

**A Transição de Fase para os Modelos de Ising
e de Potts na Árvore de Cayley**

João Vitor Teixeira Maia

Programa: Bacharelado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bissacot

São Paulo, Novembro de 2018

A Transição de Fase para os Modelos de Ising e de Potts na Árvore de Cayley

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo
candidato João Vitor Teixeira Maia, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Resumo

Maia, J. V. **A Transição de Fase para os Modelos de Ising e de Potts na Árvore de Cayley**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

O objetivo deste trabalho é caracterizar a transição de fase para os modelos de Ising e de Potts na árvore de Cayley. Inicialmente, definimos as medidas de Gibbs (DLR) e enunciamos alguns teoremas importantes e conhecidos. Depois, seguindo [1], mostraremos que para os modelos de interesse todas as medidas de Gibbs extremas são cadeias de Markov e assim conseguiremos definir as medidas extremas em função do que chamaremos de leis de fronteira. Usando esses resultados iremos mostrar os valores da constante de acoplamento $J > 0$ e campo externo $h \in \mathbb{R}$ para os quais existe a transição de fase no modelo de Ising, mais ainda, caracterizaremos totalmente o conjunto das medidas de Gibbs extremas invariante por translação. Por último, seguindo [2, 3], assumindo campo externo nulo mostraremos para quais temperaturas o modelo de Potts apresenta transição de fase.

Palavras-chave: Árvore de Cayley, Modelo de Ising, Modelo de Potts, Transição de Fase, Cadeias de Markov.

Abstract

MAIA, J. V. **Phase Transition for the Ising and Potts models on the Cayley Tree**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

The aim of this work is to characterize the phase transition region for the Ising and Potts models on the Cayley Tree. We begin by defining the (DLR) Gibbs measures and presenting some known and important theorems about them. After that, following [1], we show that, for the models we're interested in, all the extremal Gibbs measures are Markov Chains and then we are able to define these measures by what we'll call a boundary law. Using these properties, we'll express the values of the interaction $J > 0$ and the external field $h \in \mathbb{R}$ such that there is phase transition for the Ising model. Moreover, we'll fully characterize the set of translation invariant extremal Gibbs measures. Lastly, following [2, 3], assuming a null external field we show for which temperatures occurs phase transition for the Potts model on the Cayley tree.

Keywords: Cayley Tree, Ising Model, Potts Model, Phase Transition, Markov Chains.

Conteúdo

1	Medidas de Gibbs	3
1.1	Modelos de Spin	3
1.2	Especificação Gibbsiana	5
2	Cadeias de Markov na árvore de Cayley	13
2.1	Cadeias de Markov e as Medidas de Gibbs	13
2.2	Transição de fase para o Modelo de Ising	23
3	Cadeias de Markov Invariantes por Translação para o Modelo de Potts	31
3.1	Leis de Fronteira do Modelo de Potts	31
3.2	Medidas Invariantes para o Modelo de Potts	33
A	Teorema de Extensão de Kolmogorov	43
A.0.1	Aplicação	47

Introdução

A Mecânica Estatística é o ramo da física que tenta explicar o comportamento de objetos macroscópicos baseando-se em seu comportamento microscópico. Um exemplo de objeto de estudo são os metais ferromagnéticos. Podemos imaginar um metal ferromagnético, o ferro por exemplo, como uma coleção de átomos dispostos em uma rede onde cada um desses átomos possui um momento magnético, o spin. A orientação dos spins é aleatória, mas certamente não é independente, ela está sujeita a influência da interação spin-spin que favorece o alinhamento de spins vizinhos à mesma direção. É essa interação microscópica que dita o comportamento macroscópico do metal, a existência ou não da magnetização espontânea. Sobre esse objeto podemos inserir um campo externo que age sobre este metal influenciando os spins a se alinharem em uma determinada direção.

Uma pergunta natural é: ao introduzir um campo externo, os spins sempre se alinham na direção do campo? Mesmo quando a intensidade do campo é pequena, o objeto ainda sente sua influência? Neste trabalho, tentaremos responder à estas perguntas quando consideramos que os átomos do sistema estão dispostos em um grafo regular, a árvore de Cayley, quando a interação dos spins é dada pelo modelo de Ising e quando é dada pelo modelo de Potts.

Apesar de as fundações da mecânica estatística datarem do século XIX, o estudo rigoroso dos sistemas infinitos se iniciou apenas no final dos anos 60 com os trabalhos de Dobrusin, Lanford e Ruelle, que introduziram o conceito básico de medidas de Gibbs. Com essa noção, podemos traduzir os fenômenos de transição de fase como a existência de mais de uma medida de Gibbs. No segundo capítulo iremos introduzir o formalismo matemático que permite a construção dessas medidas e mostrar também como os modelos de Ising e de Potts podem ser descritos usando esse formalismo.

O principal modelo da mecânica estatística, que descreve justamente os metais ferromagnéticos, é o Modelo de Ising, introduzido por Lenz em 1920 e estudado por Ising em 1925 [4]. Nele, assumimos que os spins podem assumir duas direções $\{-1, +1\}$. Já o modelo de Potts, introduzido por Renfrey Potts em 1951, é uma generalização do modelo de Ising onde agora assumimos que os spins assumem q diferentes posições $\{1, \dots, q\}$. Dedicaremos o primeiro capítulo deste trabalho a definir estes modelos e o conjunto das medidas de Gibbs. Enunciaremos alguns resultados importantes, em especial resultados considerando a presença de um campo externo não nulo.

Como o conjunto das medidas de Gibbs é convexo, provar que existe mais de uma medida é provar que existe mais de um ponto extremal no conjunto. Para mostrar a existência de mais de um desses pontos, seguindo [1], iremos introduzir o conceito de cadeias de Markov e mostrar que tanto o modelo de Ising quanto o de Potts na árvore podem ser visto como cadeias de Markov e com isso conseguiremos mostrar a existência de um campo crítico para o modelo de Ising na árvore de Cayley fixados a temperatura e a constante de acoplamento. Isso será feito no segundo capítulo.

Finalmente, no último capítulo, demonstraremos a existência de transição de fase para o modelo de Potts sem campo externo conforme [2, 3]. Levantamos então a pergunta: para o modelo de Potts na árvore, existe transição de caso quando o campo constante? Existe um campo crítico assim como no modelo de Ising?

Capítulo 1

Medidas de Gibbs

1.1 Modelos de Spin

Os primeiros ingredientes de um modelo de spins são um grafo $G = (V, L)$ conexo, infinito porém localmente finito, um espaço métrico compacto E que chamaremos de *espaço de estados* e uma σ -álgebra \mathcal{E} em E . Neste trabalho, consideraremos sempre $V = \mathbb{Z}^d$ ou $V = \Gamma^d$, $d \in \mathbb{N}$, onde Γ^d denota a árvore de Cayley de grau d , i.e., uma árvore direcionada infinita $d + 1$ -regular. Já os espaços de estado mais importantes serão $E = \{-1, +1\}$ para o modelo de Ising e $E = \{1, 2, \dots, q\}$ para o modelo de Potts. Nesses casos particulares onde E é finito, assumiremos sempre $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, a σ -álgebra das partes.

Denotaremos por $\Omega = E^V$ o *espaço das configurações* e chamaremos de *configuração* cada elemento $\sigma = (\sigma_i)_{i \in V} \in \Omega$. Além disso, se $\Lambda \subset V$, definiremos $\Omega_\Lambda = E^\Lambda$ e denotamos os elementos desse conjunto por $\sigma_\Lambda = (\sigma_i)_{i \in \Lambda}$. Usaremos este mesmo símbolo para denotar a restrição de uma configuração $\sigma \in \Omega$ a um subconjunto $\Lambda \subset V$, isto é, $\sigma|_\Lambda = \sigma_\Lambda$. Usaremos $\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}$ para denotar a concatenação de duas configurações:

$$(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})_i = \begin{cases} \sigma_i, & \text{se } i \in \Lambda \\ \omega_i, & \text{se } i \in \Lambda^c. \end{cases}$$

Precisamos agora definir a σ -álgebra dos cilindros pois é sobre essa que iremos construir as medidas de Gibbs. Para cada $i \in V$, $A \in \mathcal{E}$ defina $C_i^A \doteq \{\sigma \in \Omega : \sigma_i \in A\}$. Os *cilindros* são os conjuntos da forma

$$\bigcap_{i \in \Lambda} C_i^A, \quad \text{com } \Lambda \subset V \text{ finito}$$

Denotaremos por \mathcal{F} a σ -álgebra gerada pelos cilindros. Observe que vale $\mathcal{F} = \sigma(\{C_i^A : i \in V, A \in \mathcal{E}\})$.

Também estamos interessados em definir eventos que dependem apenas de um subconjunto de V . Assim, para $\Lambda \in V$, defina

$$\mathcal{C}_\Lambda = \{C_i^A : i \in \Lambda, A \in \mathcal{E}\}.$$

Denotaremos por \mathcal{F}_Λ a sub- σ -álgebra de \mathcal{F} gerada por \mathcal{C}_Λ . Note que, usando

esta notação, $\mathcal{F}_V = \mathcal{F}$. O conjunto $C(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ é o conjunto das funções \mathcal{F}_Λ -mensuráveis e contínuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Chamaremos de \mathcal{L} o conjunto dos subconjuntos finitos de V e por vezes usaremos a notação $\Lambda \Subset V$ para dizer que $\Lambda \in \mathcal{L}$.

Um *potencial* é uma família

$$\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{L}}, \text{ onde } \Phi_A \in C(\Omega, \mathcal{F}_A).$$

Usaremos o potencial para descrever o sistema de spins, no sentido de que Φ_A nos diz como as partículas em A interagem entre si. Dizemos que o potencial é *absolutamente somável* quando para todo $i \in V$ existe $c_i > 0$ tal que

$$\sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ i \in A}} \|\Phi_A\|_\infty < c_i.$$

Para cada $\Lambda \Subset V$ definimos o Hamiltoniano do sistema como

$$H_\Lambda(\sigma) \doteq \sum_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \cap \Lambda \neq \emptyset}} \Phi_A(\sigma).$$

O Hamiltoniano, como usual na física, representa a energia do sistema. Vamos agora exibir os dois principais modelos que serão abordados neste trabalho.

Exemplo 1 - Modelo de Ising

No modelo de Ising, consideramos o espaço de estados $E = \{-1, +1\}$ e o potencial

$$\Phi_A = \begin{cases} -J\sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\} \text{ e } \langle i, j \rangle \\ -h\sigma_i, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $\langle i, j \rangle$ denota que i e j são vizinhos no grafo. Com este potencial o Hamiltoniano do sistema é

$$H_\Lambda(\sigma) = -J \sum_{\substack{i, j \in \Lambda \\ \langle i, j \rangle}} \sigma_i\sigma_j - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i - J \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \Lambda^c \\ \langle i, j \rangle}} \sigma_i\sigma_j.$$

Exemplo 2 - Modelo de Potts

No modelo de Potts, o espaço de estados é $E = \{1, 2, \dots, q\}$ e o potencial é

$$\Phi_A = \begin{cases} -J\delta_{\sigma_i\sigma_j}, & \text{se } A = \{i, j\} \text{ e } \langle i, j \rangle \\ -h\delta_{1\sigma_i}, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kroneker usual

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e assim o Hamiltoniano do sistema é

$$H_{\Lambda}(\sigma) = -J \sum_{\substack{i,j \in \Lambda \\ \langle i,j \rangle}} \delta_{\sigma_i \sigma_j} - h \sum_{i \in \Lambda} \delta_{1\sigma_i} - J \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \Lambda^c \\ \langle i,j \rangle}} \delta_{\sigma_i \sigma_j}.$$

Em ambos os exemplos, quando a *constante de acoplamento* J é positiva, dizemos que o modelo é *ferromagnético*. Este será sempre o caso neste trabalho. Nestes modelos, h é chamado de *campo externo*. Para evidenciar a dependência do Hamiltoniano com relação a h , quando o campo não for nulo escreveremos o Hamiltoniano como $H_{\Lambda,h}$.

Observe que em ambos os modelos cada spin só interage com seus vizinhos mais próximos. Os potenciais que satisfazem essa propriedade são denominados *nearest neighbour*:

Definição 1.1.1. Um potencial $\Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathcal{C}}$ é dito *nearest neighbour* quando $\Phi_A = 0$ sempre que $A \not\subseteq L$.

1.2 Especificação Gibbsiana

Definição 1.2.1. Sejam (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável e $\Lambda \Subset V$. Um *núcleo de probabilidade* é um mapa $\gamma_{\Lambda} : \mathcal{F} \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz:

- Para cada $\omega \in \Omega$, $\gamma_{\Lambda}(\cdot | \omega)$ é uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F})
- Para cada $A \in \mathcal{F}$, $\gamma_{\Lambda}(A | \cdot)$ é \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurável.

Além disso, se

$$\gamma_{\Lambda}(B | \omega) = \mathbb{1}_B(\omega) \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c},$$

dizemos que o núcleo de probabilidade é *próprio*.

É fácil ver que um núcleo de probabilidade próprio também satisfaz

$$\gamma_{\Lambda}(A \cap B | \omega) = \mathbb{1}_B(\omega) \gamma_{\Lambda}(A | \omega) \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}, A \in \mathcal{F}.$$

Dessa maneira, se considerarmos o conjunto

$$\Omega_{\Lambda}^{\omega} = \{\sigma \in \Omega : (\sigma)_i = (\omega)_i, \forall i \in \Lambda^c\},$$

e um núcleo de probabilidade próprio γ_{Λ} , a medida de probabilidade $\gamma_{\Lambda}(\cdot | \omega)$ está concentrada em $\Omega_{\Lambda}^{\omega}$, ou seja,

$$\gamma_{\Lambda}(\Omega_{\Lambda}^{\omega} | \omega) = \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda}^{\omega}}(\omega) = 1,$$

por isso chamaremos ω de condição de fronteira de $\gamma_\Lambda(\cdot | w)$.

Definição 1.2.2. Uma *especificação* é uma família de núcleos de probabilidade próprios $(\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ que é consistente, i.e., para todo $\Lambda \subset \Gamma \in V$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{F} -mensurável limitada e $\eta \in \Omega$ temos

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} f(\sigma_\Lambda \omega_{\Gamma \setminus \Lambda} \eta_{\Gamma^c}) \gamma_\Lambda(d\sigma | \omega_\Gamma \eta_{\Gamma^c}) \gamma_\Gamma(d\omega | \eta) = \int_{\Omega} f(\omega_\Gamma \eta_{\Gamma^c}) \gamma_\Gamma(d\omega | \eta). \quad (1.1)$$

Esta equação é dita *condição de compatibilidade* e usaremos a seguinte notação para nos referenciarmos a ela

$$\gamma_\Lambda \gamma_\Gamma = \gamma_\Gamma.$$

Podemos finalmente definir as especificações Gibbsianas. Primeiro considere uma medida ν em (E, \mathcal{E}) dita *medida a priori*.

Teorema 1.2.1. Sejam (E, \mathcal{E}, ν) um espaço de medida e Φ um potencial absolutamente convergente definido em (Ω, \mathcal{F}) . Para uma temperatura $T = 1/\beta > 0$ fixa, um subconjunto finito $\Lambda \in V$ e $f \in \mathcal{F}$, a expressão

$$\mu_{\Lambda, \beta}^\omega(F) = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^\omega} \int_{E^\Lambda} \mathbb{1}_F(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i \in \Lambda} d\nu(\sigma_i), \quad (1.2)$$

onde

$$Z_{\Lambda, \beta}^\omega = \int_{E^\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i \in \Lambda} d\nu(\sigma_i) \quad (1.3)$$

define uma especificação local chamada de *especificação Gibbsiana* para o potencial Φ e inverso da temperatura β .

Finalmente podemos definir as medidas de Gibbs dadas por um potencial Φ absolutamente somável. Primeiro, dada uma medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ e \mathcal{B} uma sub- σ -álgebra de \mathcal{F} , denotaremos por $\mu(\cdot | \mathcal{B}) = \mathbb{E}_\mu(\cdot | \mathcal{B})$ a esperança condicional de μ dado \mathcal{B} .

Definição 1.2.3. Seja (E, \mathcal{E}, ν) um espaço de probabilidade e Φ um potencial absolutamente somável definido em (Ω, \mathcal{F}) . Para uma temperatura fixa $T = \frac{1}{\beta} > 0$, uma medida de probabilidade $\mu_\beta \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é dita *medida de Gibbs associada ao potencial* Φ se para todo $\Lambda \in V$ e $F \in \mathcal{F}$ vale que

$$\mu_\beta(F | \mathcal{F}_{\Lambda^c}) = \mu_\beta^{(\cdot)}(F), \quad \mu_\beta - q.s. \quad (1.4)$$

O conjunto de todas as medidas de Gibbs que satisfazem a condição acima é denotado por $\mathcal{G}_\beta^{\text{DLR}}(\Phi)$.

Uma outra caracterização do conjunto $\mathcal{G}_\beta^{\text{DLR}}(\Phi)$ se dá pelas chamadas *equações DLR*.

Teorema 1.2.2. Seja $\{\mu_{\Lambda, \beta}^{(\cdot)}\}_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ uma especificação Gibbsiana associada a um potencial Φ em (Ω, \mathcal{F}) com inverso da temperatura $\beta > 0$. Uma medida de probabilidade $\mu_\beta \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é uma medida de Gibbs associada ao potencial Φ se e somente se

$$\mu_\beta \mu_{\Lambda, \beta}^{(\cdot)} = \mu_\beta \quad (1.5)$$

para todo $\Lambda \in V$, isto é, para toda f função \mathcal{F} -mensurável

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} f(\sigma) \mu_{\Lambda, \beta}^{(w)}(d\sigma) \mu_{\beta}(d\omega) = \int_{\Omega} f(\sigma) \mu_{\beta}(d\sigma). \quad (1.6)$$

As equações (1.5) são chamadas *equações DLR* em homenagem a Dobrushin, Lanford e Ruelle.

