

Álgebras de Hopf sobre espaços de árvores com raiz

Alexandre Cesar da Silva Ribeiro

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO APRESENTADO
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
BACHAREL EM MATEMÁTICA APLICADA

Curso: Matemática Aplicada
Habilitação em Métodos Matemáticos
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bissacot

São Paulo, fevereiro de 2016

Álgebras de Hopf sobre espaços de árvores com raiz

Esta é a versão original do trabalho de formatura elaborado pelo aluno Alexandre Cesar da Silva Ribeiro, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Resumo

RIBEIRO, A. C. S. **Álgebras de Hopf sobre espaços de árvores com raiz**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Apresentaremos a construção de duas álgebras de Hopf geradas por conjuntos de árvores com raiz, devidas respectivamente a D. Kreimer, em colaboração com A. Connes [2], e a R. Grossman e R. Larson [7]. Tais estruturas nasceram separadamente, como ferramentas para a solução de problemas em duas áreas consideravelmente distintas. Após cobrir a teoria básica de álgebras, coálgebras e biálgebras, destacaremos os aspectos combinatórios de suas estruturas, permitindo a exploração de seus mapas fundamentais (produto, coproduto, etc.) com detalhe. Ainda, descreveremos como tais álgebras de Hopf estão associadas por dualidade, um teorema a princípio enunciado por Panaite [14], fortemente apoiado pelo teorema de Milnor-Moore a respeito da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie [13], e posteriormente corrigido por Hoffman [8]. O resultado cria uma ponte entre as áreas de origem das duas álgebras de Hopf, equipando ambas com novos conjuntos de técnicas.

Palavras-chave: álgebras de Hopf, árvores com raiz, álgebra envolvente universal.

Abstract

RIBEIRO, A. C. S. **Hopf-algebras on rooted tree spaces**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

We present the construction of two Hopf algebras, both spanned by sets of rooted trees, credited, respectively, to D. Kreimer and his collaborator, A. Connes [2]; and to R. Grossman and R. Larson [7]. Such structures were born as tools for modeling problems on two different, sparsely connected subareas of applied Mathematics. After covering the basic theory on algebras, coalgebras, and bialgebras, we will give focus to the combinatorial aspects of the Hopf-algebraic structures on those spaces, enabling a more detailed exploration of their characteristic maps (the product and coproduct, for instance.) Then, we shall describe the duality between the spaces, according to a theorem by Panaite [14], which is heavily supported by the Milnor-Moore theorem about the universal enveloping algebra of a Lie algebra [13]. The result has been since corrected by Hoffman [8]. This result relates the two subareas referenced above more closely, giving a number of fresh techniques to both.

Keywords: Hopf algebras, rooted trees, universal enveloping algebra.

Sumário

Introdução	1
1 Pontos preliminares	5
1.1 Álgebras e Coálgebras	5
1.1.1 A notação Sigma e exemplos	6
1.1.2 Duais de álgebras e coálgebras	10
1.2 Biálgebras e álgebras de Hopf	13
1.2.1 Álgebra de Hopf dual	20
1.2.2 Exemplos de álgebras de Hopf	20
1.3 Árvores e raízes	25
2 A álgebra de Hopf de Connes-Kreimer	27
2.1 H_R é uma biálgebra com graduação	31
2.2 Uma fórmula para $S(a)$	32
2.2.1 Versão recursiva	35
3 A álgebra de Hopf de Grossman-Larson	37
4 Álgebras de Lie	45
4.1 Definição e exemplos	45
4.1.1 Elementos primitivos de uma biálgebra	46
4.2 Álgebra envolvente universal	47
5 A relação entre H_R e $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$	51
5.1 Propriedades combinatórias do espaço vetorial $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$	51
5.2 O Teorema de Milnor-Moore	58
5.3 O dual graduado de H_R	59
5.4 Isomorfismo de Hoffman	61
Referências Bibliográficas	67

Introdução

Histórico

A álgebra de Hopf, objeto de estudo principal do presente trabalho, é construída a partir de uma álgebra - um espaço vetorial onde se define uma multiplicação bilinear - associativa e com unidade, à qual se agrega certa estrutura adicional. Em particular, a ideia de produto associativo pode ser dualizada, dando origem ao conceito de coálgebra: enquanto o produto toma um par de elementos e os conecta a somente um outro, o seu dual, chamado o coproduto, relaciona cada elemento a um determinado par.

Para espaços munidos de estruturas de álgebra e de coálgebra simultaneamente, são definidas condições de compatibilidade para tais estruturas que, se satisfeitas, caracterizam as biálgebras. Uma álgebra de Hopf é uma biálgebra para a qual se consegue encontrar um endomorfismo capaz de codificar a relação entre produto e coproduto de uma maneira identificável elemento a elemento.

O primeiro cientista a observar tais propriedades em um espaço vetorial foi H. Hopf, na década de 1940, no ramo da Topologia Algébrica. No entanto, segundo Dascalescu et al. [4, 2001], a pesquisa relacionada às álgebras de Hopf de um ponto de vista estritamente algébrico tornou-se mais frequente somente 25 anos mais tarde (sendo M. Sweedler [16] um dos expoentes,) e ganhou força a partir da descoberta da conexão entre álgebras de Hopf e a Mecânica quântica, nos anos 80. O livro de C. Kassel [11] é um exemplo do trabalho desenvolvido na época.

As álgebras de Hopf surgem em diversos contextos dentro da Matemática, voltados ou não a aplicações. Deles, destacamos a teoria dos Grupos de Lie, de onde o conceito surgiu, e a aplicação à análise de modelos combinatórios, em particular aqueles baseados em grafos do tipo árvore, responsável por originar os objetos que são foco de nosso trabalho.

Árvores, em uma definição geral, são grafos com seguinte propriedade: para quaisquer dois de seus vértices, há exatamente um caminho os conectando. Uma árvore direcionada com um único vértice atuando exclusivamente como fonte é dita uma árvore com raiz.

Árvores, tais como outros tipos de grafos, são objetos fundamentais em Computação, onde modelam diversas espécies de estruturas de dados.

Em um artigo de 1989, R. Grossman e R. Larson [7] apresentam uma álgebra de Hopf oriunda do estudo de estruturas de dados utilizadas para calcular certos operadores diferenciais, construído sobre o espaço vetorial com base dada pelo conjunto das árvores com raiz, linearmente independente por construção. Esta é conhecida como a álgebra de Hopf de Grossman-Larson.

Alguns anos mais tarde, D. Kreimer descreve uma estrutura Hopf-algébrica gerada naturalmente pelas técnicas para o tratamento de quantidades infinitos em cálculos na teoria quântica, às quais se refere coletivamente pelo termo *renormalização* [12]. Em colaboração com A. Connes [2], Kreimer identifica sua álgebra com uma segunda, esta polinomial sobre as árvores com raiz, que soluciona um problema computacional em geometria não-comutativa [3], dando origem à álgebra de Hopf de Connes-Kreimer.

F. Panaite, em artigo publicado em 2000 [14], constrói um isomorfismo entre as álgebras envolventes universais associadas respectivamente à álgebra de Hopf de Grossman-Larson e o dual da álgebra de Hopf de Connes-Kreimer. O conceito de álgebra envolvente universal vem da teoria de álgebras de Lie, e foi conectado às de Hopf pelo teorema de Milnor-Moore [13, 1965], que implica na extensão do isomorfismo de Panaite.

O cientista, no entanto, ignorou certos aspectos combinatórios das estruturas das álgebras em sua demonstração, o que a tornou incorreta. M. Hoffman apresenta, então, uma correção do argumento [8]. Hoffman importa técnicas da teoria de grafos geral e da teoria dos *posets* diferenciais para mostrar que a ideia original de Panaite era de fato válida.

Da estrutura do trabalho

O presente trabalho teve início após o primeiro contato com o tema "teoria algébrica dos grafos", que aludia às experiências acadêmicas prévias do autor enquanto fazia parte de seu campo de maior interesse, a Álgebra. Os estudos foram sempre focados na estrutura algébrica de Hopf em si, enquanto a temática de árvores com raiz fornecia uma limitação natural sobre o que seria pesquisado, além de conferir um ambiente onde conceitos teóricos, notoriamente pouco palpáveis, podem ser apresentados pictograficamente.

O texto se divide em cinco capítulos. O primeiro apresenta a teoria básica necessária para caracterizar as álgebras de Hopf, utilizando diagramas para definir álgebras e as demais estruturas intermediárias, tal como suas operações às quais o texto se refere como *mapas fundamentais*. Algumas propriedades mais gerais são enunciadas, enquanto outras, associadas mais diretamente às duas álgebras de Hopf citadas anteriormente, são apre-

sentadas dentro das respectivas seções. Uma pequena introdução a grafos do tipo árvore também é feita.

Os dois capítulos seguintes são dedicados à apresentação das álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson. É desenvolvido o material essencial para a confirmação de suas estruturas Hopf-algébricas, com atenção especial para a aplicação antípoda de cada uma delas. O objetivo foi descrevê-las da forma mais aberta possível. Estes são os capítulos do texto que mais são enriquecidos pela presença de imagens, pela clareza que é conferida aos mapas fundamentais de ambas as álgebras de Hopf.

Em seguida, discorre-se minimamente a respeito das álgebras de Lie, com enfoque dado à álgebra envolvente universal, central para a abordagem do resultado principal, do qual se ocupa o quinto e último capítulo. Em seu decorrer, apresentamos o teorema de Milnor-Moore sem demonstrá-lo, mas exibindo sua aplicação no presente contexto, e também a parte essencial dos resultados em combinatória que Hoffman aplicou no decorrer de correção do teorema de Panaite.

1. Pontos preliminares

1.1 Álgebras e Coálgebras

Em sua definição mais resumida, uma álgebra A sobre um corpo \mathbb{K} é um \mathbb{K} -espaço vetorial munido de uma multiplicação bilinear $m: A \times A \rightarrow A$. No entanto, a fim de tratar de álgebras de Hopf, fará-se uso de uma definição equivalente, aplicando o produto tensorial de espaços vetoriais construído anteriormente.

Definição 1.1. Uma \mathbb{K} -álgebra é uma tripla (A, m, u) , onde A é um espaço vetorial sobre o corpo K , e os mapas $m: A \otimes A \rightarrow A$ e $u: \mathbb{K} \rightarrow A$, chamados multiplicação e unidade de A , respectivamente, são homomorfismos entre \mathbb{K} -espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{Id \otimes m} & A \otimes A \\
 m \otimes Id \downarrow & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xleftarrow{Id \otimes u} & A \otimes \mathbb{K} \\
 u \otimes Id \uparrow & \searrow m & \downarrow \\
 \mathbb{K} \otimes A & \xrightarrow{\quad} & A
 \end{array}$$

O primeiro diagrama denota a propriedade associativa da multiplicação. As flechas não rotuladas representam o isomorfismo canônico entre um \mathbb{K} -espaço vetorial e seu tensorial com \mathbb{K} (isto é, o produto por escalar), enquanto Id é o mapa identidade.

Deve-se ressaltar que a equivalência entre as definições é assegurada pelo fato do mapa m ser linear e ter um produto tensorial como domínio, o que lhe confere bilinearidade natural.

Exemplo. Seja G um monoide (multiplicativo). O espaço vetorial dos elementos da forma $\sum_{g \in G} \alpha_g g$, com $(\alpha_g)_{g \in G}$ uma família de elementos de \mathbb{K} onde apenas uma quantidade finita deles é diferente de zero, é uma álgebra com a multiplicação definida pela relação $(\alpha g)(\beta h) = (\alpha \beta)(gh)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $g, h \in G$, e estendida linearmente.

Exemplo. Considere um \mathbb{K} -espaço vetorial V . O produto tensorial de V consigo mesmo, $V \otimes V$ é também chamado de segunda potência tensorial de V , e pode ser denotado por T^2V ou por $V^{2\otimes}$. Denominações análogas existem para todo natural $n > 0$, e convencionase $T^0V = \mathbb{K}$.

Definimos a **álgebra tensorial** $T(V)$ como sendo a soma direta entre todas as potências tensoriais do espaço V .

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots \quad (1.1)$$

Podemos estabelecer um produto para $T(V)$ estendendo linearmente os isomorfismos canônicos entre $T^k V \otimes T^l V$ e $T^{k+l} V$, que existem para quaisquer naturais k, l . A saber:

$$m_{k,l}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k, v_{k+1} \otimes \dots \otimes v_{k+l}) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{k+l} \quad (1.2)$$

A associatividade do produto é clara. Como $\mathbb{K} \subset T(V)$, podemos fazer $u = Id$, donde $m \circ (u \otimes Id)$ e $(u \circ Id) \otimes m$ tornam-se o produto escalar em $T(V)$.

A opção por definir álgebras sobre corpos dessa maneira nos confere a possibilidade de dualizar o conceito, permitindo uma introdução mais orgânica das coálgebras.

Definição 1.2. Uma \mathbb{K} -coálgebra é uma tripla (C, Δ, ε) , onde C é um espaço vetorial sobre o corpo K , e os mapas $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon: C \rightarrow \mathbb{K}$, chamados comultiplicação e counidade de C , respectivamente, são homomorfismos entre \mathbb{K} -espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{Id \otimes \Delta} & C \otimes C \\ \Delta \otimes Id \uparrow & & \uparrow \Delta \\ C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C \otimes C & \xrightarrow{Id \otimes \varepsilon} & C \otimes \mathbb{K} \\ \varepsilon \otimes Id \downarrow & \swarrow \Delta & \uparrow \\ \mathbb{K} \otimes C & \xleftarrow{\quad} & C \end{array}$$

O primeiro dos diagramas acima dá a coassociatividade da comultiplicação de C .

1.1.1 A notação Sigma e exemplos

Ao contrário do produto, o coproduto atua ampliando a dimensão de seu operando, transformando elementos de uma coálgebra em uma soma finita de tensores. A princípio, para $c \in (C, \Delta, \varepsilon)$, escreve-se:

$$\Delta(c) = \sum_i c_{1i} \otimes c_{2i} \quad c_{ji} \in C$$

Com o intuito de tornar menos complexos os cálculos em coálgebras, Sweedler [16] introduz a notação Sigma, que indexa os fatores de $\Delta(c)$ de uma maneira a somente aludir ao fato de que a soma apresentada é finita:

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \quad (1.3)$$

Imediatamente, nota-se o ganho em eficiência proporcionado pela notação Sigma. Tomemos os diagramas de comutatividade que definem a estrutura de coálgebra. A lei de coassociatividade, por exemplo, pode ser reorganizada na seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(c) &= (\Delta \otimes Id) \left(\sum c_1 \otimes c_2 \right) \\ &= \sum \Delta(c_1) \otimes c_2 \\ \\ (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(c) &= (Id \otimes \Delta) \left(\sum c_1 \otimes c_2 \right) \\ &= \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \\ &\Downarrow \\ \sum \Delta(c_1) \otimes c_2 &= \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \\ &= \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 = \Delta_2(c) \end{aligned}$$

De modo similar, define-se $\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Também podemos reescrever a lei de counidade na notação alternativa. Denotando por $\phi_r: C \otimes \mathbb{K} \rightarrow C$ e $\phi_l: \mathbb{K} \otimes C \rightarrow C$ os isomorfismos canônicos, segue:

$$\begin{aligned} \phi_r \circ (\varepsilon \otimes Id) \otimes \Delta &= Id = \phi_l \circ (Id \otimes \varepsilon) \otimes \Delta \\ &\Downarrow \\ \sum \varepsilon(c_1)c_2 &= c = \sum c_1\varepsilon(c_2) \end{aligned}$$

A notação Sigma nos dá a estrutura necessária para escrever operações complexas em qualquer dimensão natural. O lema abaixo traz as fórmulas que generalizam o procedimento.

