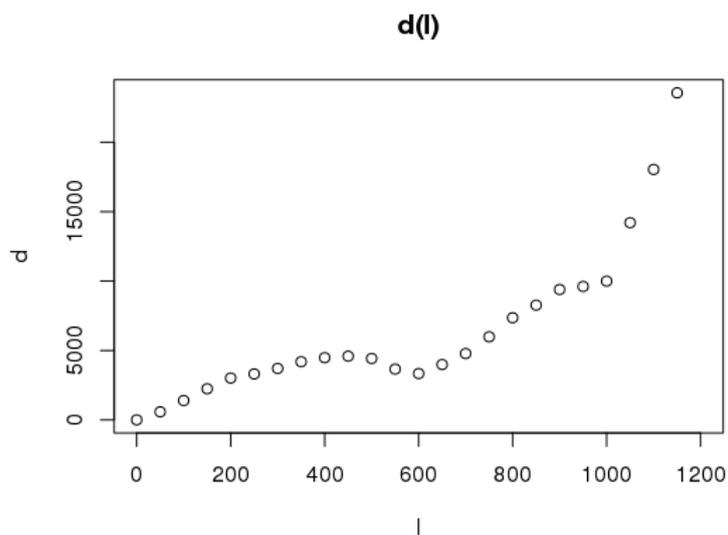


Figura 4.4: Efeito difusivo - Alta Liquidez Não Competitivo

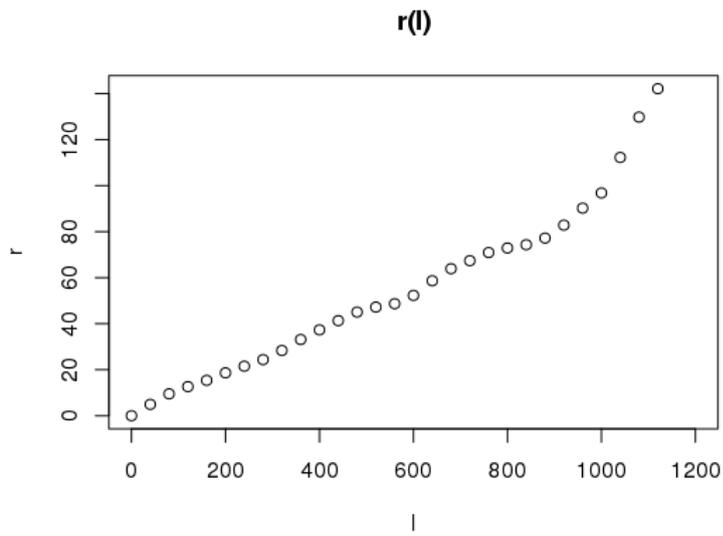


Figura 4.5: Função Resosta - Alta Liquidez Não Competitivo

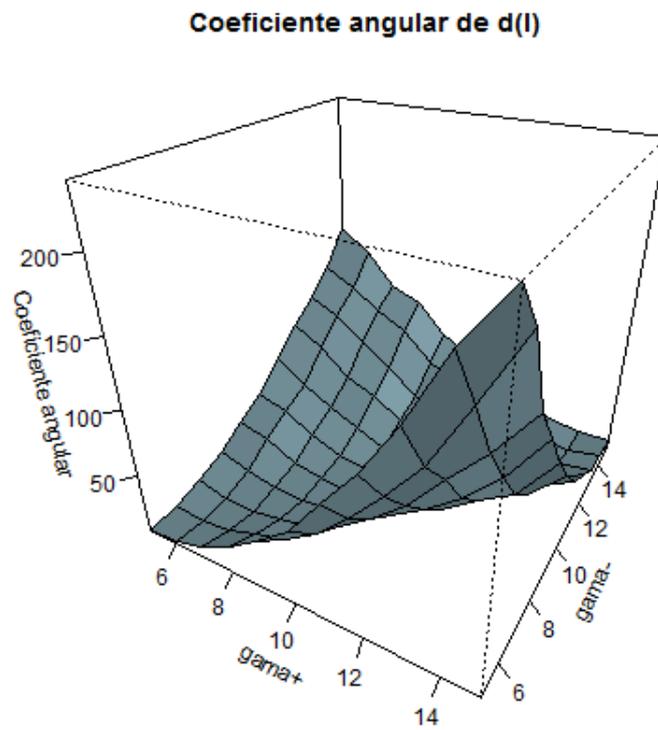