Duas propriedades muito importantes do conjunto das medidas de Gibbs é que ele é fechado e convexo. Faz sentido então definir as medidas extremais:

Definição 1.2.4. Uma medida $\mu \in \mathcal{G}_{\beta}^{\text{DLR}}(\Phi)$ é dita *extremal* se ela não pode ser escrita como combinação linear de outras duas medidas em $\mathcal{G}_{\beta}^{\text{DLR}}(\Phi)$, isto é, se $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ para algum $\lambda \in [0, 1]$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}_{\beta}^{\text{DLR}}(\Phi)$ então $\mu = \mu_1 = \mu_2$.

Denotaremos por

$$\text{ex}\mathcal{G}_{\beta}^{\text{DLR}}(\Phi) = \{\mu \in \mathcal{G}_{\beta}^{\text{DLR}}(\Phi) : \mu \text{ é extremal}\}.$$

o conjunto das medidas extremais de $\mathcal{G}_{\beta}^{\text{DLR}}(\Phi)$.

A partir de agora, para simplificar a notação, denotaremos por $\gamma = (\gamma_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathcal{C}}$ qualquer especificação Gibbsiana associada a um potencial Φ com inverso da temperatura β , ou seja, $\gamma_{\Lambda}(A | w) = \mu_{\Lambda, \beta}^{(w)}(A)$, $\mu_{\Lambda, \beta}^{(w)}$ como em (1.2). Também denotaremos $\mathcal{G}(\gamma) = \mathcal{G}_{\beta}^{\text{DLR}}(\Phi)$.

Uma pequena justificativa para considerarmos medidas extremais é a seguinte: considere a σ -álgebra

$$\mathcal{F}_{\infty} \doteq \bigcap_{\Lambda \in V} \mathcal{F}_{\Lambda^c} \quad (1.7)$$

chamada de σ -álgebra no infinito, ou dos eventos macroscópicos. Em uma primeira análise, esta σ -álgebra parece ser vazia, mas isto está longe de ser verdade. Todos os eventos que independem de qualquer subconjunto finito estão nessa σ -álgebra. Um exemplo de tal evento é

$$\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda(n)|} \sum_{i \in \Lambda(n)} \omega_i \text{ existe e pertence a } A \subset E \right\}.$$

Aqui, $(\Lambda(n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos tal que $\Lambda(n) \nearrow V$, isto é, para todo $i \in V$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i \in \Lambda(n_0)$.

O seguinte teorema nos mostra uma propriedade muito desejada das medidas de Gibbs.

Teorema 1.2.3. Seja γ uma especificação Gibbsiana e $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$. São equivalentes:

1. μ é extremal
2. μ é trivial em \mathcal{F}_{∞} , i.e., $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$ para todo $A \in \mathcal{F}_{\infty}$.

Essa caracterização expressa o fato de que nos sistemas descritos por medida Gibbs extremais, as características macroscópicas são determinísticas, ou seja, os eventos macroscópicos ocorrem com probabilidade 0 ou 1.

Para provar o teorema (1.2.3) precisaremos de algumas proposições auxiliares. Seja $\Lambda \in V$, definimos uma *restrição* $r_\Lambda : \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}_{\Lambda^c})$ como

$$r_\Lambda \mu(B) \doteq \mu(B), \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}.$$

Uma observação importante é que se $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurável, então $r_\Lambda \mu(g) = \mu(g)$. Dada uma especificação γ podemos também definir uma *extensão* $t_\Lambda^\gamma : \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}_{\Lambda^c}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ como

$$t_\Lambda^\gamma \nu(A) \doteq \nu \gamma_\Lambda(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Note que a composição de t_Λ^γ com r_Λ é tal que $t_\Lambda^\gamma r_\Lambda : \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$. Estas restrições e extensões nos dão um novo jeito de escrever as equações DLR como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.2.1. $\mu \in \mathcal{G}(\gamma) \Leftrightarrow t_\Lambda^\gamma r_\Lambda \mu = \mu$ para todo $\Lambda \in V$.

Demonstração. Dados $A \in \mathcal{F}$ e $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$,

$$t_\Lambda^\gamma r_\Lambda \mu(A) = (r_\Lambda \mu) \gamma_\Lambda(A) = \int_\Omega \gamma_\Lambda(A | \omega) r_\Lambda \mu(d\omega) = \int_\Omega \gamma_\Lambda(A | \omega) \mu(d\omega) = \mu \gamma_\Lambda. \quad (1.8)$$

Na penúltima igualdade usamos a \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurabilidade de $\gamma_\Lambda(A | \cdot)$. Com isso fica claro que valem as equações de DLR se e somente se $t_\Lambda^\gamma r_\Lambda \mu = \mu$. \square

Agora, para $\hat{\mathcal{F}}$ uma sub- σ -álgebra de \mathcal{F} , $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \hat{\mathcal{F}})$ medida de probabilidade e $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ uma função $\hat{\mathcal{F}}$ -mensurável que satisfaz $\mu(f) = 1$, definimos a medida de probabilidade $f\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \hat{\mathcal{F}})$ como

$$f\mu(A) = \int_A f(\omega) \mu(d\omega), \quad \forall A \in \hat{\mathcal{F}}.$$

Observação 1. Se f_1 e f_2 são funções como acima, vale que

$$f_1 \mu = f_2 \mu \Leftrightarrow f_1 = f_2 \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

Este é um resultado básico de teoria da medida por isso não o provaremos aqui.

Lema 1.2.1. Seja $\Lambda \in V$.

1. Sejam $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ e $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ uma função \mathcal{F} -mensurável tal que $\mu(f) = 1$. Então

$$r_\Lambda(f\mu) = \mu(f | \mathcal{F}_{\Lambda^c}) r_\Lambda \mu.$$

2. Sejam $\nu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}_{\Lambda^c})$, γ uma especificação Gibbsiana e $g : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ uma função \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurável tal que $\mu(g) = 1$. Então

$$t_\Lambda^\gamma(g\nu) = g t_\Lambda^\gamma \nu.$$

Demonstração. 1. Para $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$,

$$\begin{aligned} r_{\Lambda}(f\mu)(B) &= f\mu(B) = \int_B f(\omega)\mu(d\omega) = \int_B \mu(f | \mathcal{F}_{\Lambda^c})(\omega)\mu(d\omega) \\ &= \int_B \mu(f | \mathcal{F}_{\Lambda^c})(\omega)r_{\Lambda}\mu(d\omega) = \mu(f | \mathcal{F}_{\Lambda^c})r_{\Lambda}\mu(B). \end{aligned}$$

A terceira igualdade sai da definição de esperança condicional e a penúltima da \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurabilidade de $\mu(f | \mathcal{F}_{\Lambda^c})(\cdot)$.

2. Vamos mostrar que para todo $A \in \mathcal{F}$ vale

$$(g\nu)\gamma_{\Lambda}(A) = g(\nu\gamma_{\Lambda})(A)$$

e disto segue direto que

$$t_{\Lambda}^{\gamma}(g\nu)(A) = (g\nu)\gamma_{\Lambda}(A) = g(\nu\gamma_{\Lambda})(A) = gt_{\Lambda}^{\gamma}\nu(A)$$

De fato, fixado $A \in \mathcal{F}$ temos

$$g\nu(A) = \int_A g(\omega)d\nu(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)g(\omega)d\nu(\omega) = \nu(\mathbb{1}_A g).$$

Assim,

$$g(\nu\gamma_{\Lambda})(A) = \int_A g(\omega)d\nu\gamma_{\Lambda}(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)g(\omega)d\nu\gamma_{\Lambda}(\omega) = \nu\gamma_{\Lambda}(\mathbb{1}_A g). \quad (1.9)$$

Vamos mostrar agora que $\nu\gamma_{\Lambda}(\mathbb{1}_A g) = \nu(g\gamma_{\Lambda}(\mathbb{1}_A | \cdot))$. Mostraremos apenas quando $g = \mathbb{1}_B$ para algum $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$, o caso geral segue por argumentos padrões. Para este caso,

$$\begin{aligned} \nu\gamma_{\Lambda}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) &= \nu\gamma_{\Lambda}(A \cap B) = \int_{\Omega} \gamma_{\Lambda}(A \cap B | \omega)d\nu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\omega)\gamma_{\Lambda}(A | \omega)d\nu(\omega) = \nu(\mathbb{1}_B \gamma_{\Lambda}(A | \cdot)), \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos que γ_{Λ} é uma especificação própria. Voltando para (1.9) obtemos

$$g(\nu\gamma_{\Lambda})(A) = \nu(g\gamma_{\Lambda}(\mathbb{1}_A | \cdot)) = (g\nu)(\gamma_{\Lambda}(\mathbb{1}_A | \cdot)) \doteq (g\nu)\gamma_{\Lambda}(A).$$

□

Para demonstrar a próxima proposição precisaremos usar um resultado bem conhecido em probabilidade, chamado de Teorema da convergência de Backwards Martingales:

Teorema 1.2.4. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ for \mathcal{F} -mensurável com $\int |f|d\mu < +\infty$ e $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sequencia decrescente de

sub- σ -álgebras de \mathcal{F} então

$$\mu(f \mid \mathcal{G}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(f \mid \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n).$$

Uma prova desse teorema pode ser encontrada em [5] Note que no nosso caso, como o espaço de estados será compacto, mais ainda finito, temos que Ω é compacto e μ é de probabilidade, assim $\int |f| d\mu$ é sempre finito para f \mathcal{F} -mensurável.

Proposição 1.2.2. Seja γ uma especificação.

1. Seja $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ função \mathcal{F} -mensurável que satisfaz $\mu(f) = 1$. Então $f\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ se e somente se $f = g$ μ -q.t.p. para alguma $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{F}_∞ -mensurável.
2. Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{G}(\gamma)$ com $\mu = \nu$ em \mathcal{F}_∞ , isto é, $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}_\infty$. Então $\mu = \nu$.

A demonstração aqui será feita como em [6]

Demonstração. 1. (\Rightarrow) Se $f\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, para $\Lambda \in V$ qualquer, usando a proposição (1.2.1) e o lema (1.2.1) respectivamente, temos

$$\begin{aligned} f\mu &= t_\Lambda^\gamma r_\Lambda(f\mu) = t_\Lambda^\gamma(\mu(f \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}) r_\Lambda \mu) \\ &= \mu(f \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}) t_\Lambda^\gamma r_\Lambda(\mu) = \mu(f \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}) \mu. \end{aligned}$$

Assim, $f = \mu(f \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c})$ μ -q.t.p. Como isso vale para todo $\Lambda \in V$, vale em particular para uma sequência $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\Lambda_n \nearrow V$.

Para essa sequência, $\mathcal{F}_{\Lambda_{n+1}^c} \subset \mathcal{F}_{\Lambda_n^c}$ e podemos aplicar o teorema de convergência (1.2.4) obtendo

$$\mu(f \mid \mathcal{F}_{\Lambda_n^c}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(f \mid \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\Lambda_n^c}).$$

É fácil ver que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\Lambda_n^c} = \bigcap_{\Lambda \in V} \mathcal{F}_{\Lambda^c} = \mathcal{F}_\infty$, o que conclui a prova.

(\Leftarrow) Se $f = \hat{f}$ μ -q.t.p. para alguma \hat{f} função \mathcal{F}_∞ -mensurável, então $f\mu = \hat{f}\mu$. Como \hat{f} é \mathcal{F}_{Λ^c} -mensurável para todo $\Lambda \in V$, pela segunda parte do lema (1.2.1) temos que

$$f\mu(\gamma_\Lambda)(A) = \hat{f}\mu(\gamma_\Lambda)(A) = \hat{f}(\mu\gamma_\Lambda)(A) = \hat{f}\mu(A) = f\mu(A)$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ e assim $f\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$.

2. Definindo uma nova medida $\lambda = \frac{1}{2}(\mu + \nu)$, temos que $\lambda \in \mathcal{G}(\gamma)$ pois esse conjunto é convexo. Além disso, se $\lambda(A) = 0$ para algum \mathcal{F} -mensurável então $\mu(A) = \nu(A) = 0$. Podemos portanto aplicar o teorema de Radon–Nikodym obtendo funções $f, g \geq 0$, $\lambda(f) = \lambda(g) = 1$, tais que

$$\mu = f\lambda, \quad \nu = g\lambda.$$

Daí, para todo $A \in \mathcal{F}_\infty$,

$$\int_A (f - g) d\lambda = \mu(A) - \nu(A) = 0.$$

Pela parte 1. desta proposição, existem \hat{f}, \hat{g} funções \mathcal{F}_∞ -mensuráveis que são λ -q.t.p. iguais a f e g respectivamente. Tomando $A = \{\hat{f} > \hat{g}\} \in \mathcal{F}_\infty$ concluímos que $\lambda(f > g) = \lambda(\hat{f} > \hat{g}) = 0$. Analogamente, concluímos que $\lambda(f < g) = 0$ e portanto $f = g$ λ -q.t.p. o que implica que $\mu = \nu$. \square

Estamos finalmente prontos para provar o teorema (1.2.3).

Prova do teorema 1.2.3.

(1. \Rightarrow 2.) Suponha que $\mu \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma)$. Queremos mostrar que dado $A \in \mathcal{F}_\infty$, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Por absurdo, suponha que existe $A \in \mathcal{F}_\infty$ t.q. $\mu(A) = a \in (0, 1)$. Pelo item 1. da Proposição 1.2.2, $\mu_1 \doteq \frac{1}{a}\mathbb{1}_A\mu$ e $\mu_2 \doteq \frac{1}{1-a}\mathbb{1}_A\mu$ estão em $\mathcal{G}(\gamma)$, pois as funções $\frac{1}{a}\mathbb{1}_A$ e $\frac{1}{1-a}\mathbb{1}_A$ são claramente \mathcal{F}_∞ -mensuráveis.

Mas $\mu = a\mu_1 + (1 - a)\mu_2$ e portanto μ não pode ser extremal.

(2. \Rightarrow 1.) Suponha que μ é trivial em \mathcal{F}_∞ e $\mu = a\mu_1 + (1 - a)\mu_2$ para algum $a \in (0, 1)$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}(\gamma)$. Então $\mu(A) = \mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}_\infty$, pois se $\mu(A) = 1$ então $a\mu_1(A) + (1 - a)\mu_2(A) = 1$ e portanto $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 1$ e se $\mu(A) = 0$, então $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$.

Aplicando a parte 2. da Proposição 1.2.2 obtemos $\mu = \mu_1 = \mu_2$. \square

Uma outra caracterização das medidas de Gibbs extremas se dá pela seguinte proposição.

Proposição 1.2.3. Seja γ uma especificação Gibbsiana e $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$. Então μ é extremal se e somente se toda função \mathcal{F}_∞ -mensurável for constante μ -q.t.p.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja f uma função \mathcal{F}_∞ -mensurável. Então, para todo $c \in \mathbb{R}$, $\{f \leq c\} \doteq f^{-1}([-\infty, c]) \in \mathcal{F}_\infty$ e portanto $\mu(f \leq c) \in \{0, 1\}$.

Considere agora $c^* = \inf c \in \mathbb{R} : \mu(f \leq c) = 1$. Note primeiro que $c^* > -\infty$, caso contrário teríamos que $\mu(f \leq -\infty) = \mu(\emptyset) = 1$.

Agora

$$\mu(f < c^*) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{f \leq c - \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(f \leq c - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Daí $\mu(f = c^*) = \mu(f \leq c^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(f \leq c + \frac{1}{n}\right) = 1$.

(\Leftarrow) Para todo $A \in \mathcal{F}_\infty$, $\mathbb{1}_A$ é uma função \mathcal{F}_∞ -mensurável e portanto é μ -q.s. constante. Assim, $\mu(A) = \int \mathbb{1}_A d\mu \in \{0, 1\}$. \square

Outra propriedade do conjunto das medidas de Gibbs que mostra a importância das medidas extremas é a seguinte

Teorema 1.2.5. Se E é polonês e γ é uma especificação para a qual $\mathcal{G}(\gamma) \neq \emptyset$ então $\text{ex}\mathcal{G}(\gamma) \neq \emptyset$ e para cada $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ existe um único peso $w_\mu \in \mathcal{M}_1(\text{ex}\mathcal{G}(\gamma), e(\text{ex}\mathcal{G}(\gamma)))$

tal que

$$\mu = \int_{\text{ex}\mathcal{G}(\gamma)} \nu w_\mu(d\nu). \quad (1.10)$$

Aqui, $e(\text{ex}\mathcal{G}(\gamma))$ é a menor σ -álgebra em $\text{ex}\mathcal{G}(\gamma)$ para a qual as funções $e_A : \mu \rightarrow \mu(A)$, $A \in \mathcal{F}$, são mensuráveis.

Capítulo 2

Cadeias de Markov na árvore de Cayley

Neste capítulo iremos assumir sempre que estamos na árvore de Cayley. Primeiramente, iremos definir as cadeias de Markov na árvore e em seguida mostrar que as medidas de Gibbs extremas do modelo Ising e de Potts são cadeias de Markov. A seguir iremos definir condições de fronteira e demonstrar que existe uma bijeção entre estas e as medidas de Gibbs. Por fim, usando a caracterização por condições de fronteira, mostraremos explicitamente para quais valores de J e h acontece a transição de fase no modelo de Ising. Isto foi feito conforme em [1].

