

Sobre a Existência da Volta Ótima em Circuitos de Corrida

Trabalho de Conclusão de Curso

Aluno: Diego Dimambro Mucciolo
NºUSP 9073374

Orientador: Pedro Aladar Tonelli

15 de Fevereiro de 2019

Resumo

Inspirados pelo cálculo das variações e pela teoria do controle, modelamos qualitativamente a trajetória de um veículo ao longo de um circuito de corrida e demonstramos a existência de uma trajetória ótima que minimiza o tempo levado para completar uma volta periódica no circuito sob hipóteses moderadas.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Modelo	4
2.1	Definições da geometria diferencial	4
2.2	Circuito de corrida	5
2.2.1	Curva central à pista	5
2.2.2	Função largura	6
2.2.3	Exemplo	6
2.3	Sistema de coordenadas (LR)	7
2.4	Trajectoria	9
2.4.1	Trajectoria admissível	10
2.4.2	Veículo	11
2.4.3	Exemplo	13
3	Otimização	15
3.1	Trajectoria ótima	15
3.2	Existência	16
4	Conclusão	19
4.1	Prospecção de resultados futuros	19
5	Bibliografia	20

1 Introdução

No automobilismo há a meta-hipótese baseada em evidências experimentais de pilotos e engenheiros de que em toda pista de corrida existe uma trajetória ótima, uma trajetória que minimiza o tempo que se leva para percorrer a pista da linha de largada à linha de chegada. A motivação se encontra em investigar esta meta-hipótese sob o rigor matemático; rigor que na, já escassa e pratico-numérico enviesada, literatura especializada acerca do tema deixa a desejar.

Proporemos um modelo qualitativo razoável e um critério de otimalidade verossímil para as trajetórias de um veículo ao longo de um circuito de corrida que minimizam o tempo levado para completar uma volta periódica neste e demonstraremos a existência de uma trajetória ótima de acordo com o critério proposto.

Por modelo qualitativo entende-se aquele modelo em que se captura as propriedades abstratas essenciais e a relação entre elas sem se comprometer com seu aspecto quantitativo.

2 Modelo

Por simplicidade e suficiência, modelamos a trajetória e o circuito no plano bidimensional Euclidiano. No entanto, de modo mais geral estes poderiam ser representados respectivamente por uma subvariedade uni e bidimensional do \mathbb{R}^2 e o trabalho ser desenvolvido do mesmo modo, porém, isso tornaria a formalidade matemática do modelo mais pesada e ofuscaria a intuição.

O modelo apoia-se fortemente em conceitos da geometria diferencial e por isso iniciamos com a apresentação das definições necessárias para o seu desenvolvimento.

2.1 Definições da geometria diferencial

Curva planar. É qualquer função de um intervalo real fechado ao \mathbb{R}^2 . Como as curvas de interesse são exatamente as planares, nos referiremos à estas como apenas *curvas*. Usaremos a letra γ e t para denotarmos uma curva arbitrária e seu parâmetro, respectivamente. Além disso, consideraremos apenas as curvas com domínio limitado. Deste modo, as curvas de interesse são da forma

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$.

Curva fechada. É uma curva tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Curva de Jordan. É uma curva fechada, injetora no interior do seu domínio $]a, b[$.

Curva regular. É uma curva diferenciável tal que sua derivada nunca se anula.

Coordenadas de uma curva. As funções coordenadas em coordenadas retangulares de uma curva arbitrária serão denotadas por $(x(t), y(t)) = \gamma(t)$. Caso a curva esteja parametrizada por comprimento de arco, por motivos de ênfase, utilizaremos a variável s ao invés de t .

Rotação no plano. A transformação de rotação em duas dimensões em θ radianos no sentido anti-horário é definida por

$$\mathcal{R}(\theta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} x$$

Ângulo polar orientado. O ângulo polar orientado no de uma curva γ que nunca se anula é definido como

$$\theta(\gamma) : [a, b] \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : t \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right), & x(t) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Índice de enrolamento em torno da origem. O número de voltas com sinal ω que uma curva fechada diferenciável que nunca se anula $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dá em torno

da origem é definido por

$$\omega(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta(\gamma)'(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{\|\gamma(t)\|^2} dt$$

Aqui é importante observarmos que se γ é de Jordan, então $\omega(\gamma) \in \{-1, 0, 1\}$.

Tangente a uma curva. O vetor tangente a uma curva γ diferenciável em t é definido como

$$T(\gamma)(t) := \gamma'(t)$$

Normal a uma curva. O vetor normal a uma curva γ diferenciável em t é definido como

$$N(\gamma)(t) := \mathcal{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)(T(\gamma)(t)) = (-y'(t), x'(t))$$

Note que a tangente e a normal a uma curva parametrizada por comprimento de arco são unitárias.