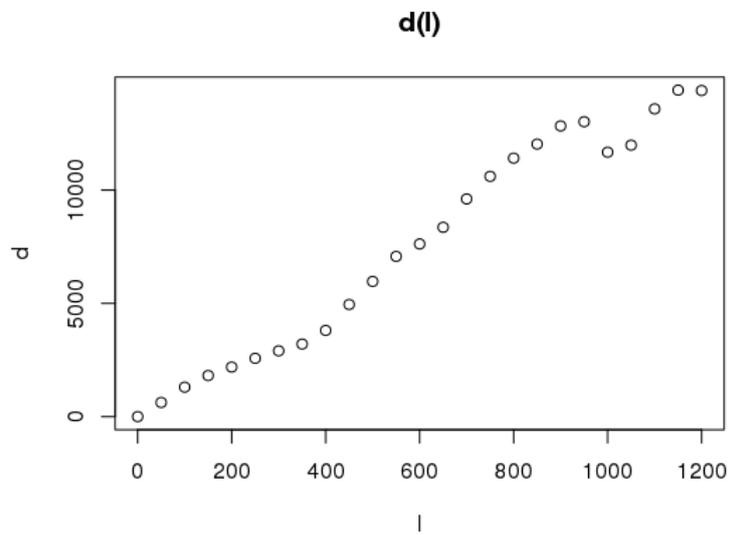
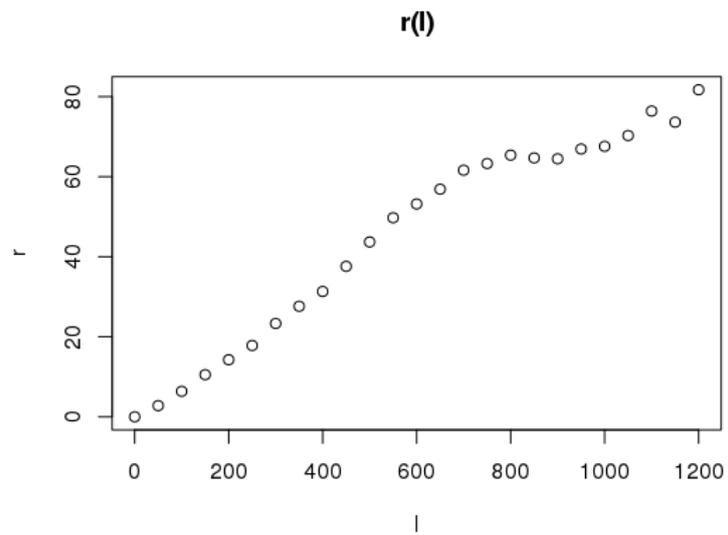


Figura 4.6: Coeficiente Angular - Alta Liquidez Não Competitivo

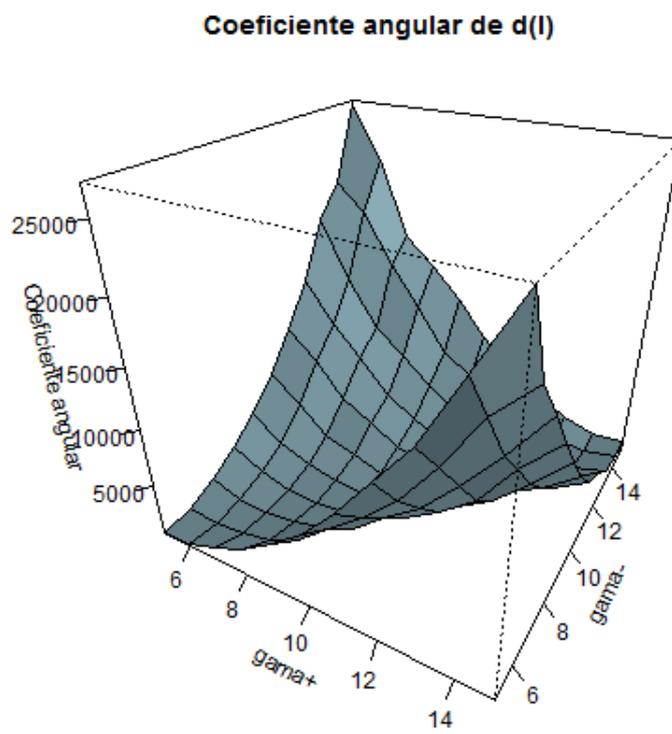
- Modelo 3: Baixa Liquidez Não Competitivo.