2.1 Cadeias de Markov e as Medidas de Gibbs

Como dito anteriormente, a partir de agora consideraremos sempre que os spins estão dispostos em uma árvore de Cayley e o espaço de estados E agora será finito. Fixemos então $\Gamma^d = (V, L)$ uma árvore de Cayley de grau d , i.e., uma árvore direcionada infinita $d + 1 - regular$. Denotaremos por B o conjunto de elos da árvore, isto é, $B = \{\{x, y\} : (x, y) \in L\}$. Definimos também a *fronteira* de um vértice $i \in V$ como

$$\partial i = \{j \in V : \{x, y\} \in B\}$$

e assim podemos escrever a fronteira de um conjunto $\Lambda \subset V$ como

$$\partial \Lambda = \bigcup_{i \in \Lambda} \partial i \setminus \Lambda.$$

Neste capítulo, estamos interessados em um tipo especial de especificação, as especificações Markovianas.

Definição 2.1.1. Uma especificação γ e Ω é dita *especificação Markoviana* se $\gamma_\Lambda(\sigma_\lambda | \cdot)$ é $\mathcal{F}_{\partial \Lambda}$ -mensurável para todo $\sigma_\lambda \in E^\Lambda$ e $\Lambda \Subset V$.

É claro que as especificações de Potts e de Ising são Markovianas, mais geralmente, toda especificação vinda de um potencial nearest-neighbor é Mar-

koviana. Além disso as medidas de Gibbs $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, quando a especificação γ é Markoviana, satisfazem

$$\mu(\sigma_\Lambda \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}) = \mu(\sigma_\Lambda \mid \mathcal{F}_{\partial\Lambda}) \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

para todo $\sigma_\Lambda \in E^\Lambda$ e $\Lambda \Subset V$.

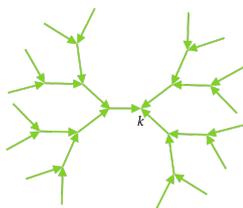
Isso nos diz que as medidas de Gibbs nas caixas finitas só dependem da fronteira de Λ , mas podemos exigir uma propriedade mais forte das medidas. Para isso, precisamos de algumas definições. Para cada elo $\{i, j\} \in B$, definiremos $ij = (i, j)$ o elo orientado que aponta de i para j . O conjunto de todos os elos orientados será denotado \vec{B} . Assim, cada vertice k divide o conjunto dos elos orientados em dois subconjuntos,

$$\vec{B}^k = \{ij \in \vec{B} : d(k, j) < d(k, i)\}$$

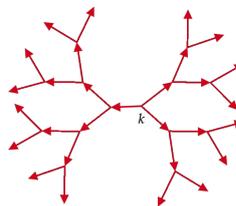
os elos que apontam na direção de k e

$${}^k\vec{B} = \{ij \in \vec{B} : d(k, j) > d(k, i)\}$$

os elos que apontam para longe de k .



(a) \vec{B}^k



(b) ${}^k\vec{B}$

De maneira análoga, cada elo orientado ij separa o grafo em dois conjuntos, o *intervalo futuro*

$$]ij, \infty[= \{k \in V : ij \in \vec{B}^k\}$$

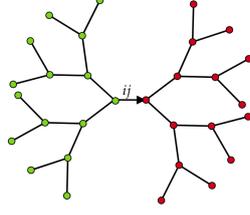
e o *intervalo passado*

$$]-\infty, ij[= \{k \in V : ij \in {}^k\vec{B}\}.$$

Definição 2.1.2. Uma medida de probabilidade μ em (Ω, \mathcal{F}) é uma *cadeia de Markov* se

$$\mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_{]-\infty, ij[}) = \mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_i) \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

para todo $ij \in \vec{B}$ e $\sigma_j \in E$. Qualquer matriz estocástica P_{ij} em $E \times E$ que

Figura 2.2: $] -\infty, ij[,]ij, \infty[$

satisfaz

$$\mu(\sigma_j | \mathcal{F}_i) = P_{ij}(\cdot, \sigma_j) \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

para todo $\sigma_j \in E$ é chamada *matriz de transição* de i para j de μ . Uma cadeia de Markov μ é dita *completamente homogênea* com matriz de transição P se

$$\mu(\sigma_j | \mathcal{F}_i) = P(\cdot, \sigma_j) \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

para todo $\sigma_j \in E$ e $ij \in \vec{B}$.

Consequimos relacionar as cadeias de Markov e as medidas de Gibbs extremas através do seguinte teorema

Teorema 2.1.1. Seja γ uma especificação Markoviana. Então toda $\mu \in \text{ex } \mathcal{G}(\gamma)$ é uma cadeia de Markov.

Demonstração. Fixados $ij \in \vec{B}$ e $\sigma_j \in E$, queremos mostrar que $\mu(\sigma_j | \mathcal{F}_{]-\infty, ij[}) = \mu(\sigma_j | \mathcal{F}_i)$ μ -q.t.p. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $B_j(n) = \{v \in V : d(j, v) \leq n\}$, os vértices que estão à distância menor ou igual a n de j , e $\Lambda(n) = B_j(n) \cap]ij, \infty[$, a restrição de $B_j(n)$ aos vértices no futuro de ij .

Note primeiro que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{]ij, \infty[\setminus \Lambda(n)} \subset \bigcap_{\Lambda \in V} \mathcal{F}_{\Lambda^c} = \mathcal{F}_\infty$$

pois dado $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{]ij, \infty[\setminus \Lambda(n)}$, para cada $\Lambda \in V$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda \subset B_j(n)$ e assim $\Lambda^c \supset B_j(n)^c \supset]ij, \infty[\setminus B_j(n) =]ij, \infty[\setminus \Lambda(n)$, portanto $A \in \mathcal{F}_{]ij, \infty[\setminus \Lambda(n)} \subset \mathcal{F}_{\Lambda^c}$.

Com isso conseguimos mostrar que

$$\mu(\sigma_j | \mathcal{F}_i) = \mu(\sigma_j | \bigcap_n \mathcal{F}_{\{i\} \cup]ij, \infty[\setminus \Lambda(n)}). \quad (2.1)$$

De fato, é claro que $\mathcal{F}_i \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{\{i\} \cup]ij, \infty[\setminus \Lambda(n)}$. Além disso, para toda função f mensurável com respeito a segunda σ -álgebra temos que

$$f(x\sigma_{\{i\}^c}) = \int f(x\omega_{\{i\}^c}) \mu(d\omega) \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

pois, para cada $x \in E$ fixado, $f(x\sigma_{\{i\}^c})$ é $\bigcap_n \mathcal{F}_{ij, \infty[\setminus \Lambda(n)]}$ -mensurável e portanto é \mathcal{F}_∞ -mensurável e constante μ -q.t.p. pela Proposição 1.2.3. Distto temos que todo conjunto $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{\{i\} \cup ij, \infty[\setminus \Lambda(n)]}$ é μ -q.c. igual à um conjunto $B \in \mathcal{F}_i$, a saber $B = \left(\int f(\cdot \omega_{\{i\}^c}) \mu(d\omega) \right)^{-1}(1)$, basta tomar $f = \mathbb{1}_A$ na equação acima, e portanto vale (2.1).

Agora, pelo Teorema 1.2.4, temos que

$$\mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_{\{i\} \cup ij, \infty[\setminus \Lambda(n)]}).$$

Como $\{i\} \cup ij, \infty[\setminus \Lambda(n)] \supset \partial \Lambda(n)$, $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e γ é uma especificação nearest neighbor,

$$\mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_{\{i\} \cup ij, \infty[\setminus \Lambda(n)]}) = \mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_{\partial \Lambda(n)}) = \gamma_{\Lambda(n)}(\sigma_j \mid \cdot).$$

Com isso, temos que

$$\mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{\Lambda(n)}(\sigma_j \mid \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_{\Lambda(n)^c}) = \mu(\sigma_j \mid \bigcap_n \mathcal{F}_{\Lambda(n)^c}),$$

e finalmente $\mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_i) = \mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_{]-\infty, ij[})$ pois $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{]-\infty, ij[} \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{\Lambda(n)^c}$. \square

Trabalharemos agora em direção à caracterizar as cadeias de Markov em $\mathcal{G}(\gamma)$. Nossa análise será restrita as especificações γ vindas de um potencial nearest neighbor Φ , pois estas possuem a desejada propriedade de serem positivas. Começemos com um lema.

Lema 2.1.1. Definindo

$$Q_{\{i,j\}}(\sigma) = \exp \left\{ -\beta \Phi_{\{i,j\}}(\sigma_i, \sigma_j) - \frac{\beta}{d+1} (\Phi_i(\sigma_i) + \Phi_j(\sigma_j)) \right\}$$

onde $\{i, j\} \in B$ e $\sigma \in \Omega$, obtemos que, para todo $\Lambda \in V$,

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda \mid \omega) = Z'_\Lambda(\omega)^{-1} \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}), \quad (2.2)$$

onde $Z'_\Lambda(\omega)^{-1}$ é uma constante de normalização.

Demonstração. Por definição,

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) &= \exp \left\{ \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \subset \Lambda}} -\beta \Phi_{\{i,j\}}(\sigma_i, \sigma_j) - \frac{\beta}{d+1} (\Phi_i(\sigma_i) + \Phi_j(\sigma_j)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i \in \Lambda, j \in \Lambda^c}} -\beta \Phi_{\{i,j\}}(\sigma_i, \omega_j) - \frac{\beta}{d+1} (\Phi_i(\sigma_i) + \Phi_j(\omega_j)) \right\} \quad (2.3) \end{aligned}$$

Agora, separando os elementos que dependem de dois sítios e os elementos

que dependem apenas da fronteira obtemos

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) &= \exp \left\{ \sum_{\substack{A \cap \Lambda \neq \emptyset \\ |A|=2}} -\beta \Phi_A(\sigma) \right\} \exp \left\{ \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i \in \Lambda, j \in \Lambda^c}} -\frac{\beta}{d+1} \Phi_j(\omega_j) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \subset \Lambda}} \beta \left[\frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} + \frac{\Phi_j(\sigma_j)}{d+1} \right] - \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i \in \Lambda, j \in \Lambda^c}} \beta \frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Agora

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \subset \Lambda}} \beta \left[\frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} + \frac{\Phi_j(\sigma_j)}{d+1} \right] + \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i \in \Lambda, j \in \Lambda^c}} \beta \frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \partial\{i\} \cap \Lambda}} \beta \left[\frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} + \frac{\Phi_j(\sigma_j)}{d+1} \right] + \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \partial\{i\} \cap \Lambda^c}} \beta \frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} \\ &= \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \partial\{i\} \cap \Lambda}} \beta \frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} + \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \partial\{i\} \cap \Lambda^c}} \beta \frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} \\ &= \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \partial\{i\}}} \beta \frac{\Phi_i(\sigma_i)}{d+1} = \sum_{i \in \Lambda} \beta \Phi_i(\sigma_i) \end{aligned}$$

E finalmente

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) &= \exp \left\{ \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} -\beta \Phi_A(\sigma) \right\} \exp \left\{ \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i \in \Lambda, j \in \Lambda^c}} -\frac{\beta}{d+1} \Phi_j(\omega_j) \right\} \\ &= \gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda \mid \omega) Z_\Lambda(\omega). \exp \left\{ \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i \in \Lambda, j \in \Lambda^c}} -\frac{\beta}{d+1} \Phi_j(\omega_j) \right\}. \end{aligned}$$

□

Muitas vezes será útil vermos $Q_{\{i,j\}}$ como uma matriz de transferência pelo elo $\{i,j\}$, por isso introduzimos uma família de matrizes positivas $\{Q_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ definida por

$$Q_{ij}(\sigma_i, \sigma_j) = Q_{ji}(\sigma_j, \sigma_i) = Q_{\{i,j\}}(\sigma). \quad (2.5)$$

A partir de agora embutiremos β em J e h , para simplificar a notação, isto é, tomaremos $\beta = 1$.

Definição 2.1.3. Uma família de vetores $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ com $l_{ij} \in]0, \infty[^E$ é dita uma *lei de fronteira* para $\{Q_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ (ou para γ) se para cada $ij \in \vec{B}$

existe uma constante $c_{ij} > 0$ tal que

$$l_{ij}(x) = c_{ij} \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} \sum_{y \in E} l_{ki}(y) Q_{ki}(y, x).$$

Enxergando l_{ij} como um vetor linha, podemos escrever a condição acima como

$$l_{ij}(x) = c_{ij} \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l_{ki} Q_{ki}(x). \quad (2.6)$$

O próximo teorema é fundamental pois nos mostra a equivalência entre as cadeias de Markov em $\mathcal{G}(\gamma)$ e as leis de fronteira. Na demonstração, usaremos o conhecido Teorema de extensão de Kolmogorov, enunciado e demonstrado no apêndice desse capítulo.

Notação 2.1.1. Se $\Lambda \Subset V$ é conexo e $k \in \partial\Lambda$ então $\Lambda \cap \partial K$ possui um único elemento, o qual denotaremos por k_Λ .

Teorema 2.1.2. Considere uma especificação de Markov $\gamma = \gamma(\Phi)$ como em (2.2) e seja $\{Q_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ a família de matrizes de transferência associadas. Então

1. Cada lei de fronteira $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ para $\{Q_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ define unicamente uma cadeia de Markov $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ pela equação

$$\mu(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) = z_\Lambda \prod_{k \in \partial\Lambda} l_{kk_\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma) \quad (2.7)$$

onde $\Lambda \Subset V$ é um conjunto conexo, $\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda} \in E^{\Lambda \cup \partial\Lambda}$ e z_Λ é uma constante de normalização adequada.

2. Cada cadeia de Markov $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ admite uma representação da forma (2.7) em termos de uma lei de fronteira $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ unicamente determinada a menos de um fator multiplicativo positivo.

Demonstração. (1.) Provaremos primeiro que a medida μ assim definida é consistente, no sentido de que para todo $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{L}$ conexos e $S = \Delta \cup \partial\Delta \setminus (\Lambda \cup \partial\Lambda)$

$$\sum_{\omega_S \in E^S} \mu(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda} \omega_S) = \mu(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}),$$

para todo $\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda} \in E^{\Lambda \cup \partial\Lambda}$.

Aplicando a definição, a equação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_S \in E^S} z_\Delta \prod_{k \in \partial\Delta} l_{kk_\Delta}(\omega_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Delta \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda} \omega_S) &= \\ &= z_\Lambda \prod_{k \in \partial\Lambda} l_{kk_\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como Λ e Δ são finitos e conexos, basta mostrarmos a igualdade quando $\Delta = \Lambda \cup \{i\}$ com $i \in \partial\Lambda$.

Se $j = i_\Lambda$, então $S = \Delta \cup \partial\Delta \setminus (\Lambda \cup \partial\Lambda) = \partial i \setminus \{j\}$ e assim

$$\begin{aligned} Z_\Delta \prod_{k \in \partial\Delta} l_{kk\Delta}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Delta \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma) \\ &= Z_\Delta \prod_{k \in \partial\Lambda \setminus \{i\}} l_{kk\Lambda}(\sigma_k) \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l_{ki}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma) \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} Q_{\{i,k\}}(\sigma) \\ &= Z_\Delta \prod_{k \in \partial\Lambda \setminus \{i\}} l_{kk\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma) \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l_{ki}(\sigma_k) Q_{ki}(\sigma_k, \sigma_i) \end{aligned}$$

para toda configuração $\sigma \in \Omega$. Agora, somando sobre todas as configurações $\omega_S \in E^S$, obtemos que o lado esquerdo de (2.8) é:

$$\begin{aligned} (LE2.8) &= Z_\Delta \prod_{k \in \partial\Lambda \setminus \{i\}} l_{kk\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) \sum_{\omega_S \in E^S} \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l_{ki}(\omega_k) Q_{ki}(\omega_k, \sigma_i) \\ &= Z_\Delta \prod_{k \in \partial\Lambda \setminus \{i\}} l_{kk\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} \sum_{\omega \in E} l_{ki}(\omega) Q_{ki}(\omega, \sigma_i) \\ &= Z_\Delta \prod_{k \in \partial\Lambda \setminus \{i\}} l_{kk\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) \frac{l_{ij}(\sigma_k)}{c_{ij}} \\ &= \frac{Z_\Delta}{c_{ij}} \prod_{k \in \partial\Lambda} l_{kk\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}). \end{aligned}$$

Basta agora mostrarmos que $\frac{Z_\Delta}{c_{ij} Z_\Lambda} = 1$. Mas isto é fácil ver, basta somar a equação acima sobre todas as configurações $\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda} \in E^{\Lambda \cup \partial\Lambda}$. Finalmente, pelo teorema de extensão de Kolmogorov, existe uma única medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ que satisfaz (2.7).

O próximo passo é mostrar que μ é uma cadeia de Markov. Primeiro, dados dois subconjuntos $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}$ disjuntos e duas configurações $\sigma_\Lambda \in E^\Lambda$ e $\sigma_{\Lambda'} \in E^{\Lambda'}$, definimos

$$\mu(\sigma_\Lambda \mid \sigma_{\Lambda'}) = \frac{\mu(\sigma_\Lambda \sigma_{\Lambda'})}{\mu(\sigma_{\Lambda'})}.$$

Fixe $ij \in \vec{B}$ e $\omega \in \Omega$. Dado $\Lambda \subset]-\infty, ij[$ com $i \in \Lambda$, se definirmos $\Delta = \Lambda \cup \partial\Lambda \setminus \{j\}$ a equação (2.7) nos mostra que

$$\frac{\mu(\sigma_j = x \mid \omega_\Delta)}{\mu(\sigma_j = y \mid \omega_\Delta)} = \frac{l_{ji}(x) Q_{ji}(x, \omega_i)}{l_{ji}(y) Q_{ji}(y, \omega_i)}.$$

Somando sobre $x \in E$ obtemos

$$\frac{1}{\mu(\sigma_j = y \mid \omega_\Delta)} = \frac{l_{ij}Q_{ij}(\omega_i)}{l_{ji}(y)Q_{ji}(y, \omega_i)}$$

e assim

$$\mu(\sigma_j = y \mid \omega_\Delta) = \frac{l_{ji}(y)Q_{ji}(y, \omega_i)}{l_{ij}Q_{ij}(\omega_i)},$$

que depende só de ω_i . Isso nos mostra que $\mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_{-\infty, ij}] = \mu(\sigma_j \mid \mathcal{F}_i)$ μ -q.t.p.