Curvatura orientada. A curvatura orientada, ou simplesmente curvatura, de uma curva γ regular duas vezes diferenciável no instante t é definida por

$$\kappa(\gamma)(t) := \frac{\langle \gamma''(t), N(\gamma)(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

O sinal da curvatura orientada $\kappa(\gamma)(t)$ indica a direção em que o vetor tangente unitário rotaciona: se positivo, o vetor roda no sentido anti-horário, se negativo, no sentido horário; e seu valor absoluto indica a velocidade da rotação.

2.2 Circuito de corrida

Consideraremos apenas as pistas do tipo *circuito*, devido ao fato de serem mais restritivas em relação às pistas *ponto-a-ponto*; contudo, com pouco esforço o modelo a seguir pode ser modificado para também abranger as pistas *ponto-a-ponto*.

Um circuito de corrida é um par de funções (c_p, ρ) aonde c_p descreve a curva *central* à *pista* e $\rho(s)$ determina a largura (raio) da pista no ponto $c_p(s)$.

2.2.1 Curva central à pista

É uma curva de Jordan

$$c_p \in C^4([0, L], \mathbb{R}^2)$$

que nunca se anula, parametrizada por comprimento de arco e com $\omega(p) \neq 0$.

A *normal a pista* será denotada por N_p .

2.2.2 Função largura

É uma função

$$\rho \in C^4([0, L], \mathbb{R}_+)$$

tal que $\rho(0) = \rho(L)$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$, as curvas

$$\gamma_\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 : s \mapsto c_p(s) + ((1 - \alpha)\rho(s) - \alpha\rho(s)) N_p(s)$$

são de Jordan, disjuntas duas a duas e nunca se anulam, ou equivalentemente, se a homotopia

$$H : [0, 1] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\alpha, s) \mapsto \gamma_\alpha(s)$$

é injetora e nunca se anula.

Cada γ_α é como uma "trilha de autorama". Deste modo, a pista é particionada como um "autorama com infinitas trilhas".

Então, a pista como um subconjunto de \mathbb{R}^2 é a união das imagens de todas as curvas γ_α , isto é, o conjunto

$$\mathcal{P} := \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \gamma_\alpha \{[0, L]\}$$

Sentido da pista. Diremos que a pista tem sentido *anti-horário* se $\omega(p) > 0$ e *horário* se $\omega(p) < 0$.

2.2.3 Exemplo

Seja

$$c_p : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$$

Então

- c_p é de classe C^4
- para todo $s \in [0, 2\pi]$, $c_p(s) \neq 0$
- $c_p(0) = c_p(2\pi)$
- $\forall s_1, s_2 \in [0, 2\pi[, s_1 \neq s_2 \implies c_p(s_1) \neq c_p(s_2)$
- para todo $s \in [0, 2\pi]$, $\|c'_p(s)\| = 1$
- $\omega(c_p) = 1$

Logo, c_p é uma *curva central à pista* válida, aonde $L = 2\pi$.

Agora, seja

$$\rho : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}_+ : s \mapsto \frac{1}{2}$$

Então

- ρ é de classe C^4
- $\rho(0) = \rho(2\pi)$
- $\gamma_\alpha(s) = (\frac{1}{2} + \alpha)c_p(s)$ que são círculos distintos concêntricos na origem e portanto disjuntos

Logo, ρ é uma função largura. Logo, (c_p, ρ) é um circuito de corrida no sentido anti-horário.

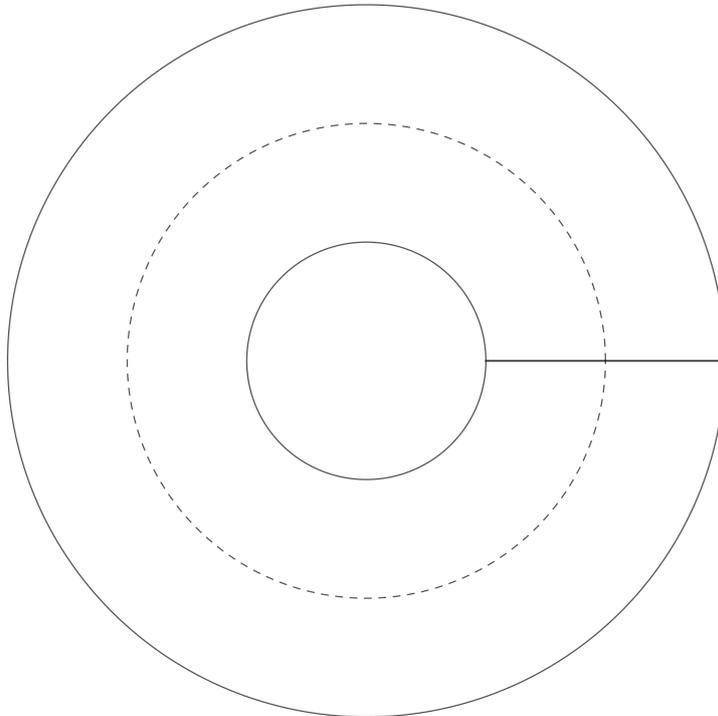


Figura 1: A linha pontilhada é c_p , o círculo interno γ_0 , o círculo externo γ_1 e o segmento de reta transversal aos círculos é a linha de chegada/partida.