Lema 1.1 ([4], Lema 1.1.10). *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então valem:*

- i) Para $n \geq 2$, $\Delta_n = (\Delta_{n-1} \otimes Id) \circ \Delta$;
- ii) Para $k \geq 2$, $1 \geq n \geq k-1$, $m \leq k-n$, temos $\Delta_k = (Id^m \otimes \Delta_n \otimes Id^{k-n-m}) \circ \Delta_{k-n}$.

A regra de cálculo em uma coálgebra pode ser exposta da seguinte maneira: suponha que há operadores lineares $f: C^{\otimes n} \Rightarrow C$ e $g: C^{\otimes k+n} \Rightarrow V$, onde V é um espaço

vetorial qualquer sobre o corpo \mathbb{K} , de forma que a expressão abaixo, com $\gamma \in C^{\otimes k+n}$, faça sentido:

$$g(\gamma) = \sum g(c_1 \otimes \cdots \otimes f(c_j \otimes \dots c_{j+n}) \otimes \cdots \otimes c_{k+n+1}) \quad (1.4)$$

Ainda, seja $\bar{f}: C \rightarrow C$ tal que $\bar{f} = \Delta_n \circ f$. Pelo lema apresentado anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} & \sum g(c_1 \otimes \cdots \otimes f(c_j \otimes \dots c_{j+n}) \otimes \cdots \otimes c_{k+n+1}) \\ &= g \circ (Id^{j-1} \otimes f \otimes Id^{k-j+1}) \circ \Delta_{k+n}(c) \\ &= g \circ (Id^{j-1} \otimes f \otimes Id^{k-j+1}) \circ (Id^{j-1} \otimes \Delta_n \otimes Id^{k-j+1}) \circ \Delta_k(c) \\ &= g \circ (Id^{j-1} \otimes f \circ \Delta_n \otimes Id^{k-j+1}) \circ \Delta_k(c) \\ &= g \circ (Id^{j-1} \otimes \bar{f} \otimes Id^{k-j+1}) \circ \Delta_k(c) \\ &= \sum g(c_1 \otimes \cdots \otimes \bar{f}(c_j) \otimes \cdots \otimes c_{k+1}) \end{aligned}$$

Existe ainda um caso importante que não é abrangido pelo argumento acima: considere o operador $\tau: C \otimes C \rightarrow C \otimes C$ dado por

$$\tau(c \otimes d) = d \otimes c.$$

Aqui, adotaremos a seguinte representação por convenção:

$$\tau \circ \Delta(c) = \sum c_2 \otimes c_1. \quad (1.5)$$

No entanto, Sweedler [16, p. 11] aponta para um procedimento que regulariza a notação Sigma em situações onde existe um mapa cujo contradomínio não é necessariamente um espaço unidimensional, como é o operador τ .

Apresentamos agora alguns exemplos de coálgebras e seus operadores fundamentais.

Exemplo. Para todo espaço vetorial, podemos determinar uma comultiplicação e uma counidade que o torne uma coálgebra. A saber, seja S um conjunto qualquer não vazio, e $\mathbb{K}S$ o espaço vetorial tendo S como base. Definindo $\Delta(s) = s \otimes s$ e $\varepsilon(s) = 1_{\mathbb{K}}$, para todo $s \in S$, e estendendo ambos linearmente, a tripla $(\mathbb{K}S, \Delta, \varepsilon)$ é de fato uma coálgebra.

Exemplo. Seja H um espaço vetorial sobre \mathbb{K} com base enumerável $\{c_n | n \geq 0\}$. As operações de comultiplicação e counidade são dadas como segue:

$$\Delta(c_j) = \sum_{i=0}^j c_i \otimes c_{j-i}$$

$$\varepsilon(c_n) = \delta_{0,n}$$

Mostrar que tais operações tornam H uma coálgebra depende de alguma reorganização das somas de tensores dadas por $\Delta \otimes I(\Delta(c_n))$ e $I \otimes \Delta(\Delta(c_n))$, e tais passagens serão omitidas aqui. Mais importante é a possibilidade de definirmos também uma multiplicação nesse espaço, dada por:

$$m(c_n \otimes c_m) = \binom{n+m}{m} c_{n+m}$$

Em uma demonstração parcial, vale a associatividade de m pois:

$$\begin{aligned} \binom{n+m}{n} \binom{n+m+p}{n+m} &= \frac{(n+m+p)!}{n!m!p!} \\ &= \frac{(n+m+p)!}{n!(m+p)!} \frac{(m+p)!}{m!p!} = \binom{n+m+p}{n} \binom{m+p}{p} \end{aligned}$$

Retornaremos a esse exemplo posteriormente, mostrando que H com as operações apresentadas é uma álgebra de Hopf.

Exemplo. Seja $V(T)$ a álgebra tensorial do espaço V sobre o corpo \mathbb{K} . Podemos equipá-la com uma estrutura de coálgebra por meio do coproduto Δ' :

$$\Delta'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum_{j=0}^k (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes (v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_k);$$

e da counidade ε :

$$\varepsilon(v) = \begin{cases} v, & \text{se } v \in T^0(V); \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

A coassociatividade vem do fato que os mapas compostos $(\Delta' \otimes Id) \circ \Delta'$ e $(Id \otimes \Delta') \circ \Delta$ operam, essencialmente, separando um tensor v em três partes, o que é indexável por um par de números em $\{0, 1, \dots, k\}$. Os mapas apenas mudam a ordem na qual tais cortes acontecem, e esta não é relevante ao final.

Quanto ao diagrama restante, note que:

$$(\varepsilon \otimes Id)\Delta'(v) = \sum_{j=0}^k (\varepsilon(v_1 \otimes \cdots \otimes v_j)) \otimes (v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_k) = 1 \otimes v,$$

pois ε elimina todos os termos restantes. O que ocorre no outro sentido é análogo.

Várias das álgebras mostradas até aqui são comutativas. Para as coálgebras, há uma propriedade dual à comutatividade.

Definição 1.3. Uma coálgebra (C, Δ, ε) é dita cocomutativa se o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \Delta \downarrow & \searrow \Delta & \\ C \otimes C & \xrightarrow{\tau} & C \otimes C \end{array}$$

Aqui, τ é o mapa que inverte a ordem das componentes de um tensor.

Certas conjuntos de propriedades podem ser verificados em subespaços vetoriais de álgebras ou de coálgebras. Os seguintes são particularmente relevantes.

Definição 1.4. Seja (A, m, u) uma álgebra sobre \mathbb{K} , e A_1 subespaço. Então A_1 é uma **subálgebra** de A se for fechado com respeito a m , isto é, se vale $a, b \in A_1 \Leftrightarrow m(a \otimes b) \in A_1$.

Nota. Subálgebras nem sempre são álgebras de acordo com a definição dada anteriormente, devido ao fato de que nem sempre se verifica a existência de unidade para a subálgebra.

Definição 1.5. Uma subcoálgebra é, analogamente às subálgebras, um subespaço $C_1 \subset C$ fechado com respeito ao coproduto Δ de C , isto é, deve valer

$$c \in C_1 \Leftrightarrow \Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2, \{c_1, c_2\} \in C_1.$$

C_1 é uma coálgebra quando munido das restrições a si de Δ e ε .

Definição 1.6. Consideremos uma álgebra (A, m, u) e uma coálgebra (C, Δ, ε) . Um subespaço $A_I \subset A$ é dito um **ideal** de A se para todo $a \in A, i \in A_I$, vale:

$$\begin{aligned} m(a \otimes i) &\in A_I; \\ m(i \otimes a) &\in A_I. \end{aligned}$$

Ainda, $C_I \subset C$ será um **coideal** de C quando para todo $j \in C_I$, temos $\varepsilon(j) = 0$ e é possível escrever

$$\Delta(j) = \sum c_1 \otimes j_2 + \sum j_1 \otimes c_2,$$

onde os elementos da forma j_1 estão em C_I , tais como os da forma j_2 .

1.1.2 Duais de álgebras e coálgebras

Recordamos, da Álgebra Linear, que se V é um \mathbb{K} -espaço vetorial, então $\text{Hom}(V, \mathbb{K}) = V^*$, o espaço das \mathbb{K} -funções lineares com domínio V , é chamado o *espaço dual* a V .

Como \mathbb{K} -espaços vetoriais, álgebras e coálgebras têm seu espaço dual. Iremos aqui descrever a estrutura adicional que tais espaços possuem, justificando a definição de coálgebras como as estruturas duais às álgebras. De fato, se (C, Δ, ε) é uma \mathbb{K} -coálgebra, podemos induzir mapas m, u em C^* de forma que (C^*, m, u) seja uma \mathbb{K} -álgebra. Além disso, o processo contrário também ocorre, mas somente sob a condição de que a álgebra A com a qual se trabalha tenha dimensão finita.

Tomemos $f, g \in C^*$ e $c = \sum c_1 \otimes c_2 \in C$ quaisquer. Definiremos o mapa $\mu: C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$ por vias da expressão

$$[\mu(f \otimes g)](c) = \sum f(c_1)g(c_2). \quad (1.6)$$

Também definiremos $U: \mathbb{K} \rightarrow C^*$, com:

$$[U(\lambda)](c) = \lambda\varepsilon(c). \quad (1.7)$$

Acima, λ é um elemento qualquer em \mathbb{K} .

Teorema 1.2. *Seja (C, Δ, ε) uma \mathbb{K} -coálgebra. Então (C^*, μ, U) , com μ e U dados pelas expressões acima, constituem uma álgebra sobre o mesmo corpo.*

Demonstração. Considere $f, g, h \in C^*$ e $c \in C$. Então, denotando $\mu(f \otimes g)$ por $f \times g$:

$$\begin{aligned} ((f \times g) \times h) &= \sum (f \times g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \end{aligned}$$

Analogamente, temos $(f \times (g \times h)) = \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3)$, donde m é associativo.

Basta mostrar que $U(1_{\mathbb{K}})$ é elemento neutro de μ , ou seja, que $U(1_{\mathbb{K}}) \times f = f \times U(1_{\mathbb{K}}) = f$, o que equivale ainda a $\sum \varepsilon(c_1)f(c_2) = \sum f(c_1)\varepsilon(c_2) = f(c)$, e esta vem diretamente da linearidade de f e da propriedade da counidade. \square

O último resultado vale por conta da existência de um mapa injetivo $\rho: V^* \otimes W^* \rightarrow (V \otimes W)^*$, dado por $[\rho(f \otimes g)](v \otimes w) = f(v)g(w)$. Se Z é um espaço vetorial com o mesmo corpo base dos dois anteriores, é possível provar que existe uma função ϕ que mergulha $V^* \otimes Z$ em $Hom(V, Z)$ e um isomorfismo $\varphi: Hom(V, W^*) \rightarrow (M \otimes N)^*$, exibidos sem demonstração (vide [4, seção 1.3]):

$$[\phi(f \otimes z)](m) = f(m)z$$

$$[\varphi(g)](v \otimes w) = [g(m)](n),$$

Ambos são, de certa forma, canônicos, e evidenciam as propriedades de ρ .

Também se mostra que ρ é um isomorfismo no caso $\dim(W) < \infty$, o que nos permite enunciar e demonstrar o seguinte resultado a respeito dos duais de álgebras:

Teorema 1.3. *Seja (A, m, u) uma \mathbb{K} -álgebra de dimensão finita. Defina:*

$$\begin{aligned} \delta : A^* &\rightarrow A^* \otimes A^* \\ \delta(f) &= \rho^{-1} \circ f \circ m \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} E : A^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ E(f) &= f(u(1_{\mathbb{K}})) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Então a tripla (A^*, δ, E) é uma \mathbb{K} -coálgebra.

Demonstração. Primeiramente, se $\delta(f) = \sum g_i \otimes h_i$ para mapas $\{g_i, h_i: i \in [n]\} \in A^*$, então $\rho \circ \delta(f) = f \circ m$, donde $f(ab) = \sum g_i(a)h_i(b)$ para $a, b \in A$ quaisquer. Ainda, se $\{g_j, h_j: j \in [m]\} \in A^*$ conta com a mesma propriedade, pela injetividade de ρ , vale $\sum g_i \otimes h_i = \sum g_j \otimes h_j$. Portanto, é correto definir

$$\delta(f) = \sum g_i \otimes h_i$$

para qualquer família $\{g_i, h_i: i \in [n]\} \in A^*$ tal que $f(ab) = \sum g_i(a)h_i(b)$ valha sempre. Então:

$$\begin{aligned} (\delta \otimes Id) \circ \delta(f) &= \sum g_{i1} \otimes g_{i2} \otimes h_i \\ \delta \circ (\delta \otimes Id)(f) &= \sum g_i \otimes h_{i1} \otimes h_{i2} \end{aligned}$$

Considere o mapa θ que “estende” ρ em três dimensões tensoriais, isto é, o que associa $(f \otimes g \otimes h)$ à função que leva o tensor $a \otimes b \otimes c$ a $f(a)g(b)h(c)$. É simples mostrar (por indução na dimensão do produto tensorial) que tal mapa é injetivo, tal como ρ e todas as “extensões” possíveis. Temos que a aplicação de θ às somas acima resulta no mesmo mapa. De fato, para $a, b, c \in A$ quaisquer:

$$\begin{aligned} \theta \left(\sum g_{i1} \otimes g_{i2} \otimes h_i \right) (a \otimes b \otimes c) &= \sum g_{i1}(a)g_{i2}(b)h_i(c) \\ &= \sum g_i(ab)h_i(c) \\ &= f(abc) \\ &= \sum g_i(a)h_i(bc) \\ &= \sum g_i(a)h_{i1}(b)h_{i2}(c) \\ &= \theta \left(\sum g_i \otimes h_{i1} \otimes h_{i2} \right) (a \otimes b \otimes c) \end{aligned}$$

As somas são, desse modo, iguais, donde δ é coassociativo. A comutatividade do diagrama referente à counidade E pode ser realizada visualmente, e será omitida. \square

Embora tenhamos definido o coproduto δ da coálgebra dual de forma consistente, sua expressão depende do mapa ρ^{-1} , o que a torna pouco prática. Contudo, existe uma maneira mais simples de expressarmos esse coproduto, utilizando uma base de A e sua respectiva base dual de A^* . De fato, seja $\{e_i : i \in I\}$ essa base. Então a base dual é dada pelos mapas e_i^* , definidos por:

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Disto segue que $A^* \otimes A^*$ tem base formada pelos tensores cujas componentes são estes mapas. Assim, para $f \in A^*$, existe uma família de escalares α tal que $\delta(f) = \sum \alpha_{i,j} e_i^* \otimes e_j^*$. A definição do coproduto e a base de A^* nos dá um método para determinar exatamente essa família. A saber, para k, l fixos, temos:

$$f(e_k e_l) = \sum \alpha_{i,j} e_i^*(e_k) e_j^*(e_l) = \alpha_{k,l}$$

Portanto:

$$\delta(f) = \sum_{i,j \in I} f(e_i e_j) e_i^* \otimes e_j^* \quad (1.10)$$

1.2 Biálgebras e álgebras de Hopf

Biálgebras são estruturas que combinam as propriedades das álgebras e das coálgebras em uma mesma estrutura, mas de forma que algumas condições de compatibilidade entre os mapas essenciais definidos na seção anterior sejam respeitadas. Começaremos definindo os homomorfismos de álgebras e coálgebras.