Falta agora mostrar que $\mu \in G(\gamma)$. Dado $\Lambda \Subset V$ e $\omega \in \Omega$, vamos mostrar que

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda \mid \omega) = \mu(\sigma_\Lambda \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}). \quad (2.9)$$

Para quaisquer $\sigma, \eta \in \Omega$ com $\sigma_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}$ e $\Delta \supset \Lambda$ finito e conexo temos

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\eta_\Lambda \mid \eta_{(\Delta \cup \partial\Delta) \setminus \Lambda})}{\mu(\sigma_\Lambda \mid \sigma_{(\Delta \cup \partial\Delta) \setminus \Lambda})} &= \frac{\mu(\eta_{\Delta \cup \partial\Delta})}{\mu(\sigma_{\Delta \cup \partial\Delta})} = \\ &= \frac{\prod_{k \in \partial\Delta} l_{kk_\Delta}(\eta_k) \prod_{\substack{\langle i, j \rangle \\ \{i, j\} \cap \Delta \neq \emptyset}} Q_{\{i, j\}}(\eta_i, \eta_j)}{\prod_{k \in \partial\Delta} l_{kk_\Delta}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i, j \rangle \\ \{i, j\} \cap \Delta \neq \emptyset}} Q_{\{i, j\}}(\sigma_i, \sigma_j)} \\ &= \prod_{\substack{\langle i, j \rangle \\ \{i, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} \frac{Q_{\{i, j\}}(\eta_i, \eta_j)}{Q_{\{i, j\}}(\sigma_i, \sigma_j)} = \frac{\gamma_\Lambda(\eta_\Lambda \mid \eta_{\Lambda^c})}{\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda \mid \sigma_{\Lambda^c})} = \frac{\gamma_\Lambda(\eta_\Lambda \mid \omega)}{\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda \mid \omega)}. \end{aligned}$$

Somando sobre todas as configurações $\eta_\Lambda \in E^\Lambda$ obtemos

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda \mid \omega) = \mu(\sigma_\Lambda \mid \sigma_{(\Delta \cup \partial\Delta) \setminus \Lambda})$$

e pelo mesmo argumento feito anteriormente mostramos (2.9).

(2.) Fixado $\mu \in G(\gamma)$, queremos encontrar uma lei de fronteira $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ para μ . Como a especificação γ vem de um potencial, γ é positiva e portanto μ é positiva nos cilindros. Para cada $ij \in \vec{B}$ e $x, y \in E$ definiremos

$$P_{ij}(x, y) = \mu(\sigma_j = y \mid \sigma_i = x) = \frac{\mu(\sigma_j = y, \sigma_i = x)}{\mu(\sigma_i = x)} > 0.$$

Seja $\Lambda \Subset V$ conexo, $\xi \in \Omega$ e $a \in E$. Denotando $a_\Lambda = a^\Lambda$ a configuração em Λ que é igual a a em todos os vértices temos

$$\mu(\xi_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) = \mu(a_\Lambda) \mu(\xi_{\partial\Lambda} \mid a_\Lambda) \mu(\xi_\Lambda \mid \xi_{\partial\Lambda}) \mu(a_\Lambda \mid \xi_{\partial\Lambda})^{-1}. \quad (2.10)$$

Como por hipótese μ é cadeia de Markov, é fácil ver que

$$\mu(\xi_{\partial\Lambda}) = \prod_{k \in \partial\Lambda} P_{k_\Lambda k}(a, \xi_k).$$

Por outro lado, usando (2.2) temos

$$\frac{\mu(\xi_\Lambda \mid \xi_{\partial\Lambda})}{\mu(a_\Lambda \mid \xi_{\partial\Lambda})} = \frac{\gamma_\Lambda(\xi_\Lambda \mid \xi)}{\gamma_\Lambda(a_\Lambda \mid \xi)} = \frac{\prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{ij}(\xi_i, \xi_j)}{\prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \subset \Lambda}} Q_{ij}(a, a) \prod_{k \in \partial\Lambda} Q_{k\Lambda k}(a, \xi_k)}$$

e assim, voltando em (2.10), obtemos

$$\mu(\xi_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) = \frac{\mu(a_\Lambda)}{\prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \subset \Lambda}} Q_{ij}(a, a)} \prod_{k \in \partial\Lambda} \frac{P_{k\Lambda k}(a, \xi_k)}{Q_{k\Lambda k}(a, \xi_k)} \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{ij}(\xi_i, \xi_j).$$

Se tomarmos $z_\Lambda = \frac{\mu(a_\Lambda)}{\prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \subset \Lambda}} Q_{ij}(a, a)}$ e $l_{ij} = \frac{P_{k\Lambda k}(a, \xi_k)}{Q_{k\Lambda k}(a, \xi_k)}$ vemos que a equa-

ção acima é igual a equação (2.7). Para checar que $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ assim definida é uma lei de fronteira, basta repetir a conta feita na primeira parte da demonstração onde mostramos que μ definida como em (2.7) é consistente.

Por último, para mostrar que l_{ij} é único a menos de uma constante, assuma que μ admite outra lei de fronteira $\{l'_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ e então, tomando $\Lambda = \{i\}$ e $\sigma_{\{i\} \cup \partial i} = x_j a_{\partial i \setminus \{j\}} \sigma_i, a \in E$ qualquer, em (2.7) vemos que

$$\begin{aligned} \mu(x_j a_{\partial i \setminus \{j\}} \sigma_i) &= Z_{\{i\}} \left(\prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l_{ki}(a) \right) l_{ji}(x) \left(\prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} Q_{ik}(\sigma_i, a) \right) Q_{ij}(\sigma_i, x) \\ &= Z'_{\{i\}} \left(\prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l'_{ki}(a) \right) l'_{ji}(x) \left(\prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} Q_{ik}(\sigma_i, a) \right) Q_{ij}(\sigma_i, x) \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{l_{ij}(x)}{l'_{ij}(x)} = \frac{Z_{\{i\}} \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l_{ki}(a)}{Z'_{\{i\}} \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} l'_{ki}(a)} = c \quad \forall x \in E.$$

□

Como as leis de fronteira são unicamente determinadas a menos de uma constante positiva, podemos considerar normalizações definidas como

Definição 2.1.4. Uma lei de fronteira $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ para $\{Q_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ é dita *normalizada* no estado $a \in E$ se

$$l_{ij}(a) = 1 \quad \forall ij \in \vec{B}.$$

Para as leis normalizadas em $a \in E$ a condição (2.6) se torna

$$l_{ij}(x) = \prod_{k \in \partial i \setminus \{j\}} \frac{l_{ki} Q_{ki}(x)}{l_{ki} Q_{ki}(a)} \quad \forall ij \in \vec{B}, x \in E. \quad (2.11)$$

Terminamos esta sessão com um corolário muito importante sobre cadeias de Markov homogêneas na árvore de Cayley.

Definição 2.1.5. Uma especificação de Markov γ é dita *completamente homogênea* com matriz de transferência Q se γ satisfaz a equação (2.2) com funções $Q_{\{i,j\}} = Q$, independentes de $\{i,j\}$, para todo $\{i,j\} \in B$.

Estamos interessados justamente nestas especificações, visto que tanto a especificação de Ising quanto a de Potts são exemplos de especificações completamente homogêneas.

Para uma cadeia de Markov $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$, com γ completamente homogênea, vale que μ é completamente homogênea se e somente se a lei de fronteira $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ (normalizada em a) associada a μ pelo teorema 2.1.2 satisfaz $l_{ij} = l \in]0, +\infty[^E \forall ij \in \vec{B}$. De fato, voltando a demonstração do teorema, vemos que l_{ij} foi definido como

$$l_{ij}(x) = \frac{P_{ji}(a, x)}{Q_{ji}(a, x)} = \frac{P_{ji}(a, x)}{Q(a, x)}.$$

E voltando em (2.11), temos que l é solução de

$$l(x) = \left[\frac{lQ(x)}{lQ(a)} \right]^d \quad \forall x \in E. \quad (2.12)$$

Chegamos finalmente ao seguinte corolário:

Corolário 2.1.1. Considere uma especificação Markoviana positiva completamente homogênea $\gamma = \gamma(\Phi)$ em $(\Gamma(d), E)$ com $d \geq 1$ e E espaço de estados finito com matriz de transferência Q . Para um estado de referência fixado $a \in E$, existe uma relação 1-a-1 entre as cadeias de Markov completamente homogêneas $\mu \in \mathcal{G}(\gamma)$ e as soluções $l \in]0, +\infty[^E$ da equação

$$l(x) = \left[\frac{lQ(x)}{lQ(a)} \right]^d \quad \forall x \in E.$$

Esta correspondência é dada pela equação

$$\mu(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) = z_\Lambda \prod_{k \in \partial\Lambda} l(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q(\sigma_i, \sigma_j), \quad (2.13)$$

que é a equação (2.7) com $l_{ij} = l$ para todo $ij \in \vec{B}$.

2.2 Transição de fase para o Modelo de Ising

Voltaremos agora ao modelo de Ising na árvore de Cayley. Recorde que neste modelo $E = \{-1, +1\}$ e o potencial é dado por

$$\Phi_A^{J,h} = \begin{cases} -J\sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i, j\} \text{ e } \langle i, j \rangle \\ -h\sigma_i, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Denotaremos por $\mathcal{G}(J, h) = \mathcal{G}(\Phi_A^{J,h})$ o conjunto das medidas de Gibbs desse potencial. Nesta secção, usando os Teoremas 2.1.1 e 2.1.2, obteremos condições sobre h e $J > 0$ que asseguram a existência de transição de fase, isto é, seremos capazes de exibir explicitamente a região

$$\{(J, h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : |\mathcal{G}(J, h)| > 1\}.$$

Começemos observando que a especificação $\gamma^{J,h}$ do potencial $\Phi_A^{J,h}$ é uma especificação Markoviana completamente homogênea. De fato, por definição

$$Q_{\{i,j\}}(\sigma) = \exp \left\{ J\sigma_i\sigma_j + \frac{h}{d+1}\sigma_i + \frac{h}{d+1}\sigma_j \right\},$$

e assim a matriz de transferência Q é dada por

- $Q(-, -) = \exp \left\{ J - \frac{2h}{d+1} \right\}$
- $Q(+, -) = Q(-, +) = \exp \{-J\}$
- $Q(+, +) = \exp \left\{ J + \frac{2h}{d+1} \right\}$.

Pelo Corolário 2.1.1, existe uma correspondência biunívoca entre as cadeias de Markov completamente homogêneas em $\mathcal{G}(J, h)$ e as soluções de

$$\begin{aligned} l(+)&= \left(\frac{lQ(+)}{lQ(-)} \right)^d \\ &= \left(\frac{l(-)Q(-, +) + l(+)Q(+, +)}{l(-)Q(-, -) + l(+)Q(+, -)} \right)^d, \end{aligned}$$

considerando que a lei de fronteira l está normalizada em $a = -1$. A equação acima é equivalente á

$$s = \left[\frac{Q(-, +) + sQ(+, +)}{Q(-, -) + sQ(-, +)} \right]^d \quad (2.14)$$

e assim, achar as soluções desta equação equivale a achar as cadeias de Markov completamente homogêneas em $\mathcal{G}(J, h)$.

Substituindo Q em (2.14) obtemos

$$s = \left[\frac{e^{-J} + se^J e^{2h(d+1)^{-1}}}{e^J e^{-2h(d+1)^{-1}} + se^{-J}} \right]^d$$

$$\Leftrightarrow \log s = d \log \left[\frac{e^{-2J} + se^{2h(d+1)^{-1}}}{e^{-2h(d+1)^{-1}} + se^{-2J}} \right].$$

Fazendo a mudança de variável $t = h(d+1)^{-1} - \frac{1}{2} \log s$, ou seja,

$$s = e^{2t-2h(d+1)^{-1}}, \quad (2.15)$$

obtemos

$$\log s = d \log \left[\frac{e^{-2J} + e^{2t}}{e^{-2h(d+1)^{-1}} + e^{2t-2h(d+1)^{-1}-2J}} \right]$$

$$= 2dh(d+1)^{-1} + d \log \left[\frac{e^{-2J} + e^{2t}}{1 + e^{2(t-J)}} \right].$$

Note que

$$\frac{\cosh(t+J)}{\cosh(t-J)} = \frac{e^{t+J} + e^{-(t+J)}}{e^{t-J} + e^{J-t}} =$$

$$= \frac{e^{(t+J)-(J-t)} + e^{-t-J-(J-t)}}{e^{t-J-(J-t)} + 1} = \frac{e^{2t} + e^{-2J}}{1 + e^{2(t-J)}},$$

e assim

$$\frac{d}{2} \log \left[\frac{\cosh(t+J)}{\cosh(t-J)} \right] = \frac{1}{2} \log s - \frac{hd}{d+1} = t - \frac{h}{d+1} - \frac{hd}{d+1} = t - h.$$

Além disso,

$$\frac{1}{2} \log \left[\frac{\cosh(t+J)}{\cosh(t-J)} \right] = \frac{1}{2} \log \left[\frac{\cosh(t) \cosh(J) + \sinh(t) \sinh(J)}{\cosh(t) \cosh(-J) + \sinh(t) \sinh(-J)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \log \left[\frac{1 + \tanh(t) \tanh(J)}{1 - \tanh(t) \tanh(J)} \right] = \operatorname{arctanh}(\tanh(J) \tanh(t)),$$

e chegamos finalmente á equação

$$t = h + d \operatorname{arctanh}(w \tanh(t)), \quad w = \tanh(J). \quad (2.16)$$

Definiremos $\varphi_J(t) = \operatorname{arctanh}(w \tanh(t))$.

Unindo (2.16) com os resultados da primeira parte concluímos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.1. Dados os parâmetros $d \geq 1$, $J, h \in \mathbb{R}$ com $J > 0$, existe uma bijeção $t \rightarrow \mu_t$ entre as soluções de (2.16) e as cadeias de Markov completamente

homogêneas em $\mathcal{G}(J, h)$. μ_t é determinada pela equação

$$\begin{aligned} \mu_t(\sigma_{\Lambda \cup \partial\Lambda}) &= \frac{1}{Z_\Lambda} \prod_{\substack{\langle x, y \rangle \\ y \in \partial\Lambda}} l_{yx}(\sigma_y) \prod_{\substack{\langle x, y \rangle \\ \{x, y\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{ij}(\sigma) \\ &= \exp \left\{ \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x, y \in \Lambda}} J\sigma_i\sigma_j + \sum_{i \in \Lambda} h\sigma_i + \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in \Lambda, y \in \Lambda^c}} J\sigma_i\sigma_j + \sum_{y \in \partial\Lambda} b(\sigma_i) \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

com lei de fronteira $l(-) = 1$, $l(+) = \exp \left\{ 2 \left(t - h(d+1)^{-1} \right) \right\}$ e $b = \log l$.

Encontremos agora todas as soluções de (2.16). Considere a função $\Psi_{J,d}(t) = d\varphi_J(t) - t$. Dizer que (2.16) tem solução é dizer que $h \in \Psi_{J,d}(\mathbb{R})$, que nos motiva a estudar esta função. Note primeiro que $\Psi_{J,d}$ é ímpar (pois $\varphi_J(t)e - t$ o são) e por isso basta estudarmos a função em $[0, +\infty[$.

Como

$$\begin{aligned} \varphi'_J(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh(t-J) \sinh(t+J) \cosh(t-J) - \sinh(t-J) \cosh(t+J)}{\cosh(t+J) \cosh(t-J)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \tanh(t+J) - \frac{1}{2} \tanh(t-J) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\tanh(t) + w}{1 + \tanh(t)w} - \frac{\tanh(t) - w}{1 - \tanh(t)w} \right] = w \left(\frac{1 - \tanh(t)^2}{1 - w^2 \tanh(t)^2} \right) \\ &= w \left(\frac{\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2}{\cosh(t)^2 - w^2 \sinh(t)^2} \right) = \frac{w}{1 + (1 - w^2) \sinh(t)^2} \end{aligned}$$

concluimos que

$$\Psi'_{J,d}(t) = \frac{dw}{1 + (1 - w^2) \sinh(t)^2} - 1 \quad (2.19)$$

e é uma função decrescente, pois $\sinh(t)^2$ é crescente, em $[0, +\infty[$ e portanto $\Psi_{J,d}$ é côncava em $[0, +\infty[$ e a derivada assume máximo em $t = 0$, ou seja, $\Psi'_{J,d}(t) < \Psi'_{J,d}(0) = dw - 1$.

Além disso, $\Psi_{J,d}(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi_{J,d}(t) = -\infty$. Com essas observações obtemos o seguinte lemma

Lema 2.2.1. Dados $d \geq 1$ e $J > 0$ defina

$$h(J, d) = \max_{t \geq 0} [d\varphi_J(t) - t] = - \min_{t \leq 0} [d\varphi_J(t) - t] > 0.$$

Então a equação (2.16) tem:

1. Uma única solução $t_* = t_*(J, d, h)$ se $|h| > h(J, d)$ ou $h = h(J, d) = 0$.
2. Duas soluções $t_- < t_+$, que dependem de J, d e h , se $|h| = h(J, d) > 0$.
3. Três soluções $t_- < t_\# < t_+$, que dependem de J, d e h , se $|h| < h(J, d)$.

Vamos agora calcular $h(J, d)$, o valor máximo de $d\varphi_J(t) - t$. Temos interesse apenas no caso $h(J, d) > 0$ e isso acontece se e somente se $\Psi'_{J,d}(0) > 0$. Mas

$$\Psi'_{J,d}(0) = 0 \Leftrightarrow \tanh(J) = d^{-1} \Leftrightarrow J = \tanh^{-1}(d) = \frac{1}{2} \log \frac{d+1}{d-1}$$

e assim, denotando $J(d) = \frac{1}{2} \log \frac{d+1}{d-1} = \tanh^{-1}(d)$, obtemos:

- Se $J < J(d)$, $\Psi'_{J,d}(0) < 0$ e portanto $h(J, d) = 0$.
- Se $J > J(d)$, $\Psi'_{J,d}(0) > 0$ e portanto $h(J, d) > 0$.