2.3 Sistema de coordenadas (LR)

(Length-Radius)

Para construir o sistema de coordenadas que utilizaremos para especificar as trajetórias nós intuitivamente cortamos (matematicamente) a pista na linha de largada

e então retificamos a faixa resultante.

Para tanto, considere

$$\mathcal{S} := \bigcup_{s \in [0, L[} \{s\} \times [-\rho(s), \rho(s)]$$

Através de um ponto $(s, r) \in \mathcal{S}$ podemos identificar univocamente um ponto na pista de corrida do seguinte modo: associamos a s o ponto na curva central à pista $c_p(s)$ e a r associamos o deslocamento perpendicular em relação a pista $rN_p(s)$; então somando estes dois obtemos inequivocadamente um ponto na pista.

Agora considere

$$\mu^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (s, r) \mapsto (c_p + rN_p)(s)$$

e observe que a pista como subconjunto de \mathbb{R}^2 é a imagem da função de μ^* , isto é,

$$\mu^*(\mathcal{S}) = \mathcal{P}.$$

Estas coordenadas não só nos permite decompor o movimento do veículo de modo natural como também garante que uma função real

$$f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$$

com gráfico contido em $\overline{\mathcal{S}}$, efetivamente completa uma volta na pista, e no sentido correto, pois o índice de enrolamento de curvas de Jordan é homotópicamente invariante em conjunto conexos.

De fato, μ^* pode ser usada como uma mudança de coordenadas de classe C^3 pois seu diferencial

$$D\mu^* = \left[\begin{array}{cc} c'_p(s) + rN'_p(s) & N_p(s) \end{array} \right]$$

nunca se anula numa ε -vizinhança aberta de \mathcal{S} que não contém a origem e portanto é localmente um C^3 -difeomorfismo pelo teorema da função inversa, e é injetora, consequentemente bijetora. Logo, μ^* é um C^3 -difeomorfismo.

Como cada "trilha" da pista é fechada, podemos estender μ^* ao fecho de \mathcal{S} e portanto doravante vamos considerar μ a extensão de μ^* a $\overline{\mathcal{S}}$.

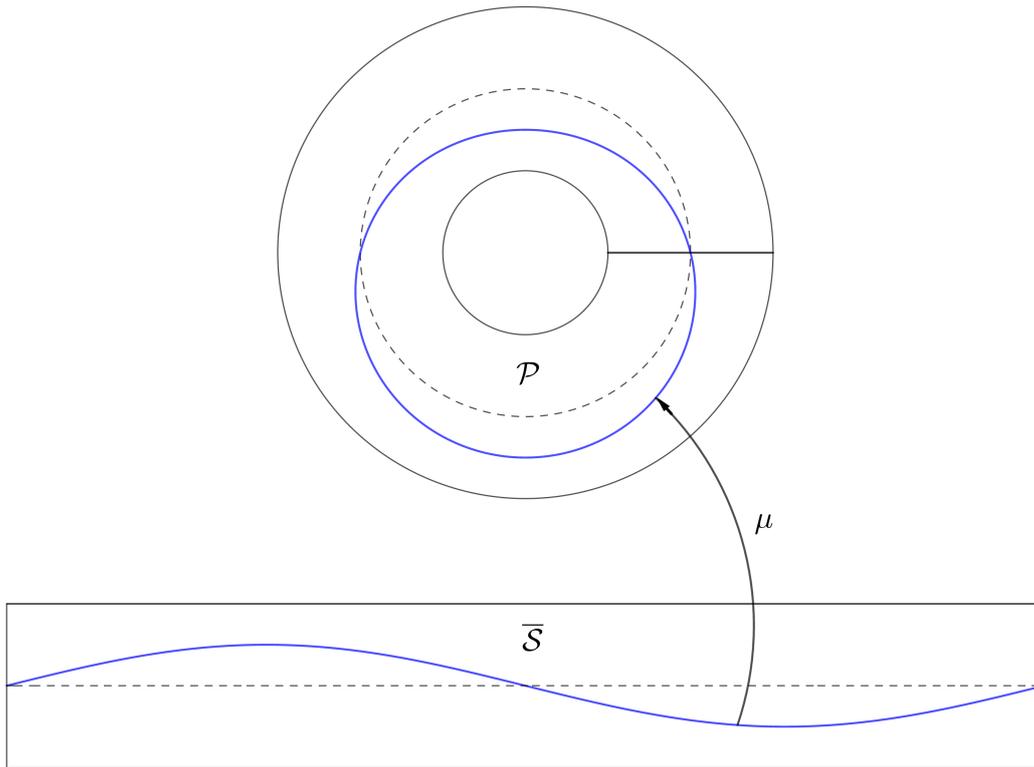


Figura 2: A imagem de uma função em $\bar{\mathcal{S}}$ por μ .