**Figura 4.7:** *Efeito difusivo - Baixa Liquidez Não Competitivo*



**Figura 4.8:** *Função resposta - Baixa Liquidez Não Competitivo*



**Figura 4.9:** *Coefficiente angular - Baixa Liquidez Não Competitivo*



## Capítulo 5

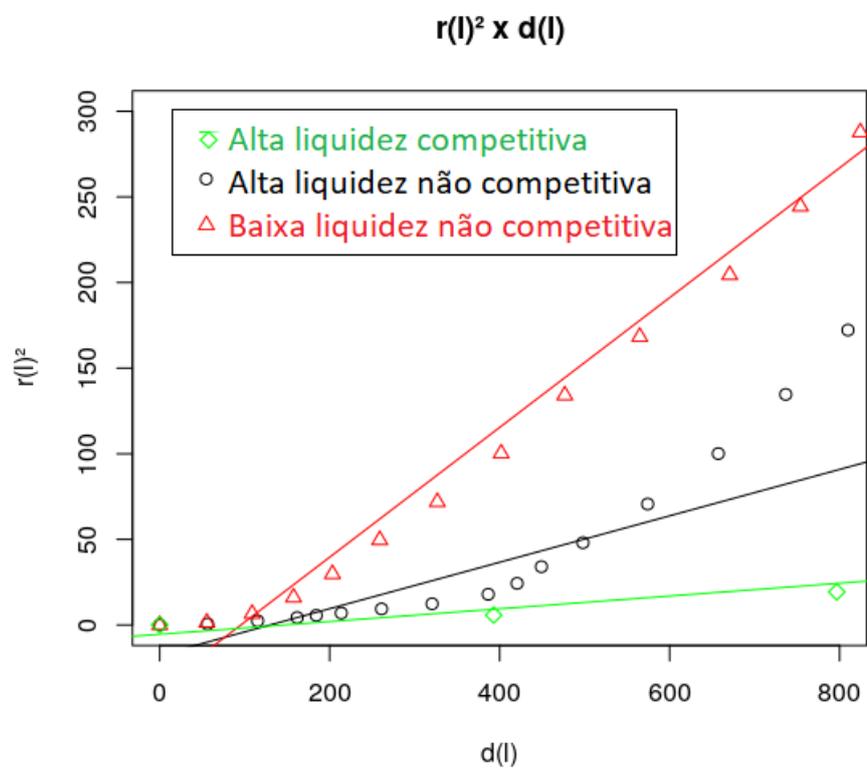
# Conclusão

O objetivo deste trabalho foi estudar detalhadamente as estatísticas das variações na dinâmica dos preços, cujo comportamento é altamente não trivial, e em grandes flutuações do spread para mercados com alta liquidez. Analisamos a interação entre o impacto de cada negociação nos preços e no spread e a partir de dados empíricos mostramos que o processo de formação dos preços está próximo de ser puramente difusivo.

Além de estudar estatisticamente o processo de formação dos preços e do spread, apresentamos modelos customizados através de cadeias de Markov para confirmar, através de simulações computacionais, se o fenômeno difusivo e a função resposta são verificados.

Conforme visto nos Resultados, podemos observar que para os modelos 1, 2 e 3 o fenômeno da difusão foi observado e de fato tem comportamento quase constante. Notamos que para alguns valores de  $l$ , ocorre uma diminuição lenta de  $D(l)/l$ , correspondendo a um rápido efeito de anti-persistência (ou sub-difusão).

Por fim, verificamos nos três modelos que existe uma relação linear entre difusão e resposta, como esperado. O modelo de Baixa Liquidez Não Competitiva teve o melhor desempenho.



**Figura 5.1:** *Relação difusão e respoa dos três modelos*

## Capítulo 6

# Lista de Abreviaturas

HFT Mercado de Alta Frequência (*High Frequency Trade*)

### 6.1 Anexo

**Teorema 2** *A cadeia de Markov  $S(t)$  é dita cadeia ergódica se e somente se existe uma função  $f(\alpha), \alpha \in \mathcal{A}$ , um inteiro  $\epsilon > 0$  e um conjunto finito  $A \in \mathcal{A}$  tal que*

$$\begin{aligned} E[f(\xi_{m+1}) - f(\xi_m) | \xi_m = \alpha_j] &\leq -\epsilon, \alpha_j \notin \mathcal{A}, \\ E[f(\xi_{m+1}) | \xi_m = \alpha_i] &< \infty, \alpha_i \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