O ponto de máximo local de $\Psi_{J,d}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \Psi'_{J,d}(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{dw}{1 + (1 - w^2) \sinh(t)^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sinh(t)^2 = \frac{dw - 1}{1 - w^2} \\ &\Rightarrow \tanh(t)^2 = \frac{\sinh(t)^2}{1 + \sinh(t)^2} = \frac{dw - 1}{1 - w^2 + dw - 1} = \frac{d - w^{-1}}{d - w} \\ &\Leftrightarrow t = \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{d - w^{-1}}{d - w}} \right). \end{aligned}$$

Concluimos que o ponto de máximo de $\Psi_{J,d}$ é $t_{J,d} = \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{d - w^{-1}}{d - w}} \right)$

e finalmente

$$\begin{aligned} h(J, d) &= \begin{cases} d\varphi_J(t_{J,d}) - t_{J,d}, & \text{se } J > J(d) \\ 0, & \text{se } J \leq J(d) \end{cases} \\ &= \begin{cases} d \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{dw - 1}{dw^{-1} - 1}} \right) - \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{d - w^{-1}}{d - w}} \right), & \text{se } J > J(d) \\ 0, & \text{se } J \leq J(d). \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos finalmente determinar a região de transição de fase. Iremos mostrar que

$$\{(J, h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : J > J(d), |h| > h(J, d)\}$$

é exatamente a região onde $|\mathcal{G}(J, h)| > 1$ no modelo de Ising ferromagnético na árvore da Cayley $\Gamma(d)$.

Mais ainda, relacionaremos o conjunto das medidas de Gibbs com o conjunto das medidas de Gibbs invariantes por translação: seja $I = I(\Gamma(d))$ o conjunto das transformações invariantes por translação, i.e., todas as transformações $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$ da forma $\tau(\omega) = (\omega_{\tau_*^{-1}(i)})_{i \in V}$ onde $\tau_* : V \rightarrow V$ é uma bijeção que satisfaz $\langle \tau_* i, \tau_* j \rangle$ sempre que $\langle i, j \rangle$.

Denotando por $\mathcal{M}_{1,I}(\Omega, \mathcal{F})$ o conjunto das medidas invariantes por transla-

ção, definimos

$$\mathcal{G}(J, h) = \mathcal{G}(J, h) \cap \mathcal{M}_{1,I}(\Omega, \mathcal{F})$$

o conjunto das medidas de Gibbs invariantes por translação. É importante notar que toda cadeia de Markov completamente homogênea é invariante por translação.

Para cada uma das soluções t_-, t_+, t_* e $t_{\#}$ dadas pelo Lema 2.2.1, associaremos, conforme a Proposição 2.2.1, as medidas μ_-, μ_+, μ_* e $\mu_{\#}$. [

Teorema 2.2.1. Considere o potencial de Ising ferromagnético com parâmetros $J > 0$ e $h \in \mathbb{R}$ na árvore de Cayley $\Gamma(d)$ de grau $d \geq 2$. Considere $J(d)$ e $h(J, d)$ definidos como anteriormente, então

- (a) Se $J \leq J(d)$ ou $|h| > h(J, d)$, então

$$\mathcal{G}(J, h) = \mathcal{G}_I(J, h) = \{\mu_*\}$$

- (b) caso contrário, temos

$$\mu_-, \mu_+ \in \text{ex}\mathcal{G}(J, h) \cap \text{ex}\mathcal{G}_I(J, h)$$

e

$$|\text{ex}\mathcal{G}(J, h) \setminus \text{ex}\mathcal{G}_I(J, h)| = \infty$$

Também é possível provar que se $|h| \leq h(J, d)$ então $\mu_{\#}$ também pertence a $\mathcal{G}_I(J, h)$. Como a prova usa uma teoria mais avançada de Cadeias de Markov, omitiremos a demonstração neste trabalho.

Demonstração. (1.) Primeiro, mostraremos que se t_- e t_+ são, respectivamente, a menor e a maior soluções de (2.16) (não estamos excluindo o caso $t_- = t_+ = t_*$) e $\{l_{ij} : ij \in B\}$ é uma lei de fronteira normalizada em -1 , denotando

$$t_{ij} = h(d+1)^{-1} + \frac{1}{2} \log l_{ij}(+) \quad \forall ij \in B,$$

então $t_- \leq t_{ij} \leq t_+$, para todo $ij \in B$.

De fato, fixada tal lei de fronteira temos que

$$t_{ij} = h + \sum_{k \in \partial i \setminus \{j\}} \varphi_J(t_{ki}) \quad \forall ij \in \vec{B}. \quad (2.20)$$

Omitiremos o cálculo que nos mostra essa equação, pois ele é totalmente análogo ao que nos mostra a equação 2.16. Lembre-se que φ_J é crescente e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_J(t) = J$, e assim

$$t_{ij} \leq h + dJ = \lim_{t \rightarrow +\infty} h + d\varphi_J(t) \quad \forall ij \in \vec{B}. \quad (2.21)$$

Denotemos $\psi = h + d\varphi_J$. Como (2.21) vale para qualquer $ij \in \vec{B}$ e φ_J é crescente, substituindo t_{ki} em (2.20) obtemos

$$t_{ij} \leq h + d\varphi_J(h + dJ) = \psi\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi^2(t) \quad \forall ij \in \vec{B}.$$

Repetindo esse processo n vezes obtemos

$$t_{ij} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi^n(t) \quad \forall ij \in \vec{B}. \quad (2.22)$$

Com isso, temos que a sequência $(\psi^n(\infty))_{n \in \mathbb{N}}$, onde $\psi^n(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi^n(t)$, é decrescente ($\psi^{n+1}(\infty) = \psi^n(\psi(\infty)) \leq \psi^n(\infty)$) e limitada por t_{ij} e portanto

$$t_{ij} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n(\infty) \leq t_+ \quad (2.23)$$

pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n(\infty)$ é um ponto fixo de ψ e t_+ é o maior dos pontos fixos. Um argumento análogo mostra a desigualdade $t_- \leq t_{ij}$.

(2.) Provemos agora (a). Suponha que $J \geq J(d)$ ou $|h| \geq h(J, d)$. Pelo lema 2.2.1, a equação (2.16) tem apenas uma solução t_* . Mas pelo passo anterior temos que $t_{ij} = t_*$ para qualquer outra condição de fronteira $\{l_{ij} : ij \in B\}$ e assim existe apenas uma cadeia de Markov em $\mathcal{G}(J, h)$ e pelo Teorema 2.1.1, $|\text{ex}\mathcal{G}(J, h)| = 1$. Isso implica que $|\mathcal{G}(J, h)| = 1$.

(3.) Suponha agora que $J > J(d)$ e $|h| \leq h(J, d)$ e então $t_- < t_+$. Vamos mostrar que $\mu_-, \mu_+ \in \text{ex}\mathcal{G}(J, h)$. Como μ_- e μ_+ são cadeias de Markov completamente homogêneas, isso implicará que $\mu_-, \mu_+ \in \mathcal{G}_I(J, h)$.

Seja $\mu \in \text{ex}\mathcal{G}(J, h)$ qualquer. Pelos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2, μ é cadeia de Markov e existe uma condição de fronteira $\{l_{ij} : ij \in B\}$ normalizada em -1 que representa μ como em (2.7). Assim, para $\Lambda \in V$ e $\sigma \in \Omega$ defina

$$\begin{aligned} r_{\Lambda, \sigma}(\mu) &= \frac{\mu(\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda})}{\mu((-1)_{\Lambda \cup \partial \Lambda})} \\ &= \prod_{k \in \partial \Lambda} l_{kk_\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\{i, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} \frac{Q(\sigma_i, \sigma_j)}{Q(-, -)}. \end{aligned}$$

Seja $\{l_{ij}^+ : ij \in B\}$ a lei de fronteira que define μ_+ . Pela parte (1.), $t_{ij} \leq t_+$ e portanto $l_{ij} \leq l_{ij}^+$ para todo $ij \in \vec{B}$. Daí $r_{\Lambda, \sigma}(\mu) \leq r_{\Lambda, \sigma}(\mu_+)$ para toda $\mu \in \text{ex}\mathcal{G}(J, h)$. Como toda $\mu \in \mathcal{G}(J, h)$ é combinação linear de convexas de elementos de $\text{ex}\mathcal{G}(J, h)$ e $r_{\Lambda, \sigma}$ é linear em $\text{ex}\mathcal{G}(J, h)$, essa desigualdade vale para toda $\mu \in \mathcal{G}(J, h)$. Note também que a linearidade de $r_{\Lambda, \sigma}$ no conjunto das medidas extremais implica a linearidade em $\mathcal{G}(J, h)$, pois toda $\mu \in \mathcal{G}(J, h)$ é combinação convexa de medidas extremais.

Suponha por absurdo que μ_+ não é extremal. Sejam $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}(J, h)$ e $\alpha \in (0, 1)$ tais que $\mu_+ = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$. Então, como $r_{\Lambda, \sigma}$ é linear,

$$\begin{aligned} r_{\Lambda, \sigma}(\mu_1) &\leq \alpha r_{\Lambda, \sigma}(\mu_1) + (1 - \alpha)r_{\Lambda, \sigma}(\mu_2) \\ \Rightarrow r_{\Lambda, \sigma}(\mu_1) &\leq r_{\Lambda, \sigma}(\mu_2). \end{aligned}$$

Analogamente conseguimos mostrar que $r_{\Lambda, \sigma}(\mu_2) \leq r_{\Lambda, \sigma}(\mu_1)$ e assim $r_{\Lambda, \sigma}(\mu_+) = r_{\Lambda, \sigma}(\mu_1) = r_{\Lambda, \sigma}(\mu_2)$ para todo $\Lambda \in V$ e $\sigma \in \Omega$ o que implica que $\mu_+ = \mu_1 = \mu_2$, pois somando sobre todas as configurações $\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ obtemos

$$\frac{1}{\mu_1((-1)_{\Lambda \cup \partial \Lambda})} = \frac{1}{\mu_2((-1)_{\Lambda \cup \partial \Lambda})} = \prod_{\{i, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} \frac{1}{Q(-, -)}$$

e assim

$$r_{\Lambda, \sigma}(\mu_+) = r_{\Lambda, \sigma}(\mu_1) \Rightarrow \mu_1(\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda}) = \mu_+(\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$$

Ánalogamente mostramos que $\mu_2 = \mu_+$ e que μ_- também é extremal.

(4.) Finalmente, mostraremos que $\text{ex}\mathcal{G}(J, h) \setminus \text{ex}\mathcal{G}_I(J, h)$ tem infinitos elementos quando $t_- \leq t_+$. Para isso, fixe $t \in]t_-, t_+[$ qualquer, diferente de $t_{\#}$ caso esse exista. Definimos a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ recursivamente tomando $t_1 = t$ e $t_{n+1} = h + d\varphi_J(t_n)$. Isso é possível pois a função $\psi = h + d\varphi_J$ é uma bijeção do intervalo $[t_-, t_+]$ nele mesmo ($\psi(t_-) = t_-$, $\psi(t_+) = t_+$ e ψ é estritamente crescente). A sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e converge para um dos pontos fixos. Fixemos uma raiz arbitrária $k \in V$ e definimos $t_{ij} = t_n$ se $d(k, i) = d(k, j) + 1 = n$. Isso define t_{ij} para todo $ij \in \vec{B}^k$. Para $ij \in \vec{B}$, t_{ij} é unicamente determinado pela equação de compatibilidade (2.20) (isso é fácil ver por indução em $d(k, i)$).

Assim, a família $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ definida como $l_{ij}(-) = 1$ e $l_{ij}(+) = \exp(2t_{ij} - 2h(d+1)^{-1})$ é uma lei de fronteira e a cadeia de Markov ν_t a ela associada pertence a $\mathcal{G}(J, h)$ mas não é completamente homogênea. Para concluir a demonstração, mostraremos que a família $\{\nu_t : t_- < t < t_+\}$ é linearmente independente e portanto, como toda ν_t é combinação linear de medidas extremas, $\text{ex}\mathcal{G}(J, h)$ tem infinitos elementos enquanto $\text{ex}\mathcal{G}_I(J, h)$ tem no máximo 3 elementos.

Suponha que $\nu_{t^{(0)}} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \nu_{t^{(n)}}$, com $\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in (0, 1)$ e $t_- < t^{(i)} < t_+$ para todo $i = 1, \dots, N$. Sejam $\{l_{ij}^{(1)} : ij \in \vec{B}\}, \dots, \{l_{ij}^{(N)} : ij \in \vec{B}\}$ as condições de fronteira associadas a, respectivamente, $\nu_{t^{(1)}}, \dots, \nu_{t^{(N)}}$. Se $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ é a condição de fronteira de $\nu_{t^{(0)}}$, vamos mostrar primeiro que para todo $ji \in \vec{B}^k$ e $n, m = 1, \dots, N$, $l_{ji}^{(n)} = \{l_{ji}^{(m)}\}$.

Para um tal $ji \in \vec{B}^k$ fixo, existe $j' \in \partial i$, $j' \neq j$ tal que $j'i \in \vec{B}^k$. Mais ainda, $d(j', k) = d(j, k)$ e assim, para todo $n = 1, \dots, N$, $t_{ji}^{(n)} = t_{j'i}^{(n)}$ o que implica que $l_{ji}^{(n)} = l_{j'i}^{(n)}$. Como todas as condições de fronteira são normalizadas em -1 , se escolhermos $\Lambda = \{i\}$ em (2.7) e calcularmos na configuração onde todos os vértices são -1 exceto em j e j' , obtemos

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_j \sigma_{j'} (-1)_{\{i\} \cup \partial i \setminus \{j, j'\}}) &= Z_i \prod_{k \in \partial i \setminus \{j, j'\}} l_{ki}(-1) l_{ji}(\sigma_j) l_{j'i}(\sigma_{j'}) \prod_{j \in \partial i} Q_{\{i, j\}}(\sigma) \\ &= Z_i l_{ji}(\sigma_j) l_{j'i}(\sigma_{j'}) \prod_{j \in \partial i} Q_{\{i, j\}}(\sigma) \\ &= \sum_{n=1}^N \alpha_n Z_i^n l_{ji}^{(n)}(\sigma_j) l_{j'i}^{(n)}(\sigma_{j'}) \prod_{j \in \partial i} Q_{\{i, j\}}(\sigma). \end{aligned}$$

Assim, como $l_{ji}^{(n)} = l_{j'i}^{(n)}$, se nomearmos $c_n = Z_i^n / Z_i$ obtemos

$$l_{ji}(\sigma_j) l_{j'i}(\sigma_{j'}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n c_n l_{ji}^{(n)}(\sigma_j) l_{j'i}^{(n)}(\sigma_{j'}) \quad (2.24)$$

para quaisquer configurações $\sigma_j, \sigma_{j'} \in \{-1, +1\}$. Escolhendo uma das configurações como -1 , obtemos

$$l_{ji}(x) = l_{j'i}(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n c_n l_{ji}^{(n)}(x).$$

Observe por fim que

$$\sum_{n,m=1}^N \alpha_m \alpha_n c_m c_n [l_{ji}^{(m)}(\sigma_j) - l_{ji}^{(n)}(\sigma_j)] = 0. \quad (2.25)$$

De fato, a equação acima é equivalente à

$$\sum_{n,m=1}^N \alpha_m \alpha_n c_m c_n l_{ji}^{(m)}(\sigma_j) l_{ji}^{(n)}(\sigma_j) = \sum_{n,m=1}^N \alpha_m \alpha_n c_m c_n l_{ji}^{(m)}(\sigma_j) l_{ji}^{(n)}(\sigma_j).$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^N \alpha_m \alpha_n c_m c_n l_{ji}^{(m)}(\sigma_j) l_{ji}^{(n)}(\sigma_j) &= \sum_{n,m=1}^N \left(\alpha_m c_m l_{ji}^{(m)}(\sigma_j) l_{ji}^{(m)}(-1) \right) \left(\alpha_n c_n l_{ji}^{(n)}(\sigma_j) l_{ji}^{(n)}(-1) \right) \\ &= \left(\sum_{m=1}^N \alpha_m c_m l_{ji}^{(m)}(\sigma_j) l_{ji}^{(m)}(-1) \right) \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n c_n l_{ji}^{(n)}(\sigma_j) l_{ji}^{(n)}(-1) \right) \\ &= (l_{ji}(\sigma_j) l_{j'i}(-1))^2 = l_{ji}(\sigma_j)^2, \end{aligned}$$

e por outro

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^N \alpha_m \alpha_n c_m c_n l_{ji}^{(m)}(\sigma_j) l_{ji}^{(n)}(\sigma_j) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n c_n l_{ji}(\sigma_j) l_{j'i}(\sigma_j) \\ &= l_{ji}(\sigma_j)^2 \sum_{n=1}^N \alpha_n c_n l_{ji}(-1) l_{ji}(-1) = l_{ji}(\sigma_j)^2 l_{ji}(-1)^2 = l_{ji}(\sigma_j)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, de (2.25), concluímos que $l_{ji}^{(n)} = l_{ji}^{(m)}$ para todo $n, m = 1, \dots, N$ e $ji \in \vec{B}^k$ e assim, $l_{ji} = l_{ji}^{(n)}$. A igualdade para $ij \in \vec{B}^k$ segue da construção de l_{ij} , que depende apenas dos elos em \vec{B}^k . Isso mostra que $\nu_{t(0)} = \nu_{t(n)}$ para $n = 1, \dots, N$, que conclui a prova que $\{\nu_t : t_- < t < t_+\}$ é linearmente independente. \square

Dá demonstração do Teorema 2.2.1, mais especificamente da parte (4.) da demonstração, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.1. Sejam γ uma especificação Markoviana positiva completamente homogênea e $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{G}(\gamma)$ cadeias de Markov distintas associadas as leis de fronteira $\{l_{ij}^{(1)} : ij \in \vec{B}\}, \dots, \{l_{ij}^{(N)} : ij \in \vec{B}\}$ normalizadas em um estado $a \in E$. Se para todo $ij \in \vec{B}$ existe um $k \in \partial i \setminus \{j\}$ tal que $l_{ji}^{(n)} = l_{ki}^{(n)}$ para todo $n \in \{1, \dots, N\}$ então toda combinação convexa das medidas μ_1, \dots, μ_N não pode ser uma cadeia de Markov.