Note que a imagem de uma curva por μ tem sua velocidade e aceleração alteradas, sendo preservada apenas sua curvatura. Portanto usaremos μ somente para recuperarmos a verdadeira posição do veículo na pista e a verdadeira curvatura de sua trajetória.

2.4 Trajetória

Neste trabalho, consideraremos apenas as trajetórias periódicas de um único veículo na pista, não levando em conta as possíveis exceções que possam ocorrer durante uma corrida e também a presença de qualquer outro veículo ou obstáculo.

Utilizaremos o conjunto $\bar{\mathcal{S}}$ para descrevermos uma trajetória admissível e utilizaremos μ para recuperar sua posição e curvatura original.

A trajetória admissível será construída da seguinte forma

1. Começamos com uma função

$$\psi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$$

com gráfico contido em $\bar{\mathcal{S}}$, que definirá o formato da trajetória através da especificação do desvio da curva central da pista, ou seja, definindo o "trilho do autorama".

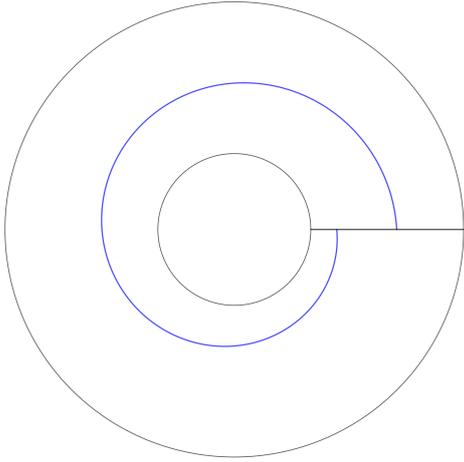


Figura 3: Volta aberta.

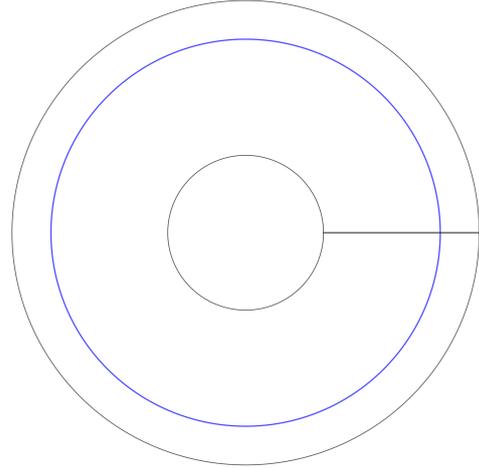


Figura 4: Volta periódica.

2. Então consideramos a sua representação em curva

$$s \mapsto (s, \psi(s))$$

e a reparametrizamos preservando a orientação por

$$\varphi : [0, L] \rightarrow [0, L]$$

responsável por definir o perfil de deslocamento, velocidade e aceleração através do trilho definido por ψ , assim obtendo a função

$$(\varphi, \psi \circ \varphi)$$

3. Por fim, damos o tempo a volta $T \in \mathbb{R}_+$ fazendo outra reparametrização positiva

$$\tau : [0, T] \rightarrow [0, L] : t \mapsto \frac{t}{T}L$$

chegando ao formato desejado da trajetória

$$(\varphi \circ \tau, \psi \circ \varphi \circ \tau)$$

o qual nos permite um controle fino e intuitivo da mesma.

Deste modo, o movimento ao longo da curva central à pista (longitudinal) da trajetória será controlado através da função $\varphi \circ \tau$ e o movimento ao longo da normal à curva central (transversal) por ψ .

2.4.1 Trajetória admissível

Uma trajetória admissível no circuito é então uma curva da forma

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{\mathcal{S}} : t \mapsto \left(\varphi \left(\frac{t}{T}L \right), \psi \circ \varphi \left(\frac{t}{T}L \right) \right) \quad (1)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\varphi \in C^3([0, L], [0, L])$
Controla o perfil de deslocamento em relação ao comprimento da pista.
- (ii) φ crescente
Pois queremos percorrer a pista no seu sentido.
Observe que como $\varphi' > 0$, a curva γ é regular.
- (iii) $\psi \in C^3([0, L], \mathbb{R})$
Controla o desvio da curva central à pista.
- (iv) $\forall s \in [0, L], -\rho(s) \leq \psi(s) \leq \rho(s)$
Limita a trajetória à pista.
- (v) $\forall n \in \{0, 1, 2, 3\}, \gamma^{(n)}(0) = \gamma^{(n)}(T)$
Condição de bordo para que a volta seja periódica, isto é, o estado inicial e o final devem ser o mesmo.