Definição 1.7. Sejam (A_1, m_1, u_1) e (A_2, m_2, u_2) duas álgebras sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Dizemos que $f : A_1 \rightarrow A_2$, linear em \mathbb{K} , é um homomorfismo entre as álgebras se comutam os diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes A_1 & \xrightarrow{f \otimes f} & A_2 \otimes A_2 \\ \downarrow m_1 & & \downarrow m_2 \\ A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & & \\ \downarrow u_1 & \searrow u_2 & \\ A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \end{array}$$

Considerando agora duas \mathbb{K} -coálgebras $(C_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ e $(C_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$, um mapa $g : C_1 \rightarrow C_2$ linear em \mathbb{K} será um homomorfismo entre C_1 e C_2 se os diagramas a seguir comutarem.

$$\begin{array}{ccccc}
C_1 \otimes C_1 & \xrightarrow{g \otimes g} & C_2 \otimes C_2 & \mathbb{K} & \\
\uparrow \Delta_1 & & \uparrow \Delta_2 & \varepsilon_1 & \swarrow \varepsilon_2 \\
C_1 & \xrightarrow{g} & C_2 & C_1 & \xrightarrow{g} & C_2
\end{array}$$

Determinaremos agora as condições de compatibilidade citadas anteriormente. Para tal, considere H um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e mapas lineares m, u, Δ e ε tais que (H, m, u) e (H, Δ, ε) constituam respectivamente uma álgebra e uma coálgebra sobre \mathbb{K} .

Proposição 1. Nas condições acima, as seguintes afirmações são equivalentes:

- Os mapas m e u são homomorfismos de coálgebras.
- Os mapas Δ e ε são homomorfismos de álgebras.

Nota. Antes de continuar com a demonstração, tomaremos um instante para investigar as estruturas algébricas e coalgéricas dos produtos tensoriais entre álgebras e entre coálgebras, e também do corpo \mathbb{K} .

As triplas $(\mathbb{K}, m_{\mathbb{K}}, u_{\mathbb{K}})$ e $(\mathbb{K}, \Delta_{\mathbb{K}}, \varepsilon_{\mathbb{K}})$ são respectivamente uma álgebra e uma coálgebra, onde as operações são as dadas a seguir, para quaisquer $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
m_{\mathbb{K}}(\lambda_1 \otimes \lambda_2) &= \lambda_1 \lambda_2; \\
u_{\mathbb{K}}(\lambda) &= 1_{\mathbb{K}}; \\
\Delta_{\mathbb{K}}(\lambda) &= \lambda \otimes 1_{\mathbb{K}}; \\
\varepsilon_{\mathbb{K}}(\lambda) &= \lambda.
\end{aligned}$$

Além disso, e A, B são duas álgebras e C, D , duas coálgebras, todas sobre o mesmo corpo e com operações distinguíveis por seu índice, os produtos tensoriais $A \otimes B$ e $C \otimes D$ têm estruturas correspondentes quando munidos das operações abaixo:

$$\begin{aligned}
m(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2) &= m_A(a_1 \otimes a_2) \otimes m_B(b_1 \otimes b_2) \\
u(\lambda) &= \lambda u_A(1_{\mathbb{K}}) \otimes u_B(1_{\mathbb{K}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(c \otimes d) &= \Delta_C(c) \otimes \Delta_D(d) \circ Id \otimes \tau \otimes Id \\
\varepsilon(c \otimes d) &= \varepsilon_C(c) \varepsilon_D(d)
\end{aligned}$$

Demonstração. A primeira afirmativa equivale à comutatividade dos quatro diagramas a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{m \otimes m} & H \otimes H & \mathbb{K} \\
\uparrow \Delta_{H \otimes H} & & \uparrow \Delta & \uparrow \varepsilon_{H \otimes H} \\
H \otimes H & \xrightarrow{m} & H & H \\
\uparrow \Delta_{\mathbb{K}} & \xrightarrow{u \otimes u} & \uparrow \Delta & \uparrow \varepsilon \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{u \otimes u} & H \otimes H & \mathbb{K} \\
\uparrow \Delta_{\mathbb{K}} & & \uparrow \Delta & \uparrow \varepsilon \\
\mathbb{K} & \xrightarrow{u} & H & \mathbb{K} \\
& & & \uparrow \varepsilon \\
& & & H
\end{array}$$

Ainda, Δ será um homomorfismo de álgebras se, e só se comutarem os dois próximos diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
H \otimes H & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & H \otimes H \otimes H \otimes H & \mathbb{K} \\
\downarrow m & & \downarrow m_{H \otimes H} & \downarrow u \\
H & \xrightarrow{\Delta} & H \otimes H & H \\
& & & \searrow u_{H \otimes H} \\
& & & H \otimes H
\end{array}$$

Mostraremos que $m \otimes m \circ \Delta_{H \otimes H} = m_{H \otimes H} \circ \Delta \otimes \Delta$ e que $u \otimes u \circ \Delta_{\mathbb{K}} = u_{\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}}$, concluindo que os dois diagramas acima equivalem aos dois à esquerda dentre os quatro exibidos anteriormente. De fato, tomando $h \otimes k \in H \otimes H$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
m \otimes m(\Delta_{H \otimes H}(h \otimes k)) &= m \otimes m\left(\sum h_1 \otimes k_1 \otimes h_2 \otimes k_2\right) \\
&= \sum (m(h_1 \otimes k_1) \otimes m(h_2 \otimes k_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{H \otimes H}(\Delta \otimes \Delta(h \otimes k)) &= m_{H \otimes H}\left(\left(\sum h_1 \otimes h_2\right) \otimes \left(\sum k_1 \otimes k_2\right)\right) \\
&= m_{H \otimes H}\left(\sum h_1 \otimes h_2 \otimes k_1 \otimes k_2\right) \\
&= \sum (m(h_1 \otimes k_1) \otimes m(h_2 \otimes k_2))
\end{aligned}$$

Por último, os diagramas abaixo caracterizam ε como homomorfismo de álgebras caso comutem:

$$\begin{array}{ccc}
H \otimes H & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \mathbb{K} \\
\downarrow m & & \downarrow & \downarrow u \\
H & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} & H \\
& & & \searrow \varepsilon \\
& & & \mathbb{K}
\end{array}$$

Notemos que o diagrama à direita é idêntico ao último dos quatro diagramas que caracterizam a primeira afirmação proposta. Para obter a equivalência entre os dois dia-

gramas restantes, basta mostrar que $m_{\mathbb{K}}(\varepsilon(h) \otimes \varepsilon(k)) = \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes k)$. Mas esta nada mais é do que a definição do mapa $\varepsilon_{H \otimes H}$. \square

Definição 1.8. $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ será uma **biálgebra** (sobre um corpo \mathbb{K}) se (H, m, u) for uma álgebra, (H, Δ, ε) for uma coálgebra e se valer qualquer uma das afirmações equivalentes da proposição 1.

Exemplo. O espaço vetorial $\mathbb{K}G$, sendo G monoide multiplicativo, também pode receber uma estrutura de coálgebra dada pela extensão linear das operações $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$. Neste caso, $(\mathbb{K}G, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra.

Exemplo. Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então H^* , com suas estruturas algébrica e coalgébrica, constitui também uma biálgebra. De fato, sejam δ, E , respectivamente, o coproduto e a counidade de H^* segundo as expressões (1.8) e (1.9), $f, g \in H^*$ mapas tais que $\delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ e $\delta(g) = \sum g_1 \otimes g_2$, e $a = \sum a_1 \otimes a_2$, $b = \sum b_1 \otimes b_2 \in H$ quaisquer (note que a estrutura de H^* como coálgebra já está posta, donde vêm as identificações). Então:

$$\begin{aligned} [\delta(fg)](a \otimes b) &= fg(ab) \\ &= \sum f(a_1 b_1) g(a_2 b_2) \\ &= \sum f_1(a_1) f_2(b_1) g_1(a_2) g_2(b_2) \\ &= \sum f_1 g_1(a) f_2 g_2(b) \\ &= [\delta(f)\delta(g)](a \otimes b) \end{aligned}$$

Ainda, para E , vale:

$$E(fg) = [fg](u(1)) = f(u(1))g(u(1)) = E(f)E(g)$$

e também:

$$E(\varepsilon) = \varepsilon(u(1)) = 1.$$

Acabamos de demonstrar que δ e E são homomorfismos entre álgebras, o que nos permite enunciar o teorema:

Teorema 1.4. *Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra sobre um corpo \mathbb{K} . Definindo mapas M, μ, δ, E de forma que (H^*, M, μ) e (H^*, δ, E) deem ao dual de H estruturas de álgebra e coálgebra, respectivamente, então (H^*, M, μ, δ, E) é uma \mathbb{K} -biálgebra.*

■

O último passo a ser dado para podermos definir uma álgebra de Hopf é a caracterização da aplicação antípoda. Para tal, tomemos uma biálgebra $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ e consideremos

o conjunto $End(H) = \{f: H \rightarrow H, f \text{ linear}\}$. Definimos nele uma estrutura de álgebra onde a multiplicação, denotada por $*$, é dada por:

$$(f * g)(h) = \sum f(h_1)g(h_2) \quad (1.11)$$

Aqui, f, g são elementos quaisquer de $End(H)$. Mais formalmente, temos $f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$. A associatividade dessa operação, denominada **convolução**, vem das propriedades associativa e coassociativa de m e Δ , respectivamente. Além disso, podemos mostrar que o mapa $u \circ \varepsilon$ é a unidade desta álgebra. De fato, para $h \in H$:

$$\begin{aligned} m \circ (f \otimes (u \circ \varepsilon)) \circ \Delta(h) &= \sum m(f(h_1)) \otimes u(\varepsilon(h_2)) \\ &= \sum f(h_1)\varepsilon(h_2) \quad (\text{unidade}) \\ &= f\left(\sum h_1\varepsilon(h_2)\right) \quad (\text{linearidade de } f) \\ &= f(h) \quad (\text{counidade}) \end{aligned}$$

Note que o mapa identidade, denotado I_H , pertence a $End(H)$, embora não seja sua unidade, em geral. H será uma álgebra de Hopf quando I_H for inversível no sentido da convolução.

Definição 1.9. Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Um mapa $S \in End(H)$ é dito uma **antípoda** de H se $S * I_H = I_H * S = u \circ \varepsilon$. Isto é, S é tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & H \otimes H & \xrightarrow{I_H \otimes S} & H \otimes H & & \\ & \nearrow \Delta & & & & \searrow m & \\ H & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} & \xrightarrow{u} & H & & \\ & \searrow \Delta & & & & \nearrow m & \\ & & H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes I_H} & H \otimes H & & \end{array}$$

Definição 1.10. Uma **álgebra de Hopf** sobre um corpo \mathbb{K} é uma 6-upla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ onde H é uma \mathbb{K} -biálgebra e S é uma antípoda de H .

É possível estender os conceitos de subálgebra e ideal definidos anteriormente às álgebras de Hopf, o que será feito neste momento. No que segue, H representa uma álgebra de Hopf munida de seus mapas fundamentais.

Definição 1.11. Um subespaço $H_1 \subset H$ é uma **Hopf-subálgebra**, ou **subálgebra de Hopf**, se H_1 for uma subálgebra e uma subcoálgebra de H , com relação às respectivas estruturas, e for fechado para a antípoda S .

Nota. H_1 será uma álgebra de Hopf se, e somente se $u(1_H) \in H_1$, por conta da restrição estrutural das subálgebras notada em ocasião de sua definição.

Definição 1.12. Um subespaço $H_I \subset H$ será um **Hopf-ideal**, ou **ideal de Hopf** de H quando H_I for um ideal da álgebra H , um coideal da coálgebra H , e for fechado para a antípoda.

Proposição 2. Seja H uma biálgebra comutativa e/ou cocomutativa. Se existe $S: H \rightarrow H$, antípoda de H , então $S^2 = I_H$.

Demonstração. Primeiramente, o diagrama que define a antípoda nos informa que, para todo elemento h de H , vale que:

$$m(S \otimes I_H(\Delta(h))) = \sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = u(\varepsilon(h))$$

Se H é comutativa, então $\sum S(h_1)h_2 = \sum h_2S(h_1)$, e se for cocomutativa, $\sum S(h_1)h_2 = \sum S(h_2)h_1$. Assim, para demonstrar o proposto, basta mostrarmos que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\sum h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$

(ii) $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$

(iii) $S^2 = I_H$

Para isto, faremos uso de um lema que aplica o conceito de antihomomorfismo de álgebras.

Definição 1.13. Sejam (A, m_A, u_A) , (B, m_B, u_B) duas álgebras sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Um mapa linear $\phi: A \rightarrow B$ é dito um **antihomomorfismo** entre as álgebras se for um homomorfismo entre A e $B^{op} = (B, m_B \circ \tau, u_B)$.

Lema 1.5. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S . Então S é um antihomomorfismo entre H e si mesma.*

Provar o lema significa mostrar que para quaisquer g, h em H , $S(hg) = S(g)S(h)$, e que $S(1_H) = 1_H$. Para tal, consideremos a álgebra dos homomorfismos de $H \otimes H$ em H com produto dado pela convolução. Por um argumento similar àquele aplicado anteriormente para mostrar que $u \circ \varepsilon$ era a unidade de $End(H)$, encontramos que $u_H \circ \varepsilon_{H \otimes H}$ é a unidade de $Hom(H \otimes H, H)$. Considere então os mapas $F, G, M \in Hom(H \otimes H)$ dados por:

$$F(g \otimes h) = S(g)S(h)$$

$$G(g \otimes h) = S(hg)$$

$$M(g \otimes h) = hg$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
(M * F)(g \otimes h) &= \sum M((g \otimes h)_1)F((g \otimes h)_2) \\
&= \sum M(g_1 \otimes h_1)F(g_2 \otimes h_2) \\
&= \sum h_1[g_1 S(g_2)]S(h_2) \\
&= \sum h_1 \varepsilon(g) 1_H S(h_2) \\
&= \varepsilon(g) 1_H \sum h_1 S(h_2) \\
&= \varepsilon(g) \varepsilon(h) 1_H \\
&= \varepsilon_{H \otimes H}(g \otimes h) 1_H \\
&= u_H \circ \varepsilon_{H \otimes H}(g \otimes h) \\
&= u_H \circ \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) \quad (\text{definição de } \varepsilon_{H \otimes H}) \\
&= u_H \circ \varepsilon(hg) \quad (m \text{ é homomorfismo entre coálgebras}) \\
&= \varepsilon(hg) 1_H \\
&= \sum S((hg)_1)(hg)_2 \\
&= \sum S(h_1 g_1)(h_2 g_2) \\
&= \sum G(g_1 \otimes h_1)M(g_2 \otimes h_2) \\
&= (G * M)(g \otimes h)
\end{aligned}$$

Logo, F e G são respectivamente inversos à direita e à esquerda de M em $\text{Hom}(H \otimes H, H)$. Pela unicidade do inverso em uma álgebra, $F = G \Rightarrow S(hg) = S(g)S(h)$. Desta, obtemos $S(h) = S(h1_H) = S(1_H)S(h) \Rightarrow S(1_H) = 1_H$, provando o lema.