Capítulo 3

Cadeias de Markov Invariantes por Translação para o Modelo de Potts

Neste capítulo, semelhante ao que fizemos no capítulo anterior para o modelo de Ising, encontraremos todas as medidas de Gibbs invariantes por translação que são cadeias de Markov no modelo de Potts na árvore de Cayley de grau $d \geq 2$. Trataremos apenas o caso ferromagnético com campo externo nulo. Como antes, é importante notar que essas medidas não são necessariamente extremas no conjunto das medidas de Gibbs, mas o são no subconjunto das medidas invariantes por translação, que será mostrado no final do capítulo.

3.1 Leis de Fronteira do Modelo de Potts

Lembre-se que no modelo de Potts o espaço de estados é $E = \{1, \dots, q\}$ e o potencial é dado por

$$\Phi_A = \begin{cases} -J\delta_{\sigma_i\sigma_j}, & \text{se } A = \{i, j\} \text{ e } \langle i, j \rangle \\ -h\delta_{1\sigma_i}, & \text{se } A = \{i\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Aqui, consideraremos o caso ferromagnético ($J > 0$) com campo externo nulo ($h = 0$). Denotaremos por $\mathcal{G}_\beta(J) = \mathcal{G}_\beta(\gamma^\Phi)$ o conjunto das medidas de Gibbs com inverso da temperatura $\beta > 0$. Já o conjunto das medidas em $\mathcal{G}_\beta(J)$ que são invariantes por translação será denotado $\mathcal{G}_{IT}(J, \beta)$. Novamente, a especificação γ^Φ associadas a esse potencial é Markoviana e completamente homogênea com

$$Q_{\{i,j\}}(\sigma) = \exp\{\beta J\delta_{\sigma_i\sigma_j}\}, \quad \forall i, j \in \Gamma^d,$$

e assim a matriz de transição Q é dada por

$$Q(i, j) = \exp\{\beta J\delta_{\sigma_i\sigma_j}\}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, q\}. \quad (3.1)$$

Como anteriormente, pelo Corolário 2.1.1, existe uma relação biunívoca entre

as cadeias de Markov em $\mathcal{G}_{IT}(J, \beta)$ e as soluções de

$$\begin{aligned} l(i) &= \left[\frac{lQ(i)}{lQ(q)} \right]^d = \left[\frac{\sum_{j=1}^q l(j)Q(j, i)}{\sum_{j=1}^q l(j)Q(j, q)} \right]^d \\ &= \left[\frac{(e^{\beta J} - 1)l(i) + \sum_{j=1}^{q-1} l(j) + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} l(j) + e^{\beta J}} \right]^d, \quad i = 1, 2, \dots, q-1 \end{aligned}$$

considerando que a lei de fronteira está normalizada em q . Assim, denotando $\theta = \exp\{\beta J\}$, achas as cadeias de Markov em $\mathcal{G}_{IT}(J, \beta)$ equivale a achar as soluções de

$$z_i = \left[\frac{(\theta - 1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right]^d, \quad i = 1, 2, \dots, q-1 \quad (3.2)$$

Nomeando $b_i = \ln z_i$, $i = 1, \dots, q-1$, a equação acima é equivalente à

$$h_i = d \ln \left[\frac{(\theta - 1)e^{b_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{b_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{b_j}} \right], \quad i = 1, 2, \dots, q-1 \quad (3.3)$$

Comecemos com a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. Dada $z = (z_1, z_2, \dots, z_{q-1})$ solução do sistema (3.2), existe $M \subset \{1, 2, \dots, q-1\}$ e $z^* > 0$ tal que

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i \notin M \\ z^*, & \text{if } i \in M \end{cases}$$

Demonstração. É fácil ver que $z_i = 1$ é solução da i -ésima equação do sistema. Definimos então $M = \{i \in \{1, 2, \dots, q-1\} : z_i \neq 1\}$. SPG podemos assumir $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \leq q-1$, assim $z_i = 1$ para $i = m+1, \dots, q-1$. Vamos agora provar que $z_1 = \dots = z_m$.

Para cada $i \in \{1, \dots, q-1\}$ denote $x_i = \sqrt[d]{z_i}$, e de (3.2) obtemos, para $1 \leq i \leq m$

$$x_i = \frac{(\theta - 1)x_i^d + \sum_{u=1}^{q-1} x_u^d + 1}{\theta + \sum_{u=1}^{q-1} x_u^d} = \frac{(\theta - 1)x_i^d + \sum_{u=1}^m x_u^d + q - m}{\theta + \sum_{u=1}^m x_u^d + q - m - 1}.$$

Como $x_i = 1$ é raiz desse polinômio somos levados a calcular

$$\begin{aligned}
x_i - 1 &= \frac{(\theta - 1)x_i^d - \theta + 1}{\theta + \sum_{u=1}^m x_u^d + q - m - 1} \\
\Leftrightarrow (\theta - 1)(x_i - 1) + (x_i - 1)\left(\sum_{u=1}^m x_u^d + q - m\right) &= (\theta - 1)(x_i^d - 1) \\
\Leftrightarrow (\theta - 1) &= \frac{(x_i - 1)(\sum_{u=1}^m x_u^d + q - m)}{x_i^d - x_i} = \frac{\sum_{u=1}^m x_u^d + q - m}{x_i(x_i^{d-2} + x_i^{d-3} + \dots + 1)}
\end{aligned}$$

na última igualdade usamos a identidade

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i} b^i \right).$$

Mas por essa igualdade temos que para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $x_i(x_i^{d-2} + x_i^{d-3} + \dots + 1) = x_j(x_j^{d-2} + x_j^{d-3} + \dots + 1)$ e portanto $x_i = x_j$. \square

Com essa proposição vemos que para cada solução de

$$z = f_m(z) = \left[\frac{(\theta + m - 1)z + q - m}{mz + q - m - 1 + \theta} \right]^d \quad (3.4)$$

com $m = 1, 2, \dots, q - 1$, podemos associar $\binom{q-1}{m}$ cadeias de Markov invariantes por translação em $\mathcal{G}_\beta(J)$. Mais ainda, o seguinte lema nos mostra que basta conhecer as soluções de (3.4) para $m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ (aqui, $\lfloor a \rfloor$ é o maior inteiro menor que a).

Lema 3.1.1. Se z_{m_1} é uma solução de (3.4) com $m = m_1$, então $z_{m_1}^{-1}$ é solução de (3.4) com $m = q - m_1$.

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned}
f_m(z) &= \left[\frac{(\theta + m - 1)z + q - m}{mz + \theta + q - m - 1} \right]^d \\
&= \left[\frac{\theta + m - 1 + (q - m)z^{-1}}{m + (\theta + q - m - 1)z^{-1}} \right]^d = \frac{1}{f_{q-m}(z^{-1})}.
\end{aligned}$$

\square

3.2 Medidas Invariantes para o Modelo de Potts

Estamos prontos para demonstrar o principal teorema desse capítulo. Chamaremos as cadeias de Markov em $\mathcal{G}_{IT}(J, \beta)$ de Medidas de Gibbs Splitting Invariantes por Translação (MGSIT).

Teorema 3.2.1. Para o modelo de Potts ferromagnético ($J > 0$) na árvore de Cayley, de ordem $d \geq 2$, existem temperaturas críticas $T_{c,m} = T_{c,m}(d, q)$, $m = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ tais que

1. $T_{c,1} > T_{c,2} > \dots > T_{c, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \geq T_{cr}$;
2. Se $T > T_{c,1}$, existe uma única MGSIT;
3. Se $T_{c,m+1} < T < T_{c,m}$ para algum $m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 1$, existem $1 + 2 \sum_{s=1}^m \binom{q}{s}$ MGSIT;
4. Se $T_{cr} \neq T < T_{c, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$, existem $2^q - 1$ MGSIT;
5. Se $T = T_{cr}$, o número de MGSIT é $\begin{cases} 2^{q-1}, & \text{se } q \text{ é ímpar} \\ 2^{q-1} - \binom{q-1}{q/2}, & \text{se } q \text{ é par} \end{cases}$

Provaremos primeiro quando $d = 2$ pois neste caso obtemos fórmulas explícitas para as temperaturas críticas

$$T_{c,m} = T_{c,m}(2, q) = \frac{J}{\ln \left(1 + 2\sqrt{m(q-m)} \right)}, \quad m = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor. \quad (3.5)$$

Denotemos novamente $x = \sqrt{z}$. Como vimos anteriormente, na demonstração da Proposição 3.1.1, (3.4) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} (\theta - 1) &= \frac{mx^d + q - m}{x(x^{d-2} + x^{d-3} + \dots + 1)} = \frac{mx^2 + q - m}{x} \\ \Leftrightarrow \quad mx^2 - (\theta - 1)x + q - m. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esse polinômio tem raízes

$$x_1(m) = \frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 4m(q-m)}}{2m}, \quad x_2(m) = \frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 4m(q-m)}}{2m}$$

se $\theta > \theta_m = 1 + 2\sqrt{m(q-m)}$, $m = 1, 2, \dots, q-1$, e como $\theta_m = \exp(J/T_{c,m})$, obtemos (3.5).

Algumas observações importantes são:

Observação 2. (i) Se $x > 0$ é uma solução de (3.6) para $m = m_1$ e $m = m_2$ com $m_1 \neq m_2$ então $x = 1$.

De fato, se x satisfaz

$$mx_1^2 - (\theta - 1)x + q - m_1, \quad m_2x^2 - (\theta - 1)x + q - m_2$$

então, subtraindo as equações acima obtemos $(m_1 - m_2)(x^2 - 1) = 0$ e portanto $x = 1$.

(ii) As raízes $x_1(m)$ e $x_2(m)$ são diferentes de 1 se $\theta \neq q + 1$.

Suponha que $x_1(m) = 1$, então

$$\begin{aligned} 2m &= (\theta - 1) - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 4m(q - m)} \\ \Rightarrow (2m - (\theta - 1)^2) &= (\theta - 1)^2 - 4m(q - m) \\ \Rightarrow 4m^2 - 4m(\theta - 1) &= -4m(q - m) \\ \Rightarrow m - (\theta - 1) &= m - q \Rightarrow \theta = q + 1. \end{aligned}$$

A prova para $x_2(m)$ é análoga.

(iii) Se $\theta = q + 1$ então

$$x_1(m) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq 2m \\ \frac{q}{m} - 1, & \text{se } q < 2m \end{cases}, \quad x_2(m) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \leq 2m \\ \frac{q}{m} - 1, & \text{se } q > 2m \end{cases}.$$

Em particular, $x_1(m) = x_2(m) = 1$ se $q = 2m$.

De fato, como $\theta = q + 1$,

$$\begin{aligned} x_1(m) &= \frac{q - \sqrt{q^2 - 4mq + 4m^2}}{2m} \\ &= \frac{q - \sqrt{(q - 2m)^2}}{2m} = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq 2m \\ \frac{q}{m} - 1, & \text{se } q < 2m \end{cases} \end{aligned}$$

e novamente, a prova para $x_2(m)$ é totalmente análoga.

(iv) $\theta_m = \theta_{q-m}$ e $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \leq q + 1$.

Com essas observações podemos provar a seguinte proposição

Proposição 3.2.1. Seja $d = 2$ e $J > 0$

1. Se $\theta < \theta_1$ então o sistema de equações (3.3) tem uma solução única $b_0 = (0, \dots, 0)$;
2. Se $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$ para algum $m = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 1$ então o sistema de equações (3.3) tem soluções

$$\begin{aligned} b_0 = 0, \quad b_{1i}(s), \quad b_{2i}(s), & \quad i = 1, \dots, \binom{q-1}{s} \\ b'_{1i}(q-s), \quad b'_{2i}(q-s), & \quad i = 1, \dots, \binom{q-1}{q-s}, \end{aligned}$$

com $s = 1, 2, \dots, m$, onde b_{ji} (resp. b'_{ji}), $j = 1, 2$, é um vetor com s (resp. $q-s$) entradas iguais a $2 \ln x_j(s)$ (resp. $2 \ln x_j(q-s)$) e as outras $q-1-s$ (resp. $s-1$) entradas restantes iguais a zero. O número de soluções dessa forma é

$$1 + 2 \sum_{s=1}^m \binom{q}{s};$$

3. Se $\theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} < \theta \neq q + 1$, existem $2^q - 1$ soluções para (3.3);

4. Se $\theta = q + 1$ então o número de soluções para (3.3) é

$$\begin{cases} 2^{q-1}, & \text{se } q \text{ é ímpar} \\ 2^{q-1} - \binom{q-1}{q/2}, & \text{se } q \text{ é par} \end{cases}$$

5. Se $\theta = \theta_m$, $m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, ($\theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \neq q + 1$) então $b_{1i}(m) = b_{2i}(m)$ e o número de soluções de (3.3) é

$$1 + \binom{q}{m} + 2 \sum_{s=1}^{m-1} \binom{q}{s}$$

Demonstração. 1. Trivial, pois todas as raízes $x_1(m)$ e $x_2(m)$ são imaginárias

2. Se $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$ para algum $m = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 1$, pela observação (i), todas as raízes $x_1(s)$ e $x_2(s)$ com $s = 1, \dots, m$ são reais e distintas e para cada uma dessas raízes existem $\binom{q-1}{s}$ soluções de (3.3). Mas pela Observação 2.(iv), $\theta_{q-m-1} > \theta > \theta_{q-m} > \dots > \theta_{q-1}$ e por um argumento totalmente análogo, para cada $s = 1, \dots, m$ e cada uma das duas raízes $b_1(q-s)$ e $b_2(q-s)$, existem $\binom{q-1}{q-s}$ soluções de (3.3). Como ainda temos a solução trivial $b_0 = 0$, o número de total de soluções fica

$$1 + 2 \sum_{s=1}^m \left(\binom{q-1}{s} + \binom{q-1}{q-s} \right) = 1 + 2 \sum_{s=1}^m m \binom{q}{s}.$$

3. Caso $\theta > \theta_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$ se q for ímpar não teremos nenhum $m \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor\}$ satisfazendo $m = q - m$ e portanto o número de soluções é $1 + 2 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{q}{s} = 2^q - 1$

Agora, se q é par, $m = \frac{q}{2} = q - m$ e assim as soluções $x_1(m)$ e $x_1(q - m)$ são iguais, assim como $x_2(m)$ e $x_2(q - m)$. Portanto, o número de soluções é

$$1 + \binom{q}{q/2} + 2 \sum_{s=1}^{q/2-1} = 2^q - 1$$

4. Neste caso, pela Observação 2.(iii) apenas uma das raízes será diferente de 1 e assim, similar ao caso anterior, teremos

$$\begin{cases} 1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{q}{s}, & \text{se } q \text{ é ímpar} \\ 1 + \sum_{s=1}^{\frac{q}{2}-1} \binom{q}{s} = 2^{q-1} - \binom{q-1}{q/2}, & \text{se } q \text{ é par} \end{cases}$$

soluções. Na última igualdade usamos que $\frac{1}{2} \binom{q}{q/2} = \binom{q-1}{q/2}$ e portanto

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{s=1}^{\frac{q}{2}-1} &= \frac{1 + 1 + 2 \sum_{s=1}^{q-1} \binom{q}{s}}{2} \\ &= \frac{1 + 2^q - 1 - \binom{q}{q/2}}{2} = 2^{q-1} - \binom{q-1}{q/2}. \end{aligned}$$

5. No valor crítico $\theta = \theta_m$, a equação (3.6) tem apenas uma solução e portanto o número total de soluções é semelhante ao caso 2., bastando omitir o fator 2 de $\binom{q}{m}$. Obtemos então

$$1 + \binom{q}{m} + \sum_{s=1}^{m-1} \binom{q}{s} \quad \text{soluções.}$$

□

Finalmente podemos demonstrar o Teorema 3.2.1, usando passos semelhantes as Observações 2 agora para um $d \geq 3$ qualquer.

Proof of Theorem 3.2.1. Passo 1. Mostraremos primeiro que para cada $m = 1, \dots, q-1$ a equação (3.4) tem no máximo 3 soluções. Tomando $x = \sqrt[d]{z}$, como feito na demonstração da Proposição 3.1.1, podemos reescrever (3.4) como

$$\begin{aligned} (\theta - 1) &= \frac{(x-1)(mx^d + q - m)}{x^d - x} = \frac{(x-1)(mx^d + q - m)}{x(x-1)(x^{d-2} + \dots + 1)} \\ \Leftrightarrow (x-1)(mx^d) + q - mx(x^{d-2} + \dots + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Nomeando

$$\varphi_m(x, \theta) = mx^d - (\theta - 1)(x^{d-1} + x^{d-2} + \dots + 1) + q - m$$

obtemos que (3.4) é equivalente a

$$(x-1)\varphi_m(x, \theta) = 0.$$

É um resultado conhecido que o número de raízes positivas de um polinômio não ultrapassa o número de vezes que os coeficientes mudam de sinal, veja por exemplo [7], e por isso a equação

$$\varphi_m(x, \theta) = 0 \tag{3.7}$$

tem no máximo duas soluções positivas.