Às derivadas de φ e ψ podem ser atribuídas sentidos físicos

k	$\varphi^{(k)}$	$\psi^{(k)}$
0	posição em relação ao comprimento da pista	posição perpendicular à pista
1	velocidade tangencial	velocidade perpendicular
2	aceleração tangencial	aceleração perpendicular
3	relacionada aos pedais do veículo	relacionada ao volante do veículo

2.4.2 Veículo

O veículo é considerado um sistema isolado, sem dissipação energética devido a interação exterior, tendo sua energia alterada apenas através da sua própria aceleração. Também é assumido que seus pneus possuem aderência infinita, isto é, nunca deslizam ou perdem contato com a pista.

O veículo, representado pelo ponto que percorre o traço de uma curva admissível, também impõe restrições nas trajetórias admissíveis:

- (vi) *Velocidade escalar.*

$$\frac{v_{\min}}{T} \leq \varphi' \leq v_{\max}$$

para $v_{\min}, v_{\max} \in \mathbb{R}_+$ com $v_{\min} \leq v_{\max}$.

Modela o limite de velocidade máxima do veículo. Limita a velocidade longitudinal e estabelece a relação fundamental do tempo da volta T e sua velocidade φ' . Note que

$$\frac{v_{\min}}{v_{\max}} \leq T$$

Além disso, também limitamos superiormente T :

- (vii)

$$T \leq \frac{v_{\max}}{v_{\min}}$$

de modo que o conjunto das curvas admissíveis nunca seja vazio. Note que isto implica em

$$\frac{v_{\min}^2}{v_{\max}} \leq \varphi'$$

(viii) *Curvatura.*

$$|\kappa \circ \mu \circ \gamma| \leq \mathcal{K} \circ \varphi' \circ \tau$$

para algum $\mathcal{K} \in C^0\left(\left[\frac{v_{\min}^2}{v_{\max}}, v_{\max}\right], \mathbb{R}_+\right)$ não-crescente tal que

$$\mathcal{K}(0) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma_3} \left(\max_{t \in [0, T]} |\kappa \circ \mu \circ \gamma(t)| \right)$$

Modela o ângulo máximo de viragem por velocidade do veículo.

Se a função \mathcal{K} não satisfizer esta última desigualdade então o conjunto das curvas admissíveis será vazio.

Observe que esta condição restringe as funções ψ' e ψ'' .

(ix) *Aceleração escalar.*

$$a_i \circ (\varphi' \circ \tau, |\kappa \circ \mu \circ \gamma|) \leq \varphi'' \circ \tau \leq a_s \circ (\varphi' \circ \tau, |\kappa \circ \mu \circ \gamma|)$$

onde

$$a_i \in C\left(\left[\frac{v_{\min}^2}{v_{\max}}, v_{\max}\right] \times [0, \mathcal{K}(0)], \mathbb{R}_-\right)$$

não-crescente na velocidade e não-decrescente na curvatura, limita a aceleração *inferiormente*, isto é, limita a frenagem do veículo, e

$$a_s \in C\left(\left[\frac{v_{\min}^2}{v_{\max}}, v_{\max}\right] \times [0, \mathcal{K}(0)], \mathbb{R}_+\right)$$

não-crescente em ambas variáveis com $a_s(v_{\max}, k) = 0$, limita *superiormente*.

Modela o fato da aceleração máxima permitida ao veículo ser dependente da velocidade atual do veículo e da sua curvatura.

(x) $|\varphi^{(3)}| \leq \ell_\varphi$ para algum $\ell_\varphi \in \mathbb{R}_+$

Pode ser interpretado como o limitante físico na velocidade de variação dos pedais do veículo.

(xi) $|\psi^{(3)}| \leq \ell_\psi$ para algum $\ell_\psi \in \mathbb{R}_+$

Pode ser interpretado como o limitante físico na velocidade de variação do volante do veículo.

Então, uma trajetória admissível fica inequivocamente definida por uma tripla (T, φ, ψ) no espaço

$$\mathcal{E}_3 := \left[\frac{v_{\min}}{v_{\max}}, \frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right] \times C^3([0, L], [0, L]) \times C^3([0, L], \mathbb{R})$$

satisfazendo as propriedades acima.

Uma curva $\gamma \in \mathcal{E}_3$ que satisfaz as propriedades (i)-(x) será referida como uma trajetória C^3 -admissível, devido ao seu nível de diferenciabilidade, e o conjunto das funções C^3 -admissíveis será denotado por Γ_3 . Esta distinção do nível de diferenciabilidade é crucial, como será percebido mais adiante.