Agora podemos mostrar a equivalência entre as afirmações acima.

(i) \Rightarrow (iii): Mostraremos que S^2 é inverso à esquerda de S com respeito à convolução. De fato, tomando $h \in H$:

$$\begin{aligned}
\sum (S^2 * S)(h) &= \sum S(S(h_1))S(h_2) \\
&= \sum F(S(h_1) \otimes h_2) \\
&= \sum G(S(h_1) \otimes h_2) \\
&= \sum S(h_2 S(h_1)) \\
&= S\left(\sum h_2 S(h_1)\right) \\
&= S(\varepsilon(h) 1_H) = \varepsilon(h) 1_H
\end{aligned}$$

Como I_H é o único inverso por convolução de S , temos que $S^2 = I_H$.

(iii) \Rightarrow (i): Sabemos que $\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$. Aplicando S aos dois lados da igualdade, obtemos $\sum S(S(h_2))S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$. Como $S^2 = I_H$, isto se torna $\sum h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$, como queríamos mostrar.

Para mostrar que (ii) \iff (iii), basta iniciar com a verificação de que S^2 é um inverso à direita de S em $\text{Hom}(H \otimes H, H)$, e então prosseguir analogamente ao que já foi feito. \square

De fato, mais frequentemente aplicaremos (i) e (ii) em detrimento do resultado principal para verificar a existência e forma de uma antípoda.

1.2.1 Álgebra de Hopf dual

Sabemos, pelo teorema (1.4), que se H é uma álgebra de Hopf, então H^* é uma biálgebra. Iremos verificar que sempre existe uma antípoda para H^* .

Teorema 1.6. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S . Então a biálgebra H^* torna-se uma álgebra de Hopf quando munida de seus mapas fundamentais e de $S^*: H^* \rightarrow H^*$ dado pela relação*

$$[S^*(h^*)](x) = h^* \circ S(x).$$

Demonstração. Sabemos que S^* será uma antípoda para H^* se, e só se $\mu \circ (S^* \otimes Id_{H^*}) \circ \delta = U \otimes E = \mu \circ (Id_{H^*} \otimes S^*) \circ \delta$. Assim, seja $w \in h^*$ com $\delta(w) = \sum w_1 \otimes w_2$, e $h \in H$.

$$\begin{aligned} [(\mu \circ (S^* \otimes Id_{H^*}) \circ \delta)(w)](h) &= \sum [S^*(w_1)](h_1)w_2(h_2) \\ &= \sum w_1(S(h_1))w_2(h_2) \\ &= \sum w(S(h_1)h_2) \\ &= w(\varepsilon(h)1_H) \\ &= w(1_H)\varepsilon(h) \\ &= U(w(1_H))(h) = U \times E(h) \end{aligned}$$

Os cálculos para a igualdade restante são análogos. \square

1.2.2 Exemplos de álgebras de Hopf

Exemplo. Voltaremos à biálgebra $\mathbb{K}G$, construída no decorrer do texto, mas fazendo uma modificação: G deverá ter agora a estrutura completa de grupo, isto é, todo elemento de G terá inverso multiplicativo. Isto se requer pois a antípoda de $\mathbb{K}G$ é dada justamente pelo mapa $S: \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}G$ definido pela extensão linear de $S(g) = g^{-1}$. Demonstrando:

$$\begin{aligned}
m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) &= m \circ (S \otimes Id) \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \otimes g \right) \\
&= m \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1} \otimes g \right) \\
&= \sum_{g \in G} \alpha_g 1_G \\
&= u \left(\sum_{g \in G} \alpha_g \right) \\
&= u \circ \varepsilon \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right)
\end{aligned}$$

A outra igualdade é provada analogamente. No caso onde G é apenas um monoide, a unicidade da antípoda garante que $\mathbb{K}G$ não é uma álgebra de Hopf. A unicidade vem do fato da antípoda ser o inverso de um elemento em uma álgebra de homomorfismos.

Exemplo. Tomemos novamente H como o \mathbb{K} -espaço vetorial com base infinita enumerável $\{c_n | n \geq 0\}$. Como vimos anteriormente, ele conta com estruturas de álgebra e de coálgebra com as operações abaixo, estendidas linearmente, e com $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
m(c_n \otimes c_m) &= \binom{n+m}{n} c_{n+m} \\
u(\lambda) &= \lambda c_0 \\
\Delta(c_n) &= \sum_{i=0}^n c_i \otimes c_{n-i} \\
\varepsilon(c_n) &= \delta_{0,n}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que Δ e ε , como definidos acima, são homomorfismos de álgebra. Para ε , a linearidade de todas as operações reduz a comutatividade dos diagramas às igualdades a seguir, obviamente válidas:

$$\delta_{0,n} \delta_{0,m} = \delta_{0,n+m} \quad \varepsilon(u(1_{\mathbb{K}})) = 1_{\mathbb{K}}$$

Quanto a Δ , o primeiro diagrama irá comutar desde que valha

$$\Delta(m_H(c_n \otimes c_m)) = m_{H \otimes H}(\Delta \otimes \Delta(c_n \otimes c_m))$$

para quaisquer naturais n e m . Isto é, devemos mostrar que o seguinte é verdadeiro:

$$\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{n} c_k \otimes c_{n+m-k} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \binom{i+j}{i} \binom{n+m-(i+j)}{n-i} c_{i+j} \otimes c_{n+m-(i+j)}$$

Convencionaremos que a combinação simples $C_r^n = 0$ quando $r > n$. Fazendo $t = i + j$ e reescrevendo o lado direito da igualdade, temos:

$$\sum_{t=0}^{n+m} \sum_{i=0}^d \binom{t}{i} \binom{n+m-t}{n-i} c_t \otimes c_{n+m-t}$$

onde $d = \min\{t, n\}$. Isto reduz o problema a mostrar que, para todo natural $t \leq n + m$:

$$\sum_{i=0}^d \binom{t}{i} \binom{n+m-t}{n-i} = \binom{n+m}{n}$$

Podemos resolvê-lo por indução em t . O caso $t = 0$ é trivial, então suponhamos que a igualdade vale para algum $t < n + m$. Mostrar que a mesma se verifica para $t + 1$ equivale a concluir que:

$$\sum_{i=0}^{t+1} \binom{t+1}{i} \binom{n+m-(t+1)}{n-i} = \binom{n+m}{n}$$

A expansão do lado esquerdo da igualdade acima nos dá:

$$\begin{aligned} \binom{t+1}{0} \binom{n+m-t-1}{n} + \binom{t+1}{1} \binom{n+m-t-1}{n-1} + \dots \\ + \binom{t+1}{t} \binom{n+m-t-1}{n-t} + \binom{t+1}{t+1} \binom{n+m-t-1}{n-t-1} \end{aligned}$$

Aplicaremos um resultado simples de Combinatória: dados $a \geq b$ dois naturais não nulos, temos que:

$$\binom{a+1}{b} = \binom{a}{b-1} + \binom{a}{b} \quad (1.12)$$

Isto transforma mais uma vez a expressão anterior.

$$\begin{aligned}
& \binom{t}{0} \left[\binom{n+m-t-1}{n} + \binom{n+m-t-1}{n-1} \right] \\
& + \binom{t}{1} \left[\binom{n+m-t-1}{n-1} + \binom{n+m-t-1}{n-2} \right] + \dots \\
& + \binom{t}{t-1} \left[\binom{n+m-t-1}{n-(t-2)} + \binom{n+m-t-1}{n-(t-1)} \right] \\
& + \binom{t}{t} \left[\binom{n+m-t-1}{n-(t-1)} + \binom{n+m-t-1}{n-t} \right]
\end{aligned}$$

Aplicando (1.12) nas somas entre colchetes, chegamos a:

$$\begin{aligned}
& \binom{t}{0} \binom{n+m-t}{n} + \binom{t}{1} \binom{n+m-t}{n-1} + \dots \\
& + \binom{t}{t-1} \binom{n+m-t}{n-(t-1)} + \binom{t}{t} \binom{n+m-t}{n-t} \\
& = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} \binom{n+m-t}{i} = \binom{n+m}{n}
\end{aligned}$$

A última por hipótese de indução. Isto confirma a comutatividade do primeiro dos dois diagramas que caracterizam Δ como um homomorfismo entre as álgebras H e $H \otimes H$. Felizmente, a comutatividade do segundo é verificada de maneira direta:

$$\Delta(u(\lambda)) = \Delta(\lambda c_0) = \lambda c_0 \otimes c_0 = u_{H \otimes H}(\lambda)$$

Desta forma, H é uma \mathbb{K} -biálgebra. Como ela é claramente cocomutativa, basta que um mapa linear $S : H \rightarrow H$ satisfaça $\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$ em uma base de H para que ele seja igual à antípoda. Definiremos recursivamente um mapa com estas propriedades sobre a base com a qual trabalhamos. Para $n = 0$, temos:

$$S(c_0) = S(1_H) = 1_H = c_0$$

Em seguida:

$$S(c_0)c_1 + S(c_1)c_0 = 0 \Rightarrow S(c_1) = -S(c_0)c_1 = -c_1$$

Assumamos que $S(c_0), \dots, S(c_{n-1})$ foram definidos de forma a respeitar a propriedade

anterior. Então, $S(c_n)$ é tal que a igualdade a seguir é satisfeita:

$$S(c_0)c_n + S(c_1)c_{n-1} + \cdots + S(c_n)c_0 = 0$$

↓

$$S(c_n) = -S(c_0)c_n - S(c_1)c_{n-1} - \cdots - S(c_{n-1})c_1$$

Esta última é a forma geral da antípoda de H . Note que ela concorda com os casos particulares feitos separadamente.

Exemplo. Consideremos novamente a álgebra tensorial $T(V)$, com V espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Anteriormente, colocamos em $T(V)$ uma estrutura de álgebra por meio das operações m, u ; e uma estrutura de coálgebra por meio de Δ' e ε . Para que $(T(V), m, u, \Delta', \varepsilon)$ seja uma biálgebra, devemos ter, em particular, que Δ' é um homomorfismo entre $T(V)$ e $T^2(T(V)) = T(V) \otimes T(V)$. Por um lado, os cálculos nos dão:

$$\Delta'(m((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_{k+l})) = \sum_{j=0}^{k+l} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes (v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_{k+l})$$

Pelo outro lado, contudo:

$$\begin{aligned} & m_{T(V)^{2\otimes}}(\Delta' \otimes \Delta'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_{k+l})) \\ &= m_{T(V)^{2\otimes}} \left(\sum_{j_A=0}^k \sum_{j_B=k+1}^{k+l} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j_A}) \otimes (v_{j_A+1} \otimes \cdots \otimes v_k) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \otimes (v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_{j_B}) \otimes (v_{j_B+1} \otimes \cdots \otimes v_{k+l}) \right) \\ &= \sum_{j_A, j_B} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j_A} \otimes v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_{j_B}) \otimes (v_{j_A+1} \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v_{j_B+1} \otimes \cdots \otimes v_{k+l}) \end{aligned}$$

Assim, a quintupla acima não corresponde a uma biálgebra. No entanto, podemos contornar este defeito ao definir o coproduto em V por:

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v,$$

e estendendo multiplicativamente $\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) := \Delta(v_1) \cdots \Delta(v_k)$, obtemos uma nova coálgebra para $T(V)$, cuja expressão geral é dada por:

$$\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum_{j=0}^k \sum_{\sigma \in Sh(k, j-k)} (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(j)} \otimes (v_{\sigma(j+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)})) \quad (1.13)$$

Acima, $Sh(k, j - k) \subset \sigma : [k] \rightarrow [k]$ é o conjunto das permutações tais que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(j)$$

$$\sigma(j + 1) < \cdots < \sigma(k),$$

mas não necessariamente $\sigma(a) < \sigma(b)$ quando $a \leq j < b$.

Neste caso, a antípoda S é dada pela seguinte fórmula:

$$S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = (-1)^k (v_k \otimes \cdots \otimes v_1) \quad (1.14)$$

Isto ocorre pois $S(v) = -v$ é trivialmente antípoda em V , a qual se estende à expressão acima pelo lema (1.5).

Iremos resumir o que concluímos sobre a álgebra tensorial $T(V)$ a seguir.

Teorema 1.7. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Então a álgebra tensorial de V ,*

$$T(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \cdots,$$

é uma álgebra de Hopf quando munida dos mapas $m, u, \Delta, \varepsilon, S$ definidos anteriormente.

1.3 Árvores e raízes

Grafos são estruturas constituídas por um conjunto finito de vértices V e um conjunto E de elos, geralmente denotadas por $G = (V, E)$, onde elos representam ligações entre pares de vértices. Grafos podem ser orientados ou não: muitas vezes, a conexão entre vértices em um grafo G é definida como sendo uma relação simétrica em V . Quando isto não ocorre, G é orientado.

Considere um grafo orientado $T = (V, E)$, e seja $v \in V$. O grau de entrada de v é a cardinalidade do conjunto $\{w \in V \mid (w, v) \in E\}$, isto é, o número de elos em G apontando para v . O seu grau de saída é definido analogamente, mas com v ocupando a posição à esquerda de cada par ordenado, a qual representa o vértice de origem do elo correspondente.

Um grafo do tipo árvore é aquele onde, desconsiderando a orientação, para quaisquer dois de seus vértices, existe um único subconjunto de seus elos - um caminho - que os conecta. Se um grafo orientado satisfaz tal propriedade, ele é uma árvore orientada.

Se T é uma árvore orientada, é possível determinar uma ordem parcial \succeq em $V(T)$, onde dois vértices satisfazem $v_1 \succeq v_2$ se, e somente se existe um caminho em T conectando

v_1 a v_2 . Um vértice v_0 é dito uma **raiz** de T quando para todo $v_0 \in V(T) \setminus v$, vale $v \succeq v_0$, salvo casos onde v e v_0 não são comparáveis.

Notemos que toda árvore orientada T tem ao menos uma raiz. De fato, o seguinte algoritmo retornará um ciclo $e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow \cdots \rightarrow e_k \rightarrow e_0$ em T iterando no máximo $|T|$ vezes:

1. Escolha um vértice qualquer v_0 de T ;
2. Tome um vértice v_1 com $v_0 \succeq v_1$, que existe por hipótese, e defina $e_0 = (v_0, v_1)$;
3. $k \leftarrow 1$;
4. Tome um vértice v_{k+1} com $v_k \succeq v_{k+1}$, e defina $e_k = (v_k, v_{k+1})$;
5. Se $v_{k+1} \in \{v_0, \dots, v_k\}$, encerre;
6. $k \leftarrow k + 1$;
7. Retorne ao passo 4.

No entanto, árvores com múltiplas raízes podem ser encontradas. Tais não serão consideradas nesta oportunidade, motivando a definição de árvore com raiz presentemente mais apropriada.

Definição 1.14. Uma **árvore com raiz** é uma árvore orientada $T = (V, E)$ com exatamente uma raiz $v_0 \in V$.

Aos vértices de uma árvore com raiz são atribuídas duas características: a *fertilidade*, ou o grau de saída do vértice em questão; e a *profundidade*, dado pela quantidade de arestas que formam o (único) caminho ligando o vértice à raiz. Duas árvores com raiz T_1 e T_2 são ditas **isomorfas** quando existe uma relação entre $V(T_1)$ e $V(T_2)$ que seja bijetiva e preserve fertilidade e profundidade.