Passo 2. Neste passo vamos mostrar o análogo das Observações 2.(i) e 2.(ii) para quando d é geral. Mostremos primeiro que se $x > 0$ é solução de (3.7) para $m = m_1$ e $m = m_2$ com $m_1 \neq m_2$ então $x = 1$.

De fato, para um tal x , subtraindo $\varphi_{m_2}(x, \theta)$ de $\varphi_{m_1}(x, \theta)$ obtemos $(m_2 - m_1)(x^d - 1) = 0$ e portanto $x = 1$.

Agora, $x = 1$ é uma das soluções de (3.7) se e somente se $\varphi_m(1, \theta) = 0 \Leftrightarrow -(\theta - 1)(d - 1) + q = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_c = \frac{d+q-1}{d-1}$. Mais ainda, assumindo que $x = 1$ é uma solução de (3.7), podemos dividir o polinômio $\varphi_m(x, \theta)$ por $x - 1$ obtendo

$$\begin{aligned} \psi_m(x, \theta_c) &= \frac{\varphi_m(x, \theta_c)}{x - 1} = \frac{m(x^d - 1) - (\theta - 1)(x^{d-1} + \dots + x) + q}{(x - 1)} \\ &= \frac{m(x - 1)(x^{d-1} + \dots + 1) - \frac{q}{d-1}(x^{d-1} + \dots + x) + q}{(x - 1)} \\ &= m \sum_{i=0}^{d-1} x^i - \frac{q}{d-1} \left[\frac{x(x^{d-2} + \dots + 1) - (d-1)}{x-1} \right] \\ &= m \sum_{i=0}^{d-1} x^i - \frac{q}{d-1} \left[\frac{(x^d - 1) - d(x-1)}{(x-1)^2} \right] \\ &= m \sum_{i=0}^{d-1} x^i - \frac{q}{d-1} \left[\sum_{i=0}^{d-2} (d-1-i)x^i \right] \end{aligned}$$

e assim a segunda solução de (3.7) será 1 se e somente se $\psi_m(1, \theta_c) = 0 \Leftrightarrow md = \frac{q}{d-1} \left[\frac{(d-1+1)(d-1)}{2} \right] \Leftrightarrow q = 2m$.

Passo 3. Mostraremos agora que existe um único valor crítico θ_m tal que a equação $\varphi_m(x, \theta_m) = 0$ tem uma única solução. Note que, fixado $\theta \in \mathcal{R}^+$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_m(x, \theta) = +\infty$ e portanto existe um ponto de mínimo local de $\varphi_m(x, \theta)$ em $]0, +\infty[$. Além disso, como

$$\varphi'_m(x, \theta) = mdx^{d-1} - (\theta - 1) [(d-1)x^{d-2} + (d-2)x^{d-3} + \dots + 1] \quad (3.8)$$

pelo teorema mencionado anteriormente, φ'_m tem no máximo uma raiz e portanto o ponto de mínimo de $\varphi_m(x, \theta)$ é único, mais ainda, $\varphi_m(x, \theta) = 0$ tem uma solução única quando esse ponto mínimo é zero.

Tome θ_m tal que $\varphi_m(x, \theta)$ tenha valor mínimo zero (a existência de um tal θ_m se dá pela continuidade de φ_m em relação a θ e ao fato de que para valores suficientemente grandes, resp. pequenos, de θ o valor mínimo de $\varphi(x, \theta)$ é negativo, resp. positivo). Então existe x que satisfaz

$$\begin{cases} \varphi_m(x, \theta_m) = 0 \\ \varphi'_m(x, \theta_m) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Esse sistema de equações nos dá também a unicidade de θ_m , pois da primeira equação obtemos

$$(\theta_m - 1) = \frac{mx^d + .q - m}{x^{d-1} + x^{d-2} + \dots + x} \quad (3.10)$$

e substituindo na segunda equação obtemos

$$\begin{aligned}
& md(x^{2(d-1)} + x^{2(d-1)-1} + \dots + x^d) - m \left[(d-1)x^{2(d-1)} + \dots + x^d \right] \\
& \quad - (q-m) \left[(d-1)x^{d-2} + \dots + 1 \right] \\
& m \sum_{i=1}^{d-1} ix^{2d-i-1} - (q-m) \sum_{i=1}^{d-1} ix^{i-1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Como o polinômio acima tem uma única raiz, digamos $x = x_* = x_*(m)$, o valor crítico θ_m é dado, unicamente, substituindo em (3.10)

$$\theta_m = 1 + \frac{mx_*^d + q - m}{x_*^{d-1} + \dots + x_*} \tag{3.12}$$

Passo 4. Mostraremos agora algo análogo a Observação 2.(iv). Definindo a temperatura crítica $T_{c,m} = J/\ln(\theta_m)$ temos a igualdade $T_{c,m} = T_{c,q-m}$ ($\theta_m = \theta_{q-m}$). Isso segue diretamente da igualdade

$$\varphi_m(x, \theta) = x^d \varphi_{q-m}(x^{-1}, \theta).$$

Vamos então mostrar que a temperatura crítica $T_{c,m}$ é uma função decrescente de $m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ e portanto elas são distintas. Para provar isto, mostraremos que x_* é uma função decrescente de m e que θ_m é uma função decrescente de x_* , e assim, θ_m é uma função crescente de m .

Pela equação (3.11), podemos escrever m como função de x_* :

$$m = \xi(x_*) \text{ com } \xi(x) = q \frac{\sum_{i=1}^{d-1} ix^{i-1}}{\sum_{i=1}^{d-1} i(x^{i-1} + x^{2d-i-1})}.$$

Derivando, por uma simples aplicação da regra do quociente, obtemos

$$\xi'(x) = -q \frac{\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{d-1} ij(2d-i-j)x^{2d+i-j-3}}{\left(\sum_{i=1}^{d-1} i(x^{i-1} + x^{2d-i-1}) \right)^2} < 0,$$

e portanto m é uma função decrescente de x_* . Consequentemente, $x_* = \xi^{-1}(m)$ é uma função decrescente de m .

Agora vamos escrever θ_m como uma função de x_* , substituindo $m = \xi(x_*)$ em (3.12):

$$\theta_m = \eta(x_*) = 1 + \frac{\xi(x_*)(x_*^d - 1) + q}{\sum_{i=1}^{d-1} x_*^i}. \tag{3.13}$$

Derivando obtemos

$$\eta'(x) = \frac{\xi'(x)(x^d - 1) \sum_{i=1}^{d-1} x^i + \xi(x) \sum_{i=1}^{d-1} ((d-i)x^{d+i-1} + ix^{i-1}) - q \sum_{i=1}^{d-1} ix^{i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{d-1} x^i \right)^2}.$$

Substituindo as fórmulas para $\xi(x)$ e $\xi'(x)$ na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \eta'(x) = & -\frac{q}{\left(\sum_{i=1}^{d-1} x^i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} i(x^{i-1} + x^{2d-i-1})\right)^2} \times \\ & \times \left[(x^d - 1) \left(\sum_{i=1}^{d-1} x^i\right) \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{d-1} ij(2d-i-j)x^{2d+i-j-3}\right) + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{i=1}^{d-1} ix^{i-1}\right) \left(\sum_{i=1}^{d-1} i(x^{i-1} + x^{2d-i-1})\right) \left(\sum_{i=1}^{d-1} (ix^{2d-i-1} - (d-i)x^{d+i-1})\right) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

mas

$$\sum_{i=1}^{d-1} (ix^{2d-i-1} - (d-i)x^{d+i-1}) = \sum_{i=1}^{d-1} ix^{2d-i-1} - \sum_{i'=1}^{d-1} i'x^{2d-i'-1} = 0$$

com $i' = d - i$, e portanto, de (3.14) obtemos

$$\eta'(x) = -q \frac{(x^d - 1) \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{d-1} ij(2d-i-j)x^{2d+i-j-3}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{d-1} x^i\right) \left(\sum_{i=1}^{d-1} i(x^{i-1} + x^{2d-i-1})\right)^2}. \quad (3.15)$$

Note agora que $\xi(1) = q/2$ e assim, como ξ é decrescente, para $m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ temos $x_*(m) > 1$ e portanto $\eta(x_*(m)) < 0$. Assim, θ_m é uma função decrescente de x_* , como queríamos demonstrar. Mais ainda,

$$\max_{x \geq 1} \eta(x) = \eta(1) = \theta_c = 1 + \frac{q}{d-1}, \quad (3.16)$$

e usando a fórmula $\theta_m = \exp(J/T_{c,m})$ obtemos $T_{c,1} > T_{c,2} > \dots > T_{c, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \geq T_{cr}$.

Passo 5. Iremos finalmente calcular o numero de MGSIT. Nos passos acima mostramos que, para qualquer $m = 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, se $T > T_{c,m}$ a equação (3.4) tem uma única solução $x = 1$, se $T = T_{c,m}$ a equação (3.4) tem duas soluções $x = 1$ e $x = x'$ e se $T < T_{c,m}$ a equação tem três soluções distintas $x = 1$, $x = x'$ e $x = x''$. Note que esse número de soluções independe de d e assim o número de soluções é igual ao caso $d = 2$ e da mesma forma que fizemos na Proposição 3.2.1 obtemos o número de MGSIT. \square

Por último, podemos mostrar um teorema que nos mostra uma certa extremalidade das MGSIT.

Teorema 3.2.2. Se \mathcal{G}_{IT} denota o conjunto das MGSIT, então toda medida $\mu \in \mathcal{G}_{IT}$ é ponto extremal do fecho convexo de \mathcal{G}_{IT} .

Esse teorema diz, de modo equivalente, que nenhuma medida $\mu \in \mathcal{G}_{IT}$ é combinação convexa de outras medidas em $\mathcal{G}_{IT} \setminus \{\mu\}$. É importante notar que isso não impede que μ seja combinação linear de medidas de Gibbs não invariantes por translação.

Demonstração. A demonstração é uma aplicação simples do Corolário 2.2.1. Suponha que $\mu \in \mathcal{G}_{IT}$ seja escrita como

$$\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i, \quad (3.17)$$

com $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\alpha_i \in (0, 1)$ e $\mu_i \in \mathcal{G}_{IT}$ para todo $j = 1, \dots, n$. Como as medidas μ_i são invariantes por translação, suas condições de fronteira claramente satisfazem as hipóteses do Corolário 2.2.1 e portanto μ não pode ser cadeia de Markov. \square

Apêndice A

Teorema de Extensão de Kolmogorov

Dedicaremos esta sessão à demonstrar, segundo [8], o teorema de extensão de Kolmogorov, teorema fundamental para a mecânica estatística clássica. Iremos primeiro revisar alguns conceitos importantes.

Dado uma família de conjuntos $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$, definimos o produto cartesiano $X_A = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ como o conjunto de todas as $|A|$ -uplas $x_A = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ indexadas por A , com $x_\alpha \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

Para $\beta \in A$ qualquer definimos $\pi_\beta : X_A \rightarrow X_\beta$ a projeção canônica de X_A em X_β , i.e., $\pi((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = x_\beta$. Mais geralmente, dado $B \subset A$ podemos definir a projeção $\pi_B : X_A \rightarrow X_B$ da maneira esperada, $\pi_B((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = (x_\beta)_{\beta \in B}$. Mais ainda, para $C \subset B \subset A$ podemos definir a subprojeção $\pi_{C \leftarrow B} : X_B \rightarrow X_C$ como $\pi_{C \leftarrow B}((x_\beta)_{\beta \in B}) = (x_\alpha)_{\alpha \in C}$. Note que estas projeções satisfazem a lei de composição $\pi_{D \leftarrow C} \circ \pi_{C \leftarrow B} = \pi_{D \leftarrow B}$ para quaisquer $D \subset C \subset B \subset A$.

Agora, dado uma σ -álgebra \mathcal{B}_β de X_β , podemos fazer o pullback por π_β e obter a σ -álgebra de X_A

$$\pi_\beta^*(\mathcal{B}_\beta) = \{\pi_\beta^{-1}(E_\beta) : E_\beta \in \mathcal{B}_\beta\}.$$

Podemos agora definir a σ -álgebra produto

$$\mathcal{B}_A = \prod_{\beta \in A} \mathcal{B}_\beta \doteq \sigma(\cup_{\beta \in A} \pi_\beta^*(\mathcal{B}_\beta)).$$

Duas propriedades importantes da σ -álgebra produto são:

- \mathcal{B}_A é a menor σ -álgebra que faz com que π_β seja mensurável para todo $\beta \in A$
- Para cada $B \subset A$, a função $\pi_B : X_A \rightarrow X_B$ é mensurável.
- Se A é enumerável, \mathcal{B}_A é a σ -álgebra gerada pelos retângulos.

Vamos agora construir medidas no espaço (X_A, \mathcal{B}_A) . Dada uma medida qualquer μ_A neste espaço, podemos induzir medidas pushforward $\mu_B \doteq (\pi_B)_* \mu_A$, isto é,

$$\mu_B(E_B) = \mu_A(\pi_B^{-1}(E_B)), \quad \forall E_B \in \mathcal{B}_B.$$

Estas medidas obedecem

$$(\pi_{C \leftarrow B})_* \mu_B = \mu_C \quad \text{sempre que } C \subset B \subset A \quad (\text{A.1})$$

Chamaremos essa propriedade de *compatibilidade*. O que o teorema de Kolmogorov diz é que conhecendo as medidas $\{\mu_B : B \subset A, B \text{ finito}\}$, se essas forem de probabilidade e satisfizerem uma propriedade que chamaremos de *inner regular*, então a medida μ_A existe e é única.

Definição A.0.1. (Inner Regular) Um espaço de medida *inner regular* (X, \mathcal{B}, μ, d) é um espaço de medida (X, \mathcal{B}, μ) munido de uma métrica d que satisfaz:

1. Todo conjunto compacto é mensurável.
2. $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$, para todo E mensurável.

Dizemos que uma medida μ é *inner regular* se ela está associada a um espaço de medida inner regular. Muitas medidas importantes são inner regular, a saber as medidas de Lebesgue, de Dirac, de contagem, de Radon, assim como toda medida de Borel finita em \mathbb{R}^d .

Uma ferramenta fundamental na demonstração do teorema de extensão de Kolmogorov é o teorema de extensão de pré-medidas de Hahn-Kolmogorov. Para enunciar este teorema precisamos de duas definições.

Definição A.0.2. (Álgebra) Dado um conjunto X , uma *álgebra* em X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{B}$.
- (ii) $E \in \mathcal{B} \Rightarrow E^c = X \setminus E \in \mathcal{B}$.
- (iii) $E, F \in \mathcal{B} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{B}$.

Definição A.0.3. (Pré-medida) Uma *pré-medida* em uma álgebra \mathcal{B}_0 é uma medida $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, \infty]$ finitamente aditiva que satisfaz $\mu_0(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$ sempre que $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma coleção de subconjuntos disjuntos de \mathcal{B}_0 com $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_0$.

Teorema A.0.3 (Hahn-Kolmogorov). Toda pré-medida $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, \infty]$ em uma álgebra \mathcal{B}_0 de X pode ser estendida para uma medida $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, onde \mathcal{B} é uma σ -álgebra que contém \mathcal{B}_0 . Além disso, se μ_0 for σ -finita e $\mu' : \mathcal{B}' \rightarrow [0, \infty]$ for outra extensão de μ_0 , então $\mu = \mu'$ em $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$.

Estamos prontos para demonstrar o teorema de Kolmogorov.

Teorema A.0.4. (Extensão de Kolmogorov) Seja $((X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços mensuráveis $(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ munidos de uma topologia \mathcal{F}_α . Se para cada $B \subset A$ finito for dada uma medida de probabilidade μ_B sobre $\mathcal{B}_B = \prod_{\alpha \in B} \mathcal{B}_\alpha$,

inner regular com a topologia produto $\mathcal{F}_B = \prod_{\alpha \in B} \mathcal{F}_\alpha$, obedecendo a condição de compatibilidade (A.1)

$$(\pi_{C \leftarrow B})_* \mu_B = \mu_C \quad \text{sempre que } C \subset B \subset A,$$

então existe uma única medida μ_A em \mathcal{B}_A com satisfazendo $(\pi_B)_* \mu_A = \mu_B$ para todo $B \subset A$ finito.

Demonstração. Seja \mathcal{B}_0 o conjunto de todos dos subconjuntos de X_A da forma $\pi_B^{-1}(E_B)$ com $B \subset A$ finito e $E_B \in \mathcal{B}_B$. É fácil ver que \mathcal{B}_0 é uma álgebra e está contida em \mathcal{B}_A . Definimos então a função $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, \infty]$ como

$$\mu_0(E) = \mu_B(E_B)$$

sempre que E é da forma $\pi_B^{-1}(E_B)$, $B \subset A$ finito.

Vamos primeiro mostrar que μ_0 está bem definida. Sejam $B, B' \subset A$ finitos com $E = \pi_B^{-1}(E_B) = \pi_{B'}^{-1}(E_{B'})$. Como $E_B = \pi_{B \leftarrow B \cup B'}(E_{B \cup B'})$ e $E_{B'} = \pi_{B' \leftarrow B \cup B'}(E_{B \cup B'})$ com $E_{B \cup B'} = \pi_{B \cup B'}(E)$. Então, pela condição de compatibilidade

$$\begin{aligned} \mu_B(E_B) &= \mu_{B \cup B'}(\pi_{B \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_B)) = \mu_{B \cup B'}(E_{B \cup B'}) \\ \mu_{B'}(E_{B'}) &= \mu_{B \cup B'}(\pi_{B' \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_{B'})) = \mu_{B \cup B'}(E_{B \cup B'}), \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \pi_{B \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_B) &= \pi_{B \cup B'}(\pi_{B \cup B'}^{-1}(\pi_{B \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_B))) \\ &= \pi_{B \cup B'}(\pi_B^{-1}(E_B)) \\ &= \pi_{B \cup B'}(E) = E_{B \cup B'} \end{aligned}$$

e, analogamente, $\pi_{B' \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_{B'}) = E_{B \cup B'}$. Assim, $\mu_B(E_B) = \mu_{B'}(E_{B'})$ e $\mu_0(E)$ está bem definida. Além disso $\mu_0(X_A) = 1$, pois $X_A = \pi_B(X_B)$ para qualquer $B \subset A$ e $\mu_B(X_B) = 1$.