Quando γ é uma curva admissível, abusaremos da notação γ para nos referirmos indiscriminadamente a sua representação em tripla ou em curva vide (1) de acordo com o contexto.

2.4.3 Exemplo

Considere a restrição de velocidade

$$v_{\min} = 1 \text{ e } v_{\max} = 10$$

de curvatura

$$\mathcal{K} : \left[\frac{v_{\min}^2}{v_{\max}}, v_{\max} \right] \rightarrow \mathbb{R}_+ : v \mapsto \frac{5}{2} \frac{v_{\max}}{v_{\min}^2 - v_{\max}^2} v + 3$$

de aceleração

$$a_i : \left[\frac{v_{\min}^2}{v_{\max}}, v_{\max} \right] \times [0, c(0)] \rightarrow \mathbb{R}_- : (v, k) \mapsto -3$$

$$a_s : \left[\frac{v_{\min}^2}{v_{\max}}, v_{\max} \right] \times [0, \mathcal{K}(0)] \rightarrow \mathbb{R}_+ : (v, k) \mapsto \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}^2 - v_{\max}^2} v + 1 \right) (\mathcal{K}(0) - k)$$

de terceiras derivadas

$$\ell_\varphi = 2 \text{ e } \ell_\psi = 1$$

e a tripla

$$T = 1$$

$$\varphi : [0, L] \rightarrow [0, L] : t \mapsto t$$

$$\psi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \frac{1}{2} \sin(s)$$

Claramente (T, φ, ψ) satisfaz todas as condições de uma trajetória admissível com exceção de (ix) que requer a observação adicional de que

$$\max_{t \in [0, T]} |\kappa \circ \mu \circ \gamma(t)| \approx 1.04 \leq 1.4 \approx \min_{t \in [0, T]} \mathcal{K}(\varphi'(t))$$

Logo (T, φ, ψ) compõe uma trajetória admissível γ .

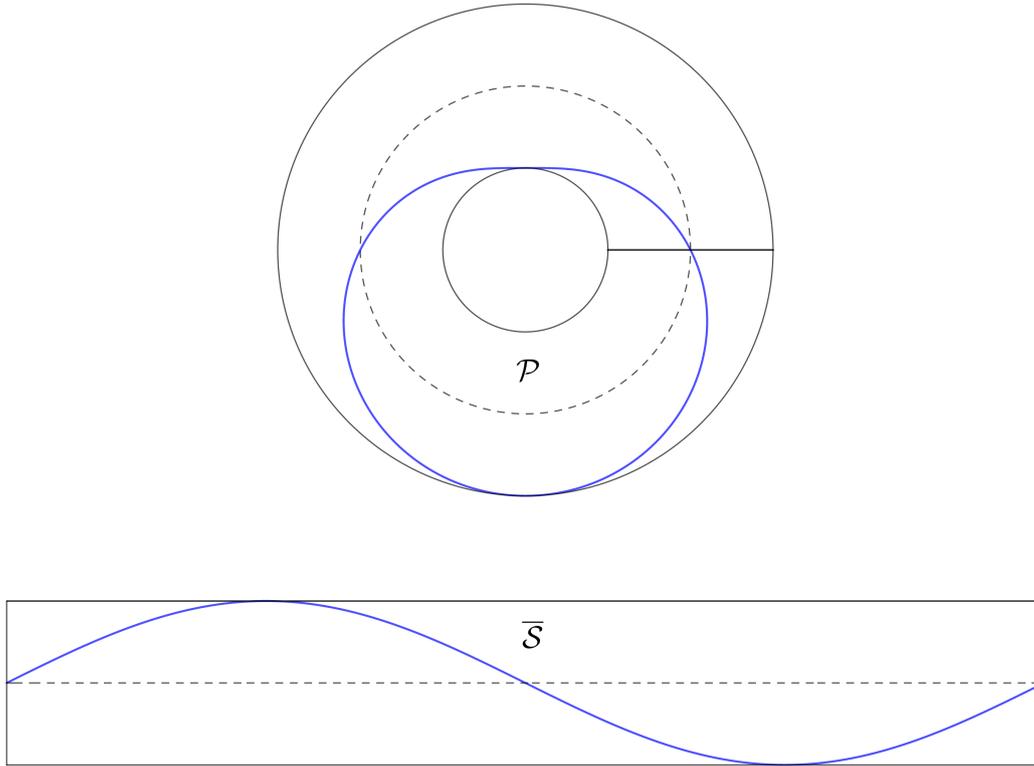


Figura 5: A trajetória de γ em $\bar{\mathcal{S}}$ e sua correspondente $\mu \circ \gamma$ em \mathcal{P} .