2. A álgebra de Hopf de Connes-Kreimer

Seja n um número natural não nulo. Denotaremos por \mathbb{T}_n o conjunto das árvores com raiz com número de vértices igual ou inferior a n , a menos de isomorfismo, e por H_n a \mathbb{R} -álgebra comutativa gerada por \mathbb{T}_n e pela unidade 1_H , correspondente à árvore vazia. Esta é a álgebra onde todo elemento pode ser representado por um polinômio nos elementos de \mathbb{T}_n com coeficientes reais. O produto em H_n , análogo à multiplicação entre polinômios, é pictograficamente representado por justaposição.

O objeto central desta seção será resultante da união enumerável dos espaços H_n , e portanto se trata de uma álgebra localmente finita, como definiremos abaixo.

Definição 2.1. Uma álgebra A é dita **localmente finita** se todo subconjunto finito $M \subset A$ está contido em uma subálgebra de dimensão finita de A . Em particular, podemos descrever A como o limite direto de subálgebras $A_n \subset A$ ordenadas pela inclusão.

Definição 2.2. O espaço vetorial dado por

$$H_R = \bigcup_{n \geq 0} H_n,$$

munido do produto descrito acima e do mapa que associa um número real λ a $u(\lambda) = \lambda 1_H$ denomina a **álgebra de Connes-Kreimer**.

Para estabelecer uma estrutura de coálgebra em H_n , introduziremos o conceito de corte simples de uma árvore com raiz T .

Definição 2.3. Um **corte simples** de T é um subconjunto $c \in E(T)$ tal que o caminho que parte da raiz para qualquer um de seus vértices contém no máximo um elemento de c .

A ação de um corte simples sobre uma árvore T consiste na remoção das arestas de c de T , e seu resultado é a obtenção de uma ou mais subárvores. Uma delas, aquela que

contém a raiz original de T , é dita o **tronco** de T por c e denotada por $R_c(T)$. Cada uma das demais subárvores será um **galho** de T por c , com raiz dada pelo vértice com o menor patamar em T . O produto desses galhos é denotado por $P_c(T)$.

O conjunto dos cortes simples admissíveis para uma dada árvore T será denotado por $C(T)$. Este inclui o corte trivial $c = \emptyset$. Note que $R_\emptyset(T) = T$ e $P_\emptyset(T) = \emptyset$ neste caso.

Com o auxílio dos cortes simples, podemos definir um coproduto para H_n .

Definição 2.4. A ação do mapa $\Delta: H_n \rightarrow H_n \otimes H_n$ sobre uma árvore com raiz $T \in \mathbb{T}_n$ é dada por:

$$\Delta(T) = T \otimes 1 + \sum_{c \in C(T)} P_c(T) \otimes R_c(T) \quad (2.1)$$

A extensão de Δ dos geradores para todo o H_n de forma que o mapa seja um homomorfismo entre álgebras é única, definindo completamente a operação.

A counidade $\varepsilon: H_n \rightarrow \mathbb{R}$, por sua vez, é definida pelas igualdades

$$\varepsilon(1_H) := 1_{\mathbb{R}} \quad \varepsilon(t_1 t_2 \dots t_k) := 0,$$

onde t_i é uma árvore não vazia, para todos os índices aplicáveis.

Mostrar que a counidade satisfaz a comutatividade de seu diagrama é simples. Assim, basta provar que Δ , como exibido acima, verifica a coassociatividade. Para tal, faremos uso do mapa $L: H_R \rightarrow H_R$, que toma um conjunto de árvores $t_1 t_2 \dots t_k$ e retorna a árvore T obtida criando-se uma nova raiz, por sua vez conectada a cada uma das k raízes originais. L é linear por extensão.

Lema 2.1. *O mapa $\Delta: H_n \rightarrow H_n \otimes H_n$ é coassociativo para todo n .*

Demonstração. Basta mostrar que, para toda árvore com raiz $T \in H_n$, vale a igualdade:

$$Id \otimes \Delta(\Delta(T)) = \Delta \otimes Id(\Delta(T)) \quad (2.2)$$

Primeiramente, provaremos a validade da seguinte igualdade auxiliar:

$$\Delta \circ L(a) = L(a) \otimes 1 + (Id \otimes L) \circ \Delta(a) \quad (2.3)$$

Seja $a = t_1 t_2 \dots t_k$ tal que $L(a) = T$, para alguma árvore $T \in \mathbb{T}_n$. Pela expressão de Δ , temos:

$$\Delta(L(a)) - L(a) \otimes 1 = \sum_{c \in C(T)} P_c(T) \otimes R_c(T)$$

Por outro lado, $\Delta(a) = \Delta(t_1 t_2 \dots t_k) = \prod_{i=1}^k \Delta(t_i)$, donde:

$$\Delta(a) = \prod_{i=1}^k \left(t_i \otimes 1 + \sum_{c \in C(t_i)} P_c(t_i) \otimes R_c(t_i) \right)$$

Note que cada termo desta soma é um produto de k elementos de $H_n \otimes H_n$. Tome um corte simples q de T . As arestas contidas no corte dividem-se em dois subconjuntos: aquelas que se conectam diretamente à raiz, e aquelas que pertencem a uma das árvores t_i . Assim, podemos caracterizar q por um subconjunto $I(q) \subset [k]$ dos índices das raízes das árvores t_i que não estão contidas em $R_q(T)$ e, para cada $j \in [k] - I(q)$, pelo corte simples q_j dado pela restrição de q à subárvore t_j .

O que tal caracterização nos dá é uma correspondência biunívoca entre os cortes simples de T e os vários termos da expressão de $\Delta(a)$. Por exemplo, o corte q está associado ao termo:

$$\prod_{i \in I(q)} t_i \otimes 1 \prod_{j \in [k] - I(q)} P_{q,j}(t_j) \otimes R_{q,j}(t_j)$$

Assim, podemos reescrever $\Delta(a)$ como uma soma indexada pelos cortes simples de T . Aplicando $Id \otimes L$ sobre tal soma, obtemos:

$$\begin{aligned} (Id \otimes L) \circ \Delta(a) &= \sum_{q \in C(T)} \left(\prod_{i \in I(q)} t_i \prod_{j \in [k] - I(q)} P_{q,j}(t_j) \right) \otimes L \left(\prod_{j \in [k] - I(q)} R_{q,j}(t_j) \right) \\ &= \sum_{q \in C(T)} P_q(T) \otimes R_q(T) = \Delta \circ L(a) - L(a) \otimes 1 \end{aligned}$$

Isto prova (2.3).

O lema será provado por indução. Denotemos por $t_{(1)}$ a árvore com raiz com um único vértice. Como $\Delta(t_{(1)}) = t_{(1)} \otimes 1 + 1 \otimes t_{(1)}$, Δ é coassociativo em H_1 .

Suponhamos, então, que Δ é coassociativo em H_n . Para mostrar o mesmo em relação a H_{n+1} , é suficiente que valha (2.2) para toda árvore de \mathbb{T}_{n+1} com exatamente $n + 1$ vértices. Tome T , uma dessas árvores. Então $T = L(t_1 t_2 \dots t_k) = L(a)$, onde todas as t_i têm vértices em quantidade menor ou igual a n . Assim, podemos substituir $\Delta(T)$ por $\Delta \circ L(a)$, em (2.2), para trabalhar com a restrição comprovadamente coassociativa de Δ e habilitar a aplicação de (2.3). À esquerda, temos:

$$\begin{aligned}
Id \otimes \Delta(\Delta \circ L(a)) &= Id \otimes \Delta(L(a) \otimes 1) + (Id \otimes \Delta) \circ (Id \otimes L)(\Delta(a)) \\
&= L(a) \otimes 1 \otimes 1 + \left(\sum a_1 \otimes \Delta \circ L(a_2) \right) \\
&= L(a) \otimes 1 \otimes 1 + \left(\sum a_1 \otimes L(a_2) \otimes 1 \right) + \left(\sum a_1 \otimes (Id \otimes L)(\Delta(a_2)) \right) \\
&= L(a) \otimes 1 \otimes 1 + \sum a_1 \otimes L(a_2) \otimes 1 + \sum a_1 \otimes a_{21} \otimes L(a_{22})
\end{aligned}$$

enquanto à direita:

$$\begin{aligned}
\Delta \otimes Id(\Delta \circ L(a)) &= \Delta \otimes Id(L(a) \otimes 1) + (\Delta \otimes Id) \circ (Id \otimes L)(\Delta(a)) \\
&= \Delta \circ L(a) \otimes 1 + \left(\sum \Delta(a_1) \otimes L(a_2) \right) \\
&= L(a) \otimes 1 \otimes 1 + \left((Id \otimes L) \left(\sum a_1 \otimes a_2 \right) \right) \otimes 1 + \sum a_{11} \otimes a_{12} \otimes L(a_2) \\
&= L(a) \otimes 1 \otimes 1 + \sum a_1 \otimes L(a_2) \otimes 1 + \sum a_{11} \otimes a_{12} \otimes L(a_2)
\end{aligned}$$

A coassociatividade de Δ em H_n implica na equivalência entre os últimos termos das duas expressões. Assim, (2.2) é verdadeira, donde Δ é coassociativo também em H_{n+1} . \square

O mapa Δ é, por construção, um homomorfismo entre álgebras, e a verificação de que ε satisfaz a mesma propriedade é trivial. H_n , e por consequência H_R , cumprem assim o segundo item da proposição 1, o que os caracterizam como biálgebras.

Resta-nos determinar se existe uma antípoda para H_R . Isto será feito explorando sua definição, como o inverso da identidade na álgebra $(End(H_R), *, u \circ \varepsilon)$. Vamos assumir que $S: H_R \rightarrow H_R$ é o mapa que verifica esta propriedade. Denotando $(u \circ \varepsilon - Id)$ por η , temos:

$$\begin{aligned}
S * Id = u \circ \varepsilon &\Rightarrow S = (Id)^{-1} = (u \circ \varepsilon - (u \circ \varepsilon - Id))^{-1} \\
&= (u \circ \varepsilon - \eta)^{-1} \\
&= u \circ \varepsilon + \eta + \eta * \eta + \dots
\end{aligned}$$

Ressaltamos que a exponenciação denota aqui a convolução de uma mapa consigo mesmo, e não a composição. A expressão se justifica diretamente: para uma álgebra (A, m, u) qualquer, onde denotamos $m(a \otimes b) = ab$ e $u(1_{\mathbb{K}}) = u$, temos que:

$$(u(1_{\mathbb{K}}) - a) \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i - \sum_{i=1}^{\infty} a^i = u(1_{\mathbb{K}}).$$

Definir a antípoda como uma série, no entanto, exige que a mesma seja convergente

dentro de todo seu domínio. De fato, algo mais forte se verifica: para toda árvore com raiz T , $S(T)$ se dá por uma soma finita de mapas.

Lema 2.2. *Se T é uma árvore com raiz com n vértices, a expansão em série geométrica de $S(T)$ não tem mais do que $n + 1$ termos diferentes de zero.*

Demonstração. Segue por indução no número de vértices n . Para $t_{(1)}$, temos $u \circ \varepsilon(t_{(1)}) = 0$, tão como $\eta(t_{(1)}) = -t_{(1)}$, e quando $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} \eta^j(t_{(1)}) &= m \circ [\eta \otimes \eta^{j-1}] \circ \Delta(t_{(1)}) \\ &= m \circ [\eta \otimes \eta^{j-1}] ((t_{(1)} \otimes 1 + 1 \otimes t_{(1)})) \\ &= m(-t_{(1)} \otimes 0 + 0 \otimes \eta^{j-1}(t_{(1)})) = 0 \end{aligned}$$

Assuma, então, a validade do lema para toda árvore com até n vértices. Seja T uma árvore com $n + 1$ deles, donde temos:

$$\begin{aligned} \eta^{n+2}(T) &= m \circ [\eta \otimes \eta^{n+1}] \circ \Delta(T) \\ &= m \circ [\eta \otimes \eta^{n+1}] \left(T \otimes 1 + \sum_{c \in \mathcal{C}(T)} P_c(T) \otimes R_c(T) \right) \end{aligned}$$

O primeiro termo se anula, pois $\eta(1_H) = 0$. Quanto ao termo restante, para todo corte não trivial, $R_c(T)$ é uma árvore com raiz com vértices em quantidade n ou menor, e por hipótese de indução, $\eta^{n+1}(R_c(T))$ desaparece. Finalmente, $P_\emptyset(T) = 1$, o que resulta em zero novamente. Assim, $\eta^{n+2}(T) = 0$. \square

2.1 H_R é uma biálgebra com graduação

Biálgebras podem contar com uma estrutura adicional que nos permite decompô-las em uma quantidade enumerável de subespaços, a graduação. Ela nos permite trabalhar com mapas de maneira mais flexível, além de constituir uma noção dualizável. Iremos agora defini-la.

Definição 2.5. Seja $H, m, u, \Delta, \varepsilon$ uma \mathbb{K} -biálgebra. Dizemos que ela admite uma **graduação** $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, onde $H_i \subset H \forall i$, se as seguintes propriedades forem verificadas:

- (i) $H_0 = u(\mathbb{K})$, equivalente a dizer que H é uma biálgebra **conexa**;
- (ii) $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$;

(iii) $m(H_j \otimes H_k) \subset H_{j+k}, \forall j, k \in \mathbb{K}$;

(iv) $\Delta(H_j) \subset \sum_{k=0}^j H_k \otimes H_{j-k}$.

Passemos à verificação de que H_R admite graduação, com o espaço gerado pelas florestas com j vértices representando o j -ésimo elemento.

Proposição 3. $\{H_{R_i} = \text{span}\{t_1 \dots t_k : \sum_{\alpha=1}^k |V(t_\alpha)| = i\}\}_{i \in \mathbb{K}}$ é uma graduação para a biálgebra H_R .

Demonstração. A validade das primeiras duas propriedades é clara (a soma é direta pois a separação das florestas pelo número de vértices é disjunta). Como o produto de H_R é dado por justaposição, o número de vértices na floresta resultante do produto de duas outras será a soma dos vértices compondo as originais, donde vale (iii). Por fim, a ação de um corte sobre uma árvore não elimina nenhum vértice, donde cada tensor que faz parte da soma definindo $\Delta(T)$ tem exatos $|V(T)|$ vértices entre suas componentes, logo vale (iv). \square

A graduação fornece um ambiente para que se defina uma espécie de dual restrito da biálgebra que a possui. Uma das vantagens disso é a manutenção da estrutura de biálgebra no espaço dual, o que ocorre naturalmente apenas em dimensão finita. Isto ainda está condicionado à finitude da dimensão dos elementos da graduação, mas se trata de uma restrição bem mais fraca e mais frequentemente verificada. É o caso, em particular, da álgebra de Connes-Kreimer.

Definição 2.6. Seja $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i$ uma biálgebra com graduação. Definimos seu **dual com graduação** como sendo a biálgebra H^{gr} dada por:

$$H^{gr} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (H_i)^*$$

Exploraremos a forma que o dual com graduação da álgebra de Connes-Kreimer H_R^{gr} assume mais à frente.