Vamos mostrar agora que μ_0 é finitamente aditiva. Sejam $B, B' \subset A$ finitos, $E_B \in \mathcal{B}_B$, $E_{B'} \in \mathcal{B}_{B'}$ tais que $\pi_B^{-1}(E_B)$ e $\pi_{B'}^{-1}(E_{B'})$ são disjuntos. Como

$$\pi_B^{-1}(E_B) \cup \pi_{B'}^{-1}(E_{B'}) = \pi_{B \cup B'}^{-1}(\pi_{B \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_B) \cup \pi_{B' \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_{B'}))$$

temos que

$$\begin{aligned} \mu_0(\pi_B^{-1}(E_B) \cup \pi_{B'}^{-1}(E_{B'})) &= \mu_{B \cup B'}(\pi_{B \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_B) \cup \pi_{B' \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_{B'})) \\ &= \mu_{B \cup B'}(\pi_{B \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_B)) + \mu_{B \cup B'}(\pi_{B' \leftarrow B \cup B'}^{-1}(E_{B'})) \\ &= \mu_B(E_B) + \mu_{B'}(E_{B'}), \end{aligned}$$

onde a primeira penúltima e última igualdade valem, respectivamente, pois os dois subconjuntos são disjuntos e pela condição de compatibilidade.

Para concluirmos que μ_0 é pré-medida falta apenas mostrar que se $F \in \mathcal{B}_0$ é uma união enumerável $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ com $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{B}_0 disjuntos, então

$$\mu_0(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n).$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$, considere $G_N = F \setminus \cup_{n=1}^N F_n$. Então $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \mathcal{B}_0 decrescente com $\cap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Como μ_0 é finita e finitamente aditiva, basta mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_0(G_n) = 0$.

Suponha que não é este o caso, i.e., sem perda de generalidade, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\mu_0(G_N) > \epsilon > 0$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$. Como $G_N \in \mathcal{B}_0$, $G_N = \pi_{B_N}^{-1}(E_N)$ para algum conjunto finito $B_N \subset A$ e algum conjunto E_N \mathcal{B}_N -mensurável.

Podemos assumir que B_N são crescentes em N , se não o forem, tomando $B'_N = \cup_{n=1}^N B_n$ e $E'_N = \pi_{B_N \leftarrow B'_N}^{-1}(E_N)$, teremos $G_N = \pi_{B'_N}^{-1}(\pi_{B_N \leftarrow B'_N}^{-1}(E_N)) = \pi_{B'_N}^{-1}(E'_N)$. Agora, como os conjuntos G_N são decrescentes, i.e., $\pi_{B_{N+1}}^{-1}(E_{N+1}) \subset \pi_{B_N}^{-1}(E_N)$, temos a seguinte inclusão:

$$E_{N+1} \subset \pi_{B_N \leftarrow B_N \cup B_{N+1}}^{-1}(E_N) = \pi_{B_N \leftarrow B_{N+1}}^{-1}(E_N).$$

Como as medidas são inner regular, para cada N existe um compacto K_N de E_N tal que

$$\mu_{B_N}(K_N) \geq \mu_{B_N}(E_N) - \epsilon/2^{N+1}.$$

Tomando $K'_N = \cap_{n=1}^N \pi_{B_n \leftarrow B_N}^{-1}(K_n)$ teremos K'_N compacto e satisfazendo

$$\begin{aligned} E_N \setminus K'_N &\subset \cap_{n=1}^N E_n \setminus \pi_{B_n \leftarrow B_N}^{-1}(K_n) \\ &\subset \cap_{n=1}^N \pi_{B_n \leftarrow B_N}^{-1}(E_n) \setminus \pi_{B_n \leftarrow B_N}^{-1}(K_n) \\ &\subset \cap_{n=1}^N \pi_{B_n \leftarrow B_N}^{-1}(E_n \setminus K_n) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mu_{B_N}(E_N \setminus K'_N) &\leq \sum_{n=1}^N \mu_{B_N}(\pi_{B_n \leftarrow B_N}^{-1}(E_n \setminus K_n)) \\ &= \sum_{n=1}^N \mu_{B_n}(E_n \setminus K_n) \leq \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\mu_{B_N}(K'_N) \geq \mu_{B_N}(E_N) - \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon}{2^{n+1}} > \frac{\epsilon}{2},$$

e em particular K'_N é não vazio. Além disso, por construção temos que

$$K'_{N+1} \subset \pi_{B_N \leftarrow B_{N+1}}^{-1}(K'_N)$$

e assim os conjuntos $H_N = \pi_{B_N}^{-1}(K'_N)$ são decrescentes em N e vale $H_N \subset G_N$ pois $K'_N \subset E_N$, portanto $\cap_{N=1}^{\infty} H_N = \emptyset$.

Agora, para cada $N \in \mathbb{N}$, escolha $x_N \in H_N$ qualquer. Observe que fixado N_0 qualquer, $\pi_{B_{N_0}}(x_N) \in K'_{N_0}$ para todo $N \geq N_0$, pois $H_N \subset H_{N_0}$. Assim, tomando $N_0 = 1$, como K'_1 é compacto, existem uma subsequência

$(x_{N_{1,m}})_{m \in \mathbb{N}}$ de $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ tal que a sequência $(\pi_{B_1}(x_{N_{1,m}}))_{m \in \mathbb{N}}$, que está em K'_1 , é convergente. Da sequência $(x_{N_{1,m}})_{m \in \mathbb{N}}$ podemos extrair uma subsequência $(x_{N_{2,m}})_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $(\pi_{B_2}(x_{N_{2,m}}))_{m \in \mathbb{N}}$ é convergente e está em K'_2 . Mais geralmente, podemos obter subsequências encaixadas $(x_{N_{j,m}})_{m \in \mathbb{N}}$, $j = 1, 2, \dots$, tal que $(\pi_{B_j}(x_{N_{j,m}}))_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em K'_j convergente.

Considere agora a diagonal $(x_{N_{m,m}})_{m \in \mathbb{N}}$. Vamos denotar $x_{N_{m,m}} = (y_{m,\alpha})_{\alpha \in A}$. Por construção, para cada j a sequência $(\pi_{B_j}(x_{N_{m,m}}))_{m \in \mathbb{N}} = ((y_{m,\alpha})_{\alpha \in B_j})_{m \in \mathbb{N}}$ é convergente e está em K'_j . Como este conjunto é compacto, o ponto limite da sequência, que denotaremos por $(y_\alpha)_{\alpha \in B_j}$, está em K'_j . Em particular dado $\beta \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $(y_{m,\beta})_{m \in \mathbb{N}}$ converge para y_β quando $m \rightarrow \infty$.

Finalmente, considere $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma extensão qualquer de $(y_\beta)_{\beta \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j}$. Então $y \in H_N$ para qualquer N , o que contradiz $\bigcap_{N=1}^{\infty} H_N = \emptyset$ e completa a prova de que μ_0 é pré-medida.

Pelo teorema de extensão de Hahn-Kolmogorov existe uma medida $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, que estende μ_0 . É importante notar que $\mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}$, pois $\bigcup_{\beta \in A} \pi_\beta^*(\mathcal{B}_\beta) \subset \mathcal{B}_0$ e portanto $\mathcal{B}_A = \sigma\left(\bigcup_{\beta \in A} \pi_\beta^*(\mathcal{B}_\beta)\right) \subset \sigma(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}$. Por fim, $\mu_A \doteq \mu|_{\mathcal{B}_A}$ é a medida que procuramos. \square

A.0.1 Aplicação

Na demonstração do Teorema 2.1.2 definimos uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\Omega = E^{\Gamma^d}$, E é um conjunto finito e Γ^d é a árvore de Cayley d regular, associada a uma lei de fronteira $\{l_{ij} : ij \in \vec{B}\}$ que satisfaz

$$\mu(\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda}) = z_\Lambda \prod_{k \in \partial \Lambda} l_{kk_\Lambda}(\sigma_k) \prod_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset}} Q_{\{i,j\}}(\sigma) \quad (\text{A.2})$$

para todo $\Lambda \subset \Gamma^d$ (lembre-se que aqui k_Λ denota o vizinho de k que está em Λ) e afirmamos que tal medida existe e é única. Usaremos o teorema de extensão de Kolmogorov para demonstrar essa afirmação.

Nas hipóteses do teorema tome $A = \Gamma^d$, $X_i = E$ e $\mathcal{B}_i = \mathcal{F}_i = \mathcal{P}(E)$ para todo $i \in \Gamma^d$. Com essa escolha temos que $X_A = \Omega$ e além disso, toda medida em \mathcal{B}_B , $B \subset \Gamma^d$ finito, é inner regular (pois a topologia é a discreta). Vamos agora definir as medidas μ_Δ em $(E^\Delta, \mathcal{B}_\Delta)$ com $\Delta \Subset \Gamma^d$.

Para $\Delta \Subset \Gamma^d$ conexo, definimos

$$\mu_\Delta(\sigma_\Delta) = \sum_{\omega_{\partial \Delta} \in E^{\partial \Delta}} \mu_{\Delta \cup \partial \Delta}(\sigma_\Delta \omega_{\partial \Delta}), \quad (\text{A.3})$$

onde $\mu_{\Delta \cup \partial \Delta}$ é definida como em (A.2).

Precisamos agora definir as medidas μ_Δ quando $\Delta \Subset \Gamma^d$ não é conexo. Nesse caso, Δ pode ser escrito como $\Delta = \bigcup_{n=1}^N \Delta_n$ com $\Delta_n \Subset \Gamma^d$ conexo e $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$, para $n, m = 1, \dots, N$, $n \neq m$. Como estamos na árvore de Cayley, para quaisquer dois pontos existe apenas um caminho que os liga. Seja então $C_n \subset \Delta^c$ o caminho que liga Δ_n e $k_0 \in \Gamma^d$ (uma raiz pré-fixada), $n = 1, \dots, N$.

Então

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \left(\bigcup_{n=1}^N C_n \right)$$

é conexo e podemos definir

$$\mu_{\Delta}(\sigma_{\Delta}) = \sum_{\omega \in E^{(\bar{\Delta} \setminus \Delta) \cup \partial \bar{\Delta}}} \mu_{\bar{\Delta} \cup \partial \bar{\Delta}}(\sigma_{\Delta} \omega). \quad (\text{A.4})$$

Vamos primeiro mostrar que essas medidas estão bem definidas, no sentido de que se $\Delta \in \Gamma^d$ conexo é da forma $\Delta = \Lambda \cup \partial \Lambda$ para algum $\Lambda \in \Gamma^d$ conexo, então

$$\mu_{\Delta}(\sigma_{\Delta}) = \sum_{\omega_{\partial \Delta} \in E^{\partial \Delta}} \mu_{\Delta \cup \partial \Delta}(\sigma_{\Delta} \omega_{\partial \Delta}) = \mu_{\Lambda \cup \partial \Lambda}(\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda}). \quad (\text{A.5})$$

Lembre-se que na demonstração do Teorema 2.1.2 já provamos que para $\Lambda \subset \Delta \subset \Gamma^d$ finitos e conexos vale que

$$\sum_{\omega_S \in E^S} \mu_{\Delta \cup \partial \Delta}(\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda} \omega_S) = \mu_{\Lambda \cup \partial \Lambda}(\sigma_{\Lambda \cup \partial \Lambda}),$$

com $S = (\Delta \cup \partial \Delta) \setminus (\Lambda \cup \partial \Lambda)$. Note agora que para $\Lambda \in \Gamma^d$ conexo, $\Lambda \subset \Lambda \cup \partial \Lambda = \Delta$ e na equação acima, como $S = (\Lambda \cup \partial \Lambda \cup \partial(\Lambda \cup \partial \Lambda)) \setminus \Lambda \cup \partial \Lambda = \partial(\Lambda \cup \partial \Lambda) = \partial \Delta$, obtemos a segunda igualdade de (A.5).

Por último vamos mostrar que nossas medidas satisfazem a condição de compatibilidade (A.1) o que termina a prova da existência e unicidade de μ como em (A.2). Como mencionado anteriormente, foi provado no Teorema 2.1.2 que nossas medidas satisfazem a condição de compatibilidade quando $C = \Lambda \cup \partial \Lambda \subset \Delta \cup \partial \Delta = B$ com $\Lambda \subset \Delta \in \Gamma^d$ conexos.

Agora para $\Delta \in \Gamma^d$ e $i \in \Delta^c$ quaisquer, vamos mostrar que

$$\sum_{\sigma_i \in E} \mu_{\Delta \cup \{i\}}(\sigma_{\Delta} \sigma_i) = \mu_{\Delta}(\sigma_{\Delta}), \quad \forall \sigma_{\Delta} \in E^{\Delta} \quad (\text{A.6})$$

e a compatibilidade para qualquer $\Lambda \supset \Delta$ finito segue por indução.

Novamente, suponha que $\Delta = \bigcup_{n=1}^N \Delta_n$ com $\Delta_n \in \Gamma^d$ conexo e C_n é o caminho que liga Δ_n e k_0 , $n = 1, \dots, N$. Seja agora C_{N+1} o caminho que liga i e k_0 .

Suponha agora que $i \notin \bar{\Delta} \cup \partial \bar{\Delta}$. Definindo $C_i = C_{N+1} \setminus \bar{\Delta}$ obtemos que $\overline{\Delta \cup \{i\}} = \bar{\Delta} \cup C_i \cup \{i\} \supset \bar{\Delta}$ são conjuntos convexos e aplicando a compatibilidade obtemos

$$\mu_{\bar{\Delta} \cup \partial \bar{\Delta}}(\sigma_{\bar{\Delta} \cup \partial \bar{\Delta}}) = \sum_{\omega \in E^S} \mu_{\overline{\Delta \cup \{i\}} \cup \partial \overline{\Delta \cup \{i\}}}(\sigma_{\bar{\Delta} \cup \partial \bar{\Delta}} \omega), \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\begin{aligned}
S &= \left(\overline{\Delta \cup \{i\}} \cup \partial \overline{\Delta \cup \{i\}} \right) \setminus (\overline{\Delta} \cup \partial \overline{\Delta}) \\
&= \left[\overline{\Delta} \cup C_i \cup \{i\} \cup \partial \overline{\Delta} \setminus \{c_1\} \cup \partial C_i \setminus \{i, c_{1\overline{\Delta}}\} \cup \partial i \setminus \{i_{C_i}\} \right] \setminus (\overline{\Delta} \cup \partial \overline{\Delta}) \\
&= C_i \setminus \{c_1\} \cup \partial C_i \setminus \{i, c_{1\overline{\Delta}}\} \cup \partial i \setminus \{i_{C_i}\},
\end{aligned}$$

e $c_1 \in C_i$ é o elemento de C_i que está em $\partial \overline{\Delta}$. Podemos então reescrever (A.7) como

$$\mu_{\overline{\Delta} \cup \partial \overline{\Delta}}(\sigma_{\overline{\Delta} \cup \partial \overline{\Delta}}) = \sum_{\sigma_i \in E} \sum_{\omega \in E^{S \setminus \{i\}}} \mu_{\overline{\Delta} \cup \{i\} \cup \partial \overline{\Delta} \cup \{i\}}(\sigma_{\overline{\Delta} \cup \partial \overline{\Delta}} \sigma_i \omega). \quad (\text{A.8})$$

Somando sobre todas as configurações em $(\overline{\Delta} \setminus \Delta) \cup \partial \overline{\Delta}$, como

$$\begin{aligned}
(\overline{\Delta} \setminus \Delta) \cup \partial \overline{\Delta} \cup S \setminus \{i\} &= \overline{\Delta} \setminus \Delta \cup \partial \overline{\Delta} \setminus \{c_1\} \cup C_i \cup \partial C_i \setminus \{i, c_{1\overline{\Delta}}\} \cup \partial i \setminus \{i_{C_i}\} \\
&= (\overline{\Delta} \cup C_i \cup \{i\}) \setminus (\Delta \cup \{i\}) \cup \partial (\overline{\Delta} \cup C_i \cup \{i\}) \\
&= \overline{\Delta \cup \{i\}} \setminus (\Delta \cup \{i\}) \cup \partial (\overline{\Delta \cup \{i\}}),
\end{aligned}$$

obtemos

$$\mu_{\Delta}(\sigma_{\Delta}) = \sum_{\sigma_i \in E} \mu_{\overline{\Delta \cup \{i\}} \setminus (\Delta \cup \{i\}) \cup \partial (\overline{\Delta \cup \{i\}})}(\sigma_{\Delta} \sigma_i).$$

Os casos $i \in \overline{\Delta}$ e $i \in \partial \overline{\Delta}$ são demonstrados de forma análoga. Isso então conclui a demonstração.

Bibliografia

- [1] H.O. Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. De Gruyter studies in mathematics. De Gruyter, 2011.
- [2] C. Külske, U. A. Rozikov, and R. M. Khakimov. Description of the translation-invariant splitting gibbs measures for the potts model on a cayley tree. *Journal of Statistical Physics*, 156(1):189–200, 2014.
- [3] Rozikov U.A. *Gibbs Measures On Cayley Trees*. World Scientific Publishing Company, 2013.
- [4] Ernst Ising. Contribution to the theory of ferromagnetism. *Z. Phys.*, 31:253–258, 1925.
- [5] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [6] Sacha Friedli and Yvan Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 2017.
- [7] Victor V. Prasolov. *Polynomials*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [8] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2011.