3 Otimização

3.1 Trajetória ótima

Como uma função C^2 já possui regularidade suficiente – posição, velocidade e aceleração – para se reconstruir a trajetória do veículo na prática, não consideramos necessário exigir que uma trajetória que minimiza o tempo de volta seja C^3 . Portanto, vamos admitir que uma trajetória ótima possa ser composta por φ e ψ de classe C^2 satisfazendo (v) até a segunda derivada e descartando (x) e (xi). Vamos chamar tal trajetória de uma trajetória C^2 -admissível e denotar seu conjunto por Γ_2 .

Nas coordenadas (LR), completar uma volta é ir do "bordo esquerdo"

$$\{0\} \times [-\rho(0), \rho(0)]$$

ao "bordo direito"

$$\{L\} \times [-\rho(L), \rho(L)].$$

Seguindo a intuição, propomos que a curva que minimiza o tempo de uma volta é a mesma que simultaneamente minimiza a distância percorrida

$$\int_0^T \|(\mu \circ \gamma)'(t)\| dt \quad (2)$$

minimiza a curvatura absoluta total

$$\int_0^T |\kappa \circ \mu \circ \gamma(t)| dt \quad (3)$$

e maximiza a velocidade escalar média

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi' \left(\frac{t}{T} L \right) dt \quad (4)$$

Para otimizá-las simultaneamente consideramos minimizar a função da sua soma

$$J : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R} : \gamma \mapsto \int_0^T \left(\|(\mu \circ \gamma)'(t)\| + |\kappa \circ \mu \circ \gamma(t)| - \frac{1}{T} \varphi' \left(\frac{t}{T} L \right) \right) dt \quad (5)$$

E então, diremos que uma curva $\gamma \in \Gamma_2$ é uma **trajetória ótima** se

$$J(\gamma) = \inf_{x \in \Gamma_3} J(x)$$

Repare que uma trajetória C^3 -admissível também é C^2 -admissível.

3.2 Existência

Para discutirmos a existência de uma trajetória ótima vamos atribuir uma topologia ao conjunto

$$\mathcal{E}_2 := \left[\frac{v_{\min}}{v_{\max}}, \frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right] \times C^2([0, L], [0, L]) \times C^2([0, L], \mathbb{R})$$

Em \mathbb{R} vamos considerar a norma Euclidiana $|\cdot|$. Já nos espaços funcionais C^2 vamos considerar as normas da convergência uniforme (norma do supremo), respectivamente

$$\|\varphi_0\|_\varphi = \sum_{n=0}^2 \sup_{t \in [0, L]} |\varphi_0^{(n)}(t)|$$

$$\|\psi_0\|_\psi = \sum_{n=0}^2 \sup_{s \in [0, L]} |\psi_0^{(n)}(s)|$$

Assim, os espaços vetoriais normados

$$(\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$(C^2([0, L], [0, L]), \|\cdot\|_\varphi)$$

$$(C^2([0, L], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\psi)$$

são espaços de Banach.

Logo, equipando \mathcal{E}_2 com a norma das somas

$$\|\cdot\|_2 = |\cdot| \oplus \|\cdot\|_\varphi \oplus \|\cdot\|_\psi$$

faz de

$$(\mathcal{E}_2, \|\cdot\|_2)$$

também um espaço de Banach. Consequentemente induzindo um espaço métrico completo

$$X := (\mathcal{E}_2, d_2)$$

onde d_2 é a métrica induzida por $\|\cdot\|_2$. Deste modo, consideraremos a topologia induzida por d_2 em \mathcal{E}_2 .

Teorema. *J atinge mínimo em $\overline{\Gamma_3}$.*

Vamos dividir este teorema nos seguintes lemas:

Lema 1. *Γ_3 é relativamente compacto em X .*

Lema 2. *J é contínua.*

Demonstração do Lema 1. Seja $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} = (T_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em Γ_3 .

Claramente T_n possui uma subsequência convergente pois é limitada por definição. Então precisamos provar que também é possível obter subsequências convergentes de φ_n e ψ_n . Assim basta nós "encaixarmos" as subsequências convergentes extraído de γ_n uma subsequência convergente de T_n : γ_{n_i} , depois extraímos uma subsequência convergente de φ_{n_i} , obtendo $\gamma_{n_{i_j}}$, e finalmente extraímos uma subsequência convergente de $\psi_{n_{i_j}}$, assim obtendo uma subsequência convergente da tripla $\gamma_{n_{i_j k}}$.

A fim de usarmos o teorema de Arzelà-Ascoli, mostraremos que γ_n é uniformemente limitada e uniformemente equicontínua. Para isso, primeiros observamos que de (x) e (xi) segue que ambas sequências $\varphi_n^{(k)}$ e $\psi_n^{(k)}$ para $k \in \{0, 1, 2\}$ são uniformemente limitadas porque pelo teorema fundamental do cálculo tem-se

$$\varphi^{(k)}(t) = \varphi^{(k+1)}(0) + \int_0^t \varphi^{(k+1)}(u) ds$$

e portanto

$$|\varphi''| \leq (1 + L)\ell_\varphi$$

o que implica em

$$|\varphi'| \leq (1 + L)^2 \ell_\varphi$$

O argumento para ψ é análogo.