**Prova 6.1.1** *Primeiro vamos provar que é suficiente. Seja  $\mathcal{F}_n$  o tempo de parada*

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1, \xi_n \in \mathcal{A} | \xi_0 = \alpha_i\}, \forall \alpha_i \in \mathcal{A}$$

*Supomos  $\alpha_i \notin \mathcal{A}$  e definimos  $\tilde{S}_n = f(\xi_n), S_n = S_{n \wedge \tau_i}$ . Reescrevendo de forma equivalente*

$$E[\tilde{S}_{m+1} - \tilde{S}_m | \xi = \alpha_j] \leq -\epsilon 1(\tau_j > m), \alpha_j \notin \mathcal{A}$$

*Sabendo que  $S(t)$  é irredutível, imediatamente*

$$E(\tau_i) \leq \frac{\alpha_i}{\epsilon}, \forall \alpha_i \notin \mathcal{A}$$

*Para qualquer  $\alpha_k \in \mathcal{A}$*

$$E(\tau_k) = \sum_{\alpha_i \in \mathcal{A}} p_{ki} + \sum_{\alpha_i \notin \mathcal{A}} p_{ki} E[\tau_i + 1]$$

$$= 1 + \sum_{\alpha_i \notin \mathcal{A}} p_{ki} E(\tau_i) \leq 1 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\alpha_i \notin \mathcal{A}} p_{ki} f(\alpha_i) \leq \infty$$

Logo, mostramos que, para todos os  $\alpha_k \in \mathcal{A}$ , o tempo médio de retorno ao conjunto finito  $\mathcal{A}$  é finito. Isto é equivalente a dizer que a cadeia  $S(t)$  é recorrente positiva, isso implica que, para um (e assim para todos)  $\alpha_k \in \mathcal{A}$ ,  $m_{\alpha_k \alpha_k} < \infty$ . Isso afirma a parte (se) do teorema. Para provar que é necessário, assumimos que  $S(t)$  é ergódica. Escolhendo  $\mathcal{A} = \{\alpha_0\}$ , onde  $\alpha_0$  é um estado fixado e definimos

$$\begin{cases} f(\alpha_i) = E(\tau_i), i > 0, \\ f(\alpha_0) = 0 \end{cases}$$

Facilmente podemos verificar que

$$E[f_{\xi_{m+1}} - f(\xi_m) | \xi_m = \alpha_i] = -1 \forall \alpha_i \neq \alpha_0$$

Reescrevendo o sistema de forma equivalente  $E(\tau_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} E(\tau_j) + 1, i \neq 0$ . Além disso, desde que  $m_{\alpha_0 \alpha_0} < \infty$ , também temos  $\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j} E(\tau_j) < \infty$  que é equivalente a  $S(t)$  ergódica. Como queríamos demonstrar.

# Lista de Figuras

2.1	Efeito difuso nas ações da Telecon-France. . . . .	13
2.2	Relação entre $D(l)xR(l)^2$ . . . . .	14
4.1	Efeito difusivo - Regime Alta Liquidez Competitivo . . . . .	25
4.2	Função resposta - Regime Alta Liquidez Competitivo . . . . .	25
4.3	Coefficiente angular - Regime Alta Liquidez Competitivo . . . . .	26
4.4	Efeito difusivo - Alta Liquidez Não Competitivo . . . . .	26
4.5	Função Resosta - Alta Liquidez Não Competitivo . . . . .	27
4.6	Coefficiente Angular - Alta Liquidez Não Competitivo . . . . .	27
4.7	Efeito difusivo - Baixa Liquidez Não Competitivo . . . . .	28
4.8	Função resposta - Baixa Liquidez Não Competitivo . . . . .	28
4.9	Coefficiente angular - Baixa Liquidez Não Competitivo . . . . .	29
5.1	Relação difusão e respota dos três modelos . . . . .	32



# Referências Bibliográficas

- [1] Brockwell, P.J., Gani, J., Resnick, S.I. (1982) Birth, immigration and catastrophe processes.
- [2] J. Doyne Farmer, Laszlo Gillemot, Fabrizio Lillo, Szabolcs Mike, Anindya Sen (2003) What really causes large price changes?
- [3] Jean-Philippe Bouchaud , Yuval Gefen , Marc Potters, Matthieu Wyart (2003) Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of ‘random’ price changes.
- [4] J.-P. Bouchaud, J. Kockelkoren, M. Potters (2004) Random walks, liquidity molasses and critical response in financial markets.

12, 14