2.2 Uma fórmula para $S(a)$

Quando $a = t_1 \dots t_k$ é tal que as árvores que o constituem contam com no mínimo um e até n vértices, teremos $S(a) = [u \circ \varepsilon + \eta + \dots + (\eta)^n](a)$. Isso nos permite expressar completamente o valor de $S(a)$, supondo conhecidos todos os termos de $\Delta(a)$.

Utilizaremos temporariamente uma nova notação para o coproduto. Tomando $a \in H_n$, teremos que $\Delta(a) = \sum_{i_1} a'_{i_1} \otimes a''_{i_1}$, e também que $\Delta(a''_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \sum_{i_{k+1}} a'_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} \otimes a''_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$.

$$\begin{aligned} u \circ \varepsilon(a) &= 0 \\ \eta(a) &= -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta^2(a) &= (\eta * \eta)(a) = [m \circ (\eta \otimes \eta) \circ \Delta](a) \\ &= [m \circ (\eta \otimes \eta)] \left(\sum_{i_1} a'_{i_1} \otimes a''_{i_1} \right) \\ &= m \left(\sum_{i_1} \eta(a'_{i_1}) \otimes \eta(a''_{i_1}) \right) \\ &= \sum_{i_1} \eta(a'_{i_1}) \eta(a''_{i_1}) \\ &= \sum_{i_1} a'_{i_1} a''_{i_1} \end{aligned}$$

Note, no entanto, que a operação $\eta \otimes \eta$ elimina os tensores de $\Delta(a)$ onde a árvore vazia é uma das componentes. Podemos, assim, ignorar preemptivamente esses termos ao realizar este e os cálculos seguintes, o que será representado pelo índice $|1|$.

$$\begin{aligned} \eta^3(a) &= (\eta * \eta^2)(a) = [m \circ (\eta \otimes \eta^2) \circ \Delta](a) \\ &= [m \circ (\eta \otimes \eta^2)] \left(\sum_{i_1, |1|} a'_{i_1} \otimes a''_{i_1} \right) \\ &= m \left(\sum_{i_1, |1|} \eta(a'_{i_1}) \otimes \eta^2(a''_{i_1}) \right) \\ &= \sum_{i_1, |1|} \eta(a'_{i_1}) \eta^2(a''_{i_1}) \\ &= \sum_{i_1, |1|} -a'_{i_1} \left(\sum_{i_2, |1|} a'_{i_1 i_2} a''_{i_1 i_2} \right) \\ &= \sum_{i_1, i_2, |1|} -a'_{i_1} a'_{i_1 i_2} a''_{i_1 i_2} \end{aligned}$$

De maneira análoga:

$$\begin{aligned}
\eta^{m+1}(a) &= (\eta * \eta^m)(a) \\
&= [m \circ (\eta \otimes \eta^m) \circ \Delta](a) \\
&= \sum_{i_1, |1|} -a'_{i_1} \left(\sum_{i_2, |1|} -a'_{i_1 i_2} \left(\sum_{i_3, |1|} -a'_{i_1 i_2 i_3} \cdots \left(\sum_{i_m, |1|} a'_{i_1 i_2 \dots i_m} a''_{i_1 i_2 \dots i_m} \right) \cdots \right) \right)
\end{aligned}$$

A manipulação de termos realizada até agora não é capaz de fornecer uma fórmula fechada para a antípoda, mas consegue transmitir a ideia de que os cálculos são realizados de certo modo recursivamente, e que a quantidade de tensores a serem considerados decai à medida que o grau da convolução cresce.

Retomaremos a questão da fórmula explícita mais adiante. Neste momento, desenvolveremos o cálculo de $S(t_{(42)})$ do início ao fim. Sabemos que $u \circ \varepsilon(t_{(42)}) = 0$ e que $\eta(t_{(42)}) = -t_{(42)}$. Além disso, temos que:

$$\Delta(t_{(42)}) = t_{(42)} \otimes 1 + 1 \otimes t_{(42)} + t_{(1)} \otimes t_{(32)} + t_{(2)} \otimes t_{(2)} + t_{(1)} \otimes t_{(31)} + t_{(2)} t_{(1)} \otimes t_{(1)} + t_{(1)}^2 \otimes t_{(2)}$$

Para calcular $\eta^2(t_{(42)})$, basta eliminar os termos que contam com ao menos uma componente igual a 1, e tomar a soma do produto das componentes de cada tensor restante. Logo:

$$\eta^2(t_{(42)}) = t_{(1)} t_{(32)} + t_{(2)}^2 + t_{(1)} t_{(31)} + 2t_{(2)} t_{(1)}^2$$

Prosseguindo, devemos tomar $(Id \otimes \Delta)$ de cada parcela restante, eliminando mais uma vez aquelas onde a árvore vazia apareça. A soma das restantes será dada por:

$$\begin{aligned}
t_{(1)} \otimes (2t_{(1)} \otimes t_{(2)} + t_{(1)}^2 \otimes t_{(1)}) &+ t_{(2)} \otimes (t_{(1)} \otimes t_{(1)}) \\
&+ t_{(1)} \otimes (t_{(2)} \otimes t_{(1)} + t_{(1)} \otimes t_{(2)}) \\
&+ t_{(1)}^2 \otimes (t_{(1)} \otimes t_{(1)})
\end{aligned}$$

Fazendo o produto das componentes de cada tensor, e então somando, obtém-se:

$$\eta^3(t_{(42)}) = -(5t_{(2)} t_{(1)}^2 + 2t_{(1)}^4)$$

Observa-se que, como η inverte sinal, este é negativo quando o expoente da convolução é ímpar. O expoente determina o número de vezes que o produto é composto consigo mesmo, segundo a definição da convolução.

Finalmente, repete-se o procedimento anterior (dessa vez, o mapa aplicado é $Id \otimes Id \otimes \Delta$) para que se tenha o valor de $\eta^4(t_{(42)})$. Como $\Delta(t_{(1)}) = t_{(1)} \otimes 1 + 1 \otimes t_{(1)}$, todos os tensores cuja terceira componente é $t_{(1)}$ podem ser desconsiderados. A soma remanescente

é dada por $3t_{(1)} \otimes t_{(1)} \otimes t_{(2)}$, convertida em $3t_{(1)} \otimes t_{(1)} \otimes t_{(1)} \otimes t_{(1)}$ pelo mapa citado acima, já levando em conta o descarte. Distto resulta que:

$$\eta^4(t_{(42)}) = 3t_{(1)}^4$$

$S(t_{(42)})$ é igual à soma dos quatro termos não nulos obtidos ao decorrer do processo.

Para determinar uma fórmula fechada para a antípoda de um elemento de H_n , voltemos nossa atenção para a expressão de η^{m+1} mais uma vez:

$$\eta^{m+1}(a) = \sum_{i_1, |1|} -a'_{i_1} \left(\sum_{i_2, |1|} -a'_{i_1 i_2} \left(\sum_{i_3, |1|} -a'_{i_1 i_2 i_3} \cdots \left(\sum_{i_m, |1|} a'_{i_1 i_2 \dots i_m} a''_{i_1 i_2 \dots i_m} \right) \cdots \right) \right)$$

A indicação de que parte dos tensores é desconsiderada torna-se inconveniente. Em seu lugar, implementaremos uma simbologia diferente, codificada pelas identidades a seguir:

$$\sum_{i_k} \eta(a'_{i_1 \dots i_k}) = - \sum_{i_k} b'_{i_1 \dots i_k} \quad \sum_{i_m} \eta(a'_{i_1 \dots i_m} a''_{i_1 \dots i_m}) = \sum_{i_m} b'_{i_1 \dots i_m} b''_{i_1 \dots i_m}$$

onde:

$$b'_{i_1 \dots i_k} = \begin{cases} 0 & \text{se } a'_{i_1 \dots i_k} = 1 \text{ ou } a''_{i_1 \dots i_k} = 1 \\ a'_{i_1 \dots i_k} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e:

$$b''_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} 0 & \text{se } a''_{i_1 \dots i_m} = 1 \\ a''_{i_1 \dots i_m} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com base nisso, a fórmula é escrita como segue:

$$S(a) = \sum_{k=0}^m (-1)^{k+1} \sum_{i_1, \dots, i_k} b'_{i_1} b'_{i_1 i_2} \cdots b'_{i_1 \dots i_k} b''_{i_1 \dots i_k} \quad (2.4)$$

onde $m + 1$ é o número de vértices da maior dentre as árvores que constituem a .

2.2.1 Versão recursiva

Existe uma versão recursiva para a fórmula de S , outra vez derivada diretamente de sua definição. Para qualquer árvore com raiz $T \neq 1$, temos que $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta(T) = u \circ \varepsilon(T) = 0$. Substituindo (2.2) em $\Delta(T)$, iremos obter

$$\begin{aligned}
S(T) + \sum_{c \in C(T)} S(P_c(T))R_c(T) &= 0 \\
\Downarrow \\
S(T) = \sum_{c \in C(T)} -S(P_c(T))R_c(T) &= S_B(T) \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Lema 2.3. *Para toda árvore com raiz T , $S(T) = S_B(T)$.*

Demonstração. A equivalência pode ser mostrada diretamente nos casos onde T tem um ou dois vértices. Suponhamos que ela seja válida para todas as árvores com até n vértices; tome uma árvore T com $n + 1$ dees. Então:

$$\begin{aligned}
S(T) &= \sum_{j=0}^n \eta^j * \eta(T) \\
&= m \circ \sum_{j=0}^n \eta^j \otimes \eta \left(T \otimes 1 + \sum_{c \in C(T)} P_c(T) \otimes R_c(T) \right) \\
&= m \circ \sum_{j=0}^n \eta^j \otimes \eta \left(\sum_{c \in C(T)} P_c(T) \otimes R_c(T) \right) \\
&= \sum_{c \in C(T)} \sum_{j=0}^n -\eta^j(P_c(T))R_c(T)
\end{aligned}$$

Por hipótese de indução, vale $S_B(P_c(T)) = S(P_c(T)) = \sum_{j=0}^n \eta^j(P_c(T))$, para todo corte admissível c . Assim:

$$\begin{aligned}
S(T) &= \sum_{c \in C(T)} \sum_{j=0}^n -\eta^j(P_c(T))R_c(T) \\
&= \sum_{c \in C(T)} -S_B(P_c(T))R_c(T) \\
&= S_B(T)
\end{aligned}$$

□

3. A álgebra de Hopf de Grossman-Larson

A álgebra de Hopf H_R foi construída a partir de uma álgebra polinomial real, onde árvores com raiz fazem o papel das variáveis. Esta, por sua vez, advém do espaço vetorial gerado pelos monômios sobre as árvores, ou as florestas com raiz. Neste momento, falaremos sobre o espaço vetorial cuja base é constituída somente pelas árvores com raiz propriamente ditas.

Seja \mathcal{T} o conjunto de todas as árvores com raiz não vazias, e $\mathcal{T}_n = \{T \in \mathcal{T} : |T| = n+1\}$, com n natural. Na definição, $|T| = |V(T)|$. Ainda,

$$\mathbb{K}\{\mathcal{T}\} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\{\mathcal{T}_n\}$$

irá denotar o espaço vetorial com base \mathcal{T} sobre o corpo \mathbb{K} .

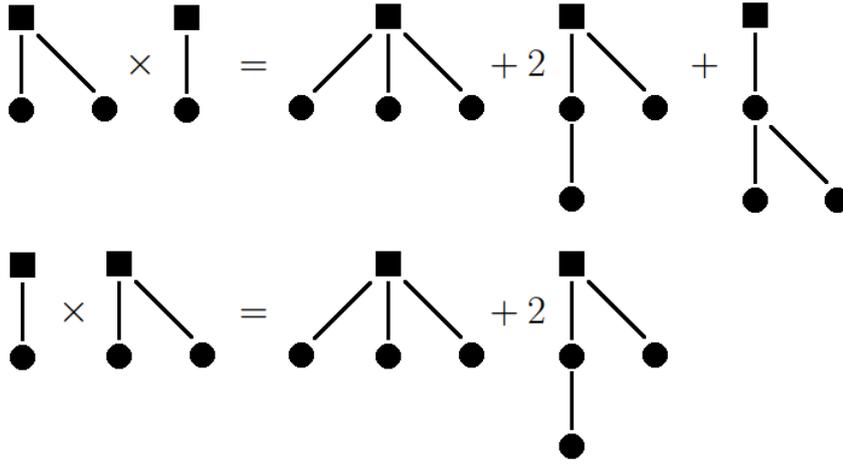
Perceba que a definição desse espaço vetorial o confere uma graduação natural, visto que os subespaços $\mathbb{K}\{\mathcal{T}_n\}$ são claramente disjuntos. No decorrer deste capítulo, veremos como as operações com as quais equiparemos o espaço irão respeitar essa graduação, da maneira citada na definição (2.5).

Em $\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$, consideremos duas árvores T_A e T_B . Ainda, seja $T_A^1 \dots T_A^k = L_-(T_A)$ a floresta resultante da aplicação do inverso do mapa L (ver expressão (2.3)) sobre T_A , isto é, a justaposição das árvores obtidas ao deletarmos a raiz de T_A .

Definição 3.1. O produto $\times: \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \rightarrow \mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$ é determinado pela extensão linear do mapa que relaciona $(T_A \otimes T_B)$ à soma das $|T_B|^k$ possíveis árvores obtidas ao conectarmos cada uma das árvores T_A^1, \dots, T_A^k a vértices de T_B via arestas simples.

Podemos ver que \times representa um produto não-comutativo em $\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$. De fato, quando T_A e T_B estiverem em classes diferentes, teremos uma discrepância no número de termos que compõem $T_A \times T_B$ e $T_B \times T_A$, em geral. O exemplo a seguir dará uma noção mais clara desta propriedade, e também da própria operação.

Exemplo. Para as duas árvores abaixo, com raízes representadas por retângulos, temos:



Lema 3.1. *O produto \times é associativo.*

Demonstração. Precisamos mostrar que, para $T_A, T_B, T_C \in \mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}$ quaisquer, vale:

$$(T_A \times T_B) \times T_C = T_A \times (T_B \times T_C).$$

Para tal, iremos identificar cada termo desses produtos por *funções de conexão*.

Cada termo de $(T_A \times T_B) \times T_C$ pode ser representado por um par de funções de conexão (\mathbf{d}, \mathbf{e}) , sendo que

$$\mathbf{d} : \{T_A^1, \dots, T_A^k\} \rightarrow V(T_B)$$

determina por quais vértices de T_B as árvores em $L_-(T_A)$ são conectadas; enquanto

$$\mathbf{e} : \{T_d^1, \dots, T_d^m\} \rightarrow V(T_C)$$

dita de que maneira a floresta $L_-(T_d)$ adere aos vértices de T_C , onde T_d denota a parcela de $(T_A \times T_B)$ associada à função \mathbf{d} . Estas serão, no que segue, chamadas de *funções de conexão de primeiro tipo*.

Analogamente, um termo de $T_A \times (T_B \times T_C)$ se representa pelas funções de conexão (\mathbf{f}, \mathbf{g}) . Fixando $L_-(T_B) = T_B^1 \dots T_B^l$ e definindo por T_f a parcela de $(T_B \times T_C)$ associada a \mathbf{f} , temos

$$\mathbf{f} : \{T_B^1, \dots, T_B^l\} \rightarrow V(T_C)$$

indexando a conexão das subárvores de T_B aos vértices de T_C ; ademais,

$$\mathbf{g} : \{T_A^1, \dots, T_A^k\} \rightarrow V(T_f)$$

nos diz como a conexão da floresta $L_-(T_A)$ a T_f ocorre. Foram descritas aqui as *funções de conexão de segundo tipo*.

Considere um par (\mathbf{d}, \mathbf{e}) de funções de primeiro tipo. Com base nessas, podemos definir \mathbf{f}' , \mathbf{g}' , funções de segundo tipo, da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}'(T_B^h) = \mathbf{e} \circ \eta(T_B^h), \text{ onde } \eta(T_B^h) = \begin{cases} T_B^h, & \text{se } \mathbf{d}(T_A^i) \notin V(T_B^h), \forall i \in [k]; \\ T_d^j, & \text{com } V(T_B^h) \subset V(T_d^j), \text{ c.c.}; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{g}'(T_A^i) = \begin{cases} \mathbf{d}(T_A^i), & \text{se } \mathbf{d}(T_A^i) \neq \mathbf{root}(T_B); \\ \mathbf{e}(T_A^i), & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Definição 3.2. Denotaremos por R a relação que associa as funções de segundo tipo \mathbf{f}' e \mathbf{g}' às de primeiro tipo \mathbf{d} e \mathbf{e} . Escreveremos, assim, $R(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = (\mathbf{f}', \mathbf{g}')$.

Por outro lado, a partir de funções \mathbf{f} e \mathbf{g} de segundo tipo, são obtidas as funções de primeiro tipo \mathbf{d}' e \mathbf{e}' , dadas por:

$$\mathbf{d}'(T_A^i) = \begin{cases} g(T_A^i), & \text{se } \mathbf{g}(T_A^i) \in v(T_B); \\ \mathbf{root}(T_B), & \text{c.c.}; \end{cases}$$

$$\mathbf{e}'(T_d^j) = \begin{cases} g(T_d^j), & \text{se } T_d^j \mathbb{K}\{\mathcal{J}\} = T_A^i, \text{ para algum } i \in [k]; \\ f(T_B^h), & \text{com } \eta(T_B^h) = T_d^j, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Definição 3.3. Denotaremos por Q a relação que associa as funções de segundo tipo \mathbf{d}' e \mathbf{e}' às de primeiro tipo \mathbf{f} e \mathbf{g} . Escreve-se, deste modo, $Q(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{d}', \mathbf{e}')$.

Os mapas R e Q foram construídos de forma que cada par de funções de conexão de um dado tipo se associasse a um par de tipo oposto que o simulasse em comportamento da melhor maneira possível, isto é, até onde as restrições de domínio e contradomínio de cada função permitisse. Graças a isto, podemos utilizá-los diretamente para demonstrar o proposto, que equivale ao seguinte resultado:

Proposição 4. $R \circ Q = Q \circ R = Id$.

Começaremos mostrando que $Q \circ R(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = (\mathbf{d}, \mathbf{e})$. Fazendo $R(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = (\mathbf{f}', \mathbf{g}')$, então:

$$\mathbf{d}'(T_A^i) = \begin{cases} \text{se } \mathbf{g}'(T_A^i) \in V(T_B) \mathbf{g}'(T_A^i) = \begin{cases} \mathbf{d}(T_A^i), & \text{se } \mathbf{d}(T_A^i) \neq \mathbf{root}(T_B); \\ \mathbf{e}(T_A^i), & \text{c.c.}; \end{cases} \\ \text{se } \mathbf{g}'(T_A^i) \in V(T_C), \mathbf{root}(T_B). \end{cases}$$

Imediatamente, temos $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$ quando $\mathbf{d}(T_A^i) \neq \mathbf{root}(T_B)$. Caso contrário, $\mathbf{g}'(T_A^i) \in V(T_C)$, donde $\mathbf{d}'(T_A^i) = \mathbf{root}(T_B) = \mathbf{d}(T_A^i)$. Além disso,

$$\mathbf{e}'(T_d^j) = \begin{cases} \text{se } T_d^j = T_A^i \text{ para algum } i \in [k], \mathbf{g}'(T_d^j) = \begin{cases} \mathbf{d}(T_A^i), \text{ se } \mathbf{d}(T_A^i) \neq \mathbf{root}(T_B); \\ \mathbf{e}(T_d^j), \text{ c.c.} \end{cases} \\ \text{c.c.}, \mathbf{f}'(T_B^h), \text{ com } \eta(T_B^h) = T_d^j. \end{cases}$$

No primeiro caso, $T_d^j = T_A^i$ para algum $i \in [k]$ implica $\mathbf{d}(T_A^i) = \mathbf{root}(T_B)$, logo $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$. No segundo, vale $\mathbf{e}'(T_d^j) = \mathbf{e}(\eta(T_B^h)) = \mathbf{e}(T_d^j)$, donde temos a igualdade. Assim, $Q \circ R = Id$.

Por outro lado, se $Q(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{d}', \mathbf{e}')$:

$$\mathbf{f}'(T_B^h) = \mathbf{e}'(\eta(T_B^h)) = \begin{cases} \mathbf{e}'(T_B^h), \text{ se } \mathbb{K}\{\mathcal{J}\}\mathbf{d}'(T_A^i) \notin V(T_B^h), \forall i \in [k]; \\ \mathbf{e}'(T_d^j), \text{ com } V(T_B^h) \subset V(T_d^j), \text{ c.c.} \end{cases}$$

Mas:

$$\mathbf{e}'(T_d^j) = \begin{cases} \mathbf{g}(T_d^j), \text{ se } T_d^j = T_A^i, \text{ para algum } i \in [k]; \\ \mathbf{f}(T_B^h), \text{ com } \eta(T_B^h) = T_d^j, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Ao notarmos que η nunca retorna árvores em $\{T_A^i : i \in [k]\}$, verificamos que o primeiro caso acima não pode ocorrer, donde $\mathbf{f}' = \mathbf{f}$. Prosseguindo:

$$\mathbf{g}'(T_A^i) = \begin{cases} \text{se } \mathbf{d}'(T_A^i) \neq \mathbf{root}(T_B), \mathbf{d}'(T_A^i) = \begin{cases} \mathbf{g}(T_A^i), \text{ se } \mathbf{g}(T_A^i) \in V(T_B); \\ \mathbf{root}(T_B), \text{ se } \mathbf{g}(T_A^i) \in V(T_C); \end{cases} \\ \text{se } \mathbf{d}'(T_A^i) = \mathbf{root}(T_B), \mathbf{e}'(T_A^i) = \begin{cases} \mathbf{g}(T_d^j), \text{ se } T_d^j = T_A^i, \text{ para algum } i \in [k]; \\ \mathbf{f}(T_B^h), \text{ com } \eta(T_B^h) = T_d^j, \text{ c.c.} \end{cases} \end{cases}$$

Observa-se que, no segundo caso, teremos necessariamente $T_d^j = T_A^i$, para algum $i \in [k]$. Ademais, pela definição da função de conexão \mathbf{d}' , $\mathbf{g}(T_A^i) \in V(T_C) \Rightarrow \mathbf{d}'(T_A^i) = \mathbf{root}(T_B)$, reduzindo o primeiro caso à possibilidade restante. Assim, $\mathbf{g}' = \mathbf{g}$. □

É simples mostrar a validade do lema a seguir.

Lema 3.2. *A árvore \blacksquare é unidade de $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$ em relação ao produto \times , à esquerda e à direita.*

Com isto, torna-se verificado o fato de que $(\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}, \times, \blacksquare)$ é uma álgebra, esta sendo não-comutativa. A estrutura de cóalgebra em $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$, por sua vez, é posta por meio dos mapas coproduto e counidade, que seguem:

Definição 3.4. Seja $T \in \mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$. Definimos o coproduto neste espaço como sendo o mapa:

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} &\longrightarrow \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \\ T &\longmapsto \sum_{\Lambda \subset [k]} L \left(\prod_{i \in \Lambda} T_i \right) \otimes L \left(\prod_{j \in \Lambda^c} T_j \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Notemos que Δ é coassociativo. De fato, para cada termo que compõe $\Delta(T)$, seu simétrico (isto é, a ação de τ sobre ele) é também um desses termos. Por sua vez, a counidade $\varepsilon : \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \longrightarrow \mathbb{K}$ é o mapa que associa um à árvore \blacksquare e zero a qualquer outro elemento. A comutatividade do diagrama representando a counidade vem de:

$$(\varepsilon \otimes Id) \Delta(T) = \sum_{\Lambda \subset [k]} \varepsilon \left(L \left(\prod_{i \in \Lambda} T_i \right) \otimes \prod_{j \in \Lambda^c} T_j \right) = 1 \otimes T \simeq T$$

e da expressão análoga representando a ação do mapa simétrico.

Mostraremos que $(\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}, \times, \blacksquare, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra provando o seguinte resultado.

Lema 3.3. $\Delta : \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \longrightarrow \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$ é um homomorfismo entre álgebras, isto é, $\Delta(T_A \times T_B) = \times_{\mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{T}\}} (\Delta \otimes \Delta(T_A \otimes T_B))$.

Demonstração. Iremos, a exemplo daquilo que foi feito dentro da demonstração da associatividade de \times , codificar os termos dos resultados das aplicações acima por meio de funções de conexão e de partições de conjuntos de índices. Um termo de $\Delta(T_A \times T_B)$ pode ser descrito pela função de conexão

$$\mathbf{d} : \{T_A^1, \dots, T_A^k\} \rightarrow V(T_B)$$

e pelo subconjunto

$$U \subset [m],$$

onde $L_-(T_A \times T_B) = \prod_{j=1}^m T_d^j$.

Por outro lado, um termo de $\times_{\mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{T}\}} (\Delta \otimes \Delta(T_A \otimes T_B))$ é representado pelos subconjuntos

$$Y \subset [l], W \subset [k],$$

com $L_-(T_A) = \prod_{i=1}^k T_A^i$ e $L_-(T_B) = \prod_{h=1}^l T_B^h$; e também pelas funções de conexão

$$\mathbf{e} : \{T_A^i | i \in W\} \longrightarrow V \left(L \left(\prod_{h \in Y} T_B^h \right) \right)$$

e

$$\mathbf{f} : \{T_A^i | i \in W^C\} \longrightarrow V \left(L \left(\prod_{h \in Y^C} T_B^h \right) \right).$$

Com uma função de conexão \mathbf{d} e uma subconjunto U em mãos, podemos obter subconjuntos Y' , W' e funções de conexão \mathbf{e}' , \mathbf{f}' como segue:

$$Y' = \{h \in [l] : \exists j \in U \text{ com } \eta(T_B^h) = T_d^j\}$$

$$W' = \{i \in [k] : \exists j \in U \text{ com } T_A^i = T_d^j\} \cup \{i \in [k] : \mathbf{d}(T_A^i) \in V(T_d^j), \text{ com } j \in U\}$$

$$\mathbf{e}'(T_A^i) = \begin{cases} \mathbf{root} \left(L \left(\prod_{h \in Y'} T_B^h \right) \right), & \text{se } \mathbf{d}(T_A^i) = \mathbf{root}(T_B); \\ \mathbf{d}(T_A^i), & \text{se } \mathbf{d}(T_A^i) \in \left(L \left(\prod_{h \in Y'} T_B^h \right) \right). \end{cases}$$

$$\mathbf{f}'(T_A^i) = \begin{cases} \mathbf{root} \left(L \left(\prod_{h \in (Y')^C} T_B^h \right) \right), & \text{se } \mathbf{d}(T_A^i) = \mathbf{root}(T_B); \\ \mathbf{d}(T_A^i), & \text{se } \mathbf{d}(T_A^i) \in \left(L \left(\prod_{h \in (Y')^C} T_B^h \right) \right). \end{cases}$$

Definição 3.5. Denotamos por M o mapa que relaciona \mathbf{d} e U aos subconjuntos Y' , W' e às funções de conexão \mathbf{e}' e \mathbf{f}' . Assim, $M(\mathbf{d}, U) = (Y', W', \mathbf{e}', \mathbf{f}')$.

Descreveremos, agora, a relação na direção oposta. Para subconjuntos $Y \in [l]$, $W \in [k]$ e funções de conexão \mathbf{e} e \mathbf{f} , definimos:

$$\mathbf{d}'(T_A^i) = \begin{cases} \mathbf{e}(T_A^i), & \text{se } i \in W; \\ \mathbf{f}(T_A^i), & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$U' = \{j \in [m] : \exists h \in Y : \eta(T_B^h) = T_d^j\} \cup \{j \in [m] : \exists i \in W : T_A^i = T_d^j\}$$

Definição 3.6. F denotará o mapa que associa as partições Y, W de $[l]$ e de $[k]$, respectivamente, e as funções de conexão \mathbf{e} e \mathbf{f} à função \mathbf{d}' e à partição U' de $[m]$, esta dependente de \mathbf{d}' . Temos, desta forma, $F(Y, W, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = (\mathbf{d}', U')$.

Novamente, mostrar que M e F são inversos bilateralmente bastará para concluirmos a prova.

Lema 3.4. $M \circ F = F \circ M = Id$.

Seja $(Y', W', \mathbf{e}', \mathbf{f}') = M(\mathbf{d}, U)$, e $(\mathbf{d}', U') = F(Y', W', \mathbf{e}', \mathbf{f}')$. É imediato ver que $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$. Ainda,

$$\{j \in [m] : \exists h \in Y' : \eta(T_B^h) = T_d^j\} = \{j \in [m] : \exists h \in [l] : \eta(T_B^h) = T_d^j\} \cap U,$$

pela definição de Y' , enquanto

$$\{j \in [m] : \exists i \in W' : T_A^i = T_d^j\} = \{j \in [m] : \exists i \in [k] : T_A^i = T_d^j\} \cap U,$$

pela definição de W' . Assim:

$$\begin{aligned} U' &= (\{j \in [m] : \exists h \in [l] : \eta(T_B^h) = T_d^j\} \cap U) \cup (\{j \in [m] : \exists i \in [k] : T_A^i = T_d^j\} \cap U) \\ &= (\{j \in [m] : \exists h \in [l] : \eta(T_B^h) = T_d^j\} \cup \{j \in [m] : \exists i \in [k] : T_A^i = T_d^j\}) \cap U \\ &= [m] \cap U = U \end{aligned}$$

visto que, se j é tal que T_d^j não está na imagem de η , então necessariamente existe $i \in [k]$ com $T_A^i = T_d^j$.

Supondo agora que $(\mathbf{d}', U') = F(Y, W, \mathbf{e}, \mathbf{f})$, e que $(Y', W', \mathbf{e}', \mathbf{f}') = M(\mathbf{d}', U')$, mostraremos que $Y' = Y$ e $W' = W$.

Se $h \in Y'$, então $\eta(T_B^h) = T_{d'}^j$, para algum $j \in U'$. Como não é possível a existência de $i \in W$ com $T_A^i = T_{d'}^j$, então há $\bar{h} \in Y$ e $\eta(T_B^{\bar{h}}) = T_{d'}^j$. Mas η é injetivo, donde $h' = h \in Y$.

Se $h \in Y$, há duas possibilidades: se $\eta(T_B^h) = T_{d'}^j$ para algum $j \in [m]$, então $j \in U'$; caso $\eta(T_B^h) = T_B^h$, existe $j \in [m]$ com $T_B^h = T_{d'}^j$, donde $j \in U'$. Logo $h \in Y'$, visto que a condição sobre η fica satisfeita nos dois casos. Portanto, $Y' = Y$.

Se $i \in W'$, podemos ter $T_A^i = T_{d'}^j$ para algum $j \in U'$, onde existe $\bar{i} \in W$ com $T_A^{\bar{i}} = T_{d'}^j$. Logo $i = \bar{i} \in W$. Isto ocorre pois, se j estivesse em U' pela outra condição, teríamos $T_A^i = \eta T_B^h$, um absurdo; ou podemos ter $i \in W'$ e $\mathbf{d}'(T_A^i) \in V(T_{d'}^j)$ com $j \in U'$, e vem que j é tal que $\eta(T_B^h) = T_{d'}^j$, para algum $h \in Y$, donde $\mathbf{d}'(T_A^i) = \mathbf{e}(T_A^i)$, implicando $i \in W$, pela definição de \mathbf{d}' . Novamente, se j estivesse incluso em U' pela condição restante, teríamos $T_{d'}^j = T_A^{\bar{i}}$, com $\bar{i} \in W$, o que resulta em contradição.

Tomando $i \in W$, pode ou não existir $j \in [m]$ com $T_A^i = T_{d'}^j$. Se existir, então $j \in U$. Caso contrário, vale $\mathbf{d}'(T_A^i) \in V(T_{d'}^j)$, e pela definição de \mathbf{e} , $j \in U'$ da mesma maneira. Imediatamente, $i \in W'$. Isto nos dá $W' = W$.

Finalmente, é bastante simples ver que, com a igualdade entre os pares de partições, as funções de conexão respeitam $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$ e $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$, provando o lema e, por equivalência, o proposto. \square

Verifiquemos que o produto e coproduto que caracterizam $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$ como biálgebra são consistentes com a sua graduação. Enunciemos:

Proposição 5. As seguintes afirmações são válidas:

- (i) Para quaisquer naturais n, m , a imagem de $\mathbb{K}\{\mathcal{J}_n\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{J}_m\}$ pelo produto \times está contida em $\mathbb{K}\{\mathcal{J}_{n+m}\}$.
- (ii) Se $T \in \mathbb{K}\{\mathcal{J}_n\}$, então $\Delta(T) \in \bigoplus_{m=0}^n \mathbb{K}\{\mathcal{J}_m\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{J}_{n-m}\}$, para todo n natural.

Demonstração. Considere árvores $T_1 \in \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_n\}$ e $T_2 \in \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_m\}$. Essas árvores têm, respectivamente, $n + 1$ e $m + 1$ vértices. Mas cada somando do produto $T_1 \otimes T_2$ é uma árvore obtida pela adição dos vértices de T_1 , com a exceção de sua raiz, à árvore T_2 , e assim, tem $n + (m + 1)$ vértices. Portanto, $T_1 \times T_2 \in \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_{n+m}\}$.

Por outro lado, se $T \in \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_n\}$, cada tensor compondo $\Delta(T)$ tem como componentes duas árvores cujos vértices diferentes da raiz advêm de T , e logo possuem, juntas, $n + 2$ vértices. Porém, o subespaço vetorial de $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}$ gerado por tensores com $n + 2$ vértices totais é justamente $\bigoplus_{m=0}^n \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_m\} \otimes \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_{n-m}\}$. \square

Devemos agora mostrar que existe uma antípoda para esta biálgebra. O argumento será similar àquele utilizado para provar a existência da antípoda para a álgebra de Connes-Kreimer. Sendo $(\text{End}(\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}), *, u \circ \varepsilon)$ a álgebra dos endomorfismos de $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}$, vale:

$$(\text{Id}_{\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}})^{-1} = (u \circ \varepsilon - \zeta)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta^n,$$

com $\zeta = u \circ \varepsilon - \text{Id}_{\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}}$. O expoente faz referência ao produto da álgebra, a convolução.

Proposição 6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\zeta^n|_{\mathfrak{J}_n} \equiv 0$

Demonstração. Segue por indução em n . A base vem de

$$\zeta(\blacksquare) = \blacksquare - u(\varepsilon(\blacksquare)) = \blacksquare - \blacksquare = 0. \quad (3.4)$$

Suponhamos que $\zeta^n|_{\mathfrak{J}_n} \equiv 0$ para algum $n > 0$. Então, se $T \in \mathfrak{J}_{n+1}$, teremos:

$$\begin{aligned} \zeta^{n+1}(T) &= \zeta \circ \zeta^n(T) \\ &= \sum_{\Lambda} \zeta(T_{\Lambda}) \zeta^n(T_{\Lambda^c}) \end{aligned}$$

Para Λ não vazio, por (3.4), o termo correspondente da soma acima é nulo. Resta o termo representado por $\Lambda = \emptyset$, isto é, $\zeta(\blacksquare)\zeta^n(T)$, e este é zero pela hipótese de indução. Logo, $\zeta^{n+1}(T) = 0$. \square

Dessa forma, $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta^n$ está bem definido para toda árvore com raiz finita, e portanto $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}$ é de fato uma álgebra de Hopf.

4. Álgebras de Lie

4.1 Definição e exemplos

Embora sua concepção advenha inicialmente do estudo dos chamados *grupos de Lie*, as álgebras de Lie conectam-se às álgebras de Hopf e aos resultados citados adiante de uma maneira bem mais periférica, motivando-nos a apresentar somente uma breve introdução à teoria dessas estruturas, com foco nos resultados que pavimentam o caminho traçado por Panaite e Hoffman até a demonstração do teorema final aqui abordado.

Definição 4.1. Uma **álgebra de Lie** é um par $(\mathfrak{g}, [,])$, onde espaço vetorial \mathfrak{g} sobre um corpo \mathbb{K} , e $[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ representa o *colchete de Lie*, uma operação binária satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $[,]$ é bilinear;
- (ii) $[x, x] = 0$, para qualquer $x \in \mathfrak{g}$, o que implica:
 - (ii.b) $[,]$ é antissimétrico;
- (iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Esta é chamada a *propriedade de Jacobi*.

Definição 4.2. Um mapa $\psi \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie se for compatível com os colchetes de \mathfrak{g} e de \mathfrak{h} . Isto é:

$$\psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)].$$

Os exemplos abaixo nos dão a dimensão da frequência com que ocorrem as álgebras de Lie dentro do campo da Álgebra.

Exemplo. Um espaço vetorial V qualquer pode ser visto como uma álgebra de Lie, quando munido do colchete trivial:

$$[v_1, v_2] = 0, \forall v_1, v_2 \in V$$

Exemplo. Seja A uma álgebra. Seu **comutador** é definido como o mapa $[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$ dado pela expressão abaixo:

$$[a, b] = m(a \otimes b) - m(b \otimes a) = ab - ba$$

Tomando $a, b, c \in A$ quaisquer, temos que o comutador cumpre a propriedade de Jacobi:

$$\begin{aligned} & [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] \\ &= a(bc - cb) - (bc - cb)a + b(ca - ac) - (ca - ac)b + c(ab - ba) - (ab - ba)c \\ &= abc - acb - bca + cba + bca - bac - cab + acb + cab - cba - abc + bac \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como bilinearidade e antissimetria são claramente propriedades do comutador, o mapa confere a A uma estrutura de álgebra de Lie.

Em particular, quando $V = \text{End}(W)$, onde W é outro espaço vetorial, denotamos $(V, [\cdot, \cdot]) = \mathfrak{gl}(V)$, o **grupo** ou a **álgebra de Lie linear geral**.

Iremos brevemente definir como subálgebras, ideais, e homomorfismos tomam forma quando relacionados a álgebras de Lie.

Definição 4.3. Uma **subálgebra de Lie** é um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ que é fechado com respeito ao colchete. Quando munido da restrição do colchete a si, \mathfrak{h} é uma álgebra de Lie.

Definição 4.4. $I \subset \mathfrak{g}$ é um **ideal de Lie** desde que, para todo $i \in I$ e a na álgebra, tenha-se $[i, a] \in I$. Alternativamente, pode valer $[a, i] \in I$ para a, i quaisquer. As condições são equivalentes pela antisimetria de \mathfrak{g} .

Definição 4.5. Considere $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ álgebras de Lie, e $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ uma transformação linear. Diremos que f é um **homomorfismo** entre álgebras de Lie se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}} & \mathfrak{g} \\ f \times f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}}} & \mathfrak{h} \end{array}$$

4.1.1 Elementos primitivos de uma biálgebra

Iremos definir um subconjunto de uma biálgebra $H, m, u, \Delta, \varepsilon$ que é compatível com seu comutador $[h_1, h_2] = m(h_1 \otimes h_2) - m(h_2 \otimes h_1)$, mas não é uma subálgebra em geral.

Definição 4.6. $h \in H$ é dito um **elemento primitivo** da biálgebra H quando:

$$\Delta(h) = h \otimes 1_H + 1_H \otimes h.$$

O conjunto desses elementos é denotado por $P(H)$.

Nota. Sejam $p, q \in P(H)$. Como Δ é homomorfismo entre suas álgebras domínio e contradomínio, temos:

$$\begin{aligned} \Delta(m(p \otimes q)) &= m_{2\otimes}(\Delta \otimes \Delta(p \otimes q)) \\ &= m_{2\otimes}((p \otimes 1_H + 1_H \otimes p) \otimes (q \otimes 1_H + 1_H \otimes q)) \\ &= m(p \otimes q) \otimes 1_H + p \otimes q + q \otimes p + 1_H \otimes m(p \otimes q) \\ &\neq m(p \otimes q) \otimes 1_H + 1_H \otimes m(p \otimes q). \end{aligned}$$

Assim, $P(H)$ não é subálgebra de H .

Teorema 4.1. $P(H)$ é uma subálgebra de Lie da biálgebra H , isto é, para quaisquer p, q primitivos de H , temos que $[p, q]$ também é primitivo.

Demonstração. Basta calcular a ação de Δ sobre $[p, q]$. A saber:

$$\begin{aligned} \Delta([p, q]) &= \Delta(m(p \otimes q)) - \Delta(m(q \otimes p)) \\ &= (m(p \otimes q) \otimes 1_H + p \otimes q + q \otimes p + 1_H \otimes m(p \otimes q)) \\ &\quad - (m(q \otimes p) \otimes 1_H - q \otimes p - p \otimes q - 1_H \otimes m(q \otimes p)) \\ &= m(p \otimes q) \otimes 1_H + 1_H \otimes m(p \otimes q) - m(q \otimes p) \otimes 1_H - 1_H \otimes m(q \otimes p) \\ &= [p, q] \otimes 1_H + 1_H \otimes [p, q] \in P(H) \end{aligned}$$

□

4.2 Álgebra envolvente universal

Vimos anteriormente que toda álgebra pode ser vista como uma álgebra de Lie ao tomarmos o comutador como o colchete. O conceito da álgebra envolvente universal permite que, de certa maneira, complementemos esta visão. Mais especificamente, ele nos dá um modo de representar qualquer álgebra de Lie como um subespaço de uma álgebra comum, e de estender homomorfismos entre álgebras de Lie (com contradomínio associativo munido de unidade) a homomorfismos entre álgebras.

A álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie é definida por meio do que é chamado de *propriedade universal*. Informalmente, uma propriedade universal consegue

determinar uma estrutura apenas designando o que tal estrutura deve satisfazer, sem construí-la de imediato. Uma introdução completa do conceito requer alguma familiaridade com a teoria de categorias, e portanto foge do escopo desse trabalho.

Definição 4.7. Seja $(\mathfrak{g}, [,])$ uma álgebra de Lie. Considere o par (Ξ, ι) , onde Ξ uma álgebra e $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \Xi$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie. Este par será dito uma **álgebra envolvente universal** de \mathfrak{g} se a seguinte propriedade é verificada: para qualquer álgebra A e qualquer homomorfismo $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow A$ entre álgebras de Lie, existe e é único o homomorfismo entre álgebras $\theta': \Xi \rightarrow A$ que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} \Xi & & \\ \uparrow \iota & \searrow \theta' & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\theta} & A \end{array}$$

Existe um método para construir a envolvente universal de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} qualquer, e o descreveremos neste momento.

Considere a álgebra tensorial $(T(\mathfrak{g}), \otimes)$, definida no primeiro capítulo, com:

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{n\otimes} \\ (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_j) = (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_j)$$

Seja R o ideal da álgebra tensorial gerado pelos termos na forma $[a, b] - (a \otimes b - b \otimes a) : a, b \in \mathfrak{g}$. Este é a interseção de todos os ideais de $T(\mathfrak{g})$ ou, de maneira equivalente, o menor ideal da álgebra. Assim, podemos tomar a álgebra quociente $\Xi = T(\mathfrak{g})/R = \{[a] : a \in T(\mathfrak{g})\}$, onde $[a] = \{b \in T(\mathfrak{g}) : \exists i \in R \text{ com } a = b + i\}$.

Considere o homomorfismo entre álgebras canônico $\iota: V(\mathfrak{g}) \rightarrow V(\mathfrak{g})/R$ dado por $s(a) = [a]$. Mostraremos que ι é compatível com os colchetes dos dois espaços. A saber, se $a, b \in R$:

$$[[a], [b]] = [a \otimes b] - [b \otimes a] = [a \otimes b - b \otimes a] = [a \otimes b - b \otimes a + ([a, b] - a \otimes b + b \otimes a)] = [[a, b]].$$

Assim, ι é homomorfismo entre álgebras de Lie, logo é válido enunciar o resultado a seguir.

Teorema 4.2. *Do modo como foram definidos, (Ξ, ι) constituem uma álgebra envolvente universal da álgebra de Lie \mathfrak{g} .*

Demonstração. Em primeiro lugar, considere uma base $\beta = \{v_j : j \in J\}$ de \mathfrak{g} . Então, o conjunto dos tensores de todas as ordens cujas componentes estão em β formam uma base Γ de $T(\mathfrak{g})$, o que é simples demonstrar.

Seja (A, m_A, u_A) uma álgebra qualquer e $\theta \in \text{LieHom}(\mathfrak{g}, A)$. Podemos estender θ a um homomorfismo $\theta' \in \text{Hom}(T(\mathfrak{g}), \mathfrak{A})$ pela relação:

$$\theta'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = m_A(\theta(v_1) \otimes \cdots \otimes \theta(v_k)) = \theta(v_1) \times \cdots \times \theta(v_k),$$

definida na base Γ . Notemos agora que, para i no gerador de R :

$$\begin{aligned} \theta'(i) &= \theta'([a, b] - a \otimes b + b \otimes a) \\ &= \theta([a, b]) - \theta'(a \otimes b) + \theta'(b \otimes a) \\ &= \theta(ab - ba) - \theta(a) \times \theta(b) + \theta(b) \times \theta(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Com isto em mãos, podemos ver que, para qualquer $v \in \beta$:

$$\begin{aligned} \theta' \circ \iota(v) &= \theta'([v]) \\ &= \theta'(v + i), i \in R \\ &= \theta(v) + \theta'(i) \\ &= \theta(v) \end{aligned}$$

donde $\theta = \theta' \circ \iota$ em uma base de \mathfrak{g} . Por estar definido em uma base de $T(\mathfrak{g})$, θ' é o único homomorfismo entre álgebras com tal característica. A propriedade universal fica assim satisfeita. \square

Pelo teorema (1.7), a álgebra tensorial de \mathfrak{g} tem uma estrutura Hopf-algébrica. Esta é herdada pela álgebra quociente desde que o ideal R associado seja um Hopf-