Agora, considere M_k o limite superior da k -ésima derivada como acima. Então, pelo teorema do valor médio temos

$$|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi_n^{(k)}(y)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |\varphi_n^{(k+1)}(t)| |x - y| \leq M_k |x - y|$$

donde segue que $\varphi_n^{(k)}$ é uniformemente equicontínua. O argumento para ψ é novamente análogo. Logo, pelo teorema de Arzelà-Ascoli segue que φ_n e ψ_n possuem subsequência convergente nos seus respectivos espaços. Logo γ_n possui subsequência convergente em X .

Para mostrar que o limite γ_n está em Γ_2 basta trivialmente passarmos ao limite todas suas propriedades com exceção de (viii) e (ix) que requer um pouco mais de trabalho mas basta vermos que κ é contínua. Olhando para sua definição, temos

$$\frac{\langle \gamma''(t), N(\gamma)(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2}$$

Como a divisão, o produto interno, a rotação no plano e os operadores que levam uma função à sua primeira derivada e à sua segunda derivada sob a norma da convergência uniforme são funções contínuas, então κ é também contínua.

(Este argumento também mostra que Γ_2 é fechado em X .)

Logo, $\overline{\Gamma_3}$ é compacto em X . ■

Demonstração do Lema 2.

Para mostrar que J é contínua basta mostrar que

$$A(\gamma) := \int_0^T \|(\mu \circ \gamma)'(t)\| dt$$

$$B(\gamma) := \int_0^T |\kappa \circ \mu \circ \gamma(t)| dt$$

$$C(\gamma) := \frac{1}{T} \int_0^T \varphi' \left(\frac{t}{T} L \right) dt$$

são contínuas. Usando o teorema da mudança de variáveis podemos escrever

$$A(\gamma) = \frac{T}{L} \int_0^L \|(\mu \circ (\varphi, \psi))'(t)\| dt$$

$$B(\gamma) = \frac{T}{L} \int_0^L |\kappa \circ \mu \circ (\varphi, \psi)(t)| dt$$

$$C(\gamma) = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi'(t) dt$$

Como o domínio de integração é compacto e os integrandos contínuos, então estes são dominados pelo seu próprio máximo no conjunto $[0, L]$. Logo, pelo teorema da convergência dominada, o limite comuta com a integração.

Agora, como os integrandos são composições de funções contínuas em X então o limite comuta com a aplicação das funções componentes.

Logo, A , B e C são contínuas e consequentemente J é contínua. ■

Aqui é de extrema importância ressaltar que a escolha do minimizando, o qual seu mínimo representa adequadamente uma volta com tempo mínimo é fundamental, pois uma vez que o domínio de interesse já é compacto, qualquer funcional contínuo atinge seus extremos.

4 Conclusão

Demonstração do Teorema. Como toda função contínua em um conjunto compacto atinge seu mínimo,

$$\overline{\Gamma_3} \subset \overline{\Gamma_2} = \Gamma_2$$

e

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_3} J(\gamma) \in J(\overline{\Gamma_3})$$

então existe pelo menos uma trajetória ótima. ■

É interessante observar que isto implica que é possível construir uma sequência de curvas C^3 -admissíveis convergente para uma trajetória ótima.

À parte, apesar de nada ter sido indagado sobre a unicidade das trajetórias ótimas até o momento, é relevante observar que do ponto de vista prático, é interessante e esperado que hajam diversas trajetórias ótimas, pois assim o piloto tem a liberdade de escolher a mais adequada ao veículo e estilo de pilotagem.

4.1 Prospecção de resultados futuros

Listemos alguns modos de como este trabalho pode ser estendido para um trabalho de pós-graduação.

- Construir explicitamente uma sequência minimizadora de J .
- Investigar a unicidade da trajetória ótima.
- Aprimorar o modelo, como por exemplo, adicionando campos escalares representando altura, atrito do solo e torção tridimensional à pista, e modelando a dissipação de energia ao veículo.
- Verificar a possibilidade de enfraquecer as hipóteses.
- Generalizar o modelo para subvariedades do \mathbb{R}^2 .
- Generalizar resultado para n dimensões.

5 Bibliografia

- D. Casanova. *On Minimum Time Vehicle Manoeuvring: The Theoretical Optimal Lap*. PhD thesis, School of Mechanical Engineering of Cranfield University, 2000.
- Ward Cheney. *Analysis for Applied Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2001.
- I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of Variations*. Dover Publications, 2000.
- Walcy Santos Hilário Alencar. *Mini-curso de Geometria Diferencial*. 24º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2003.
- Daniel Liberzon. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton University Press, 2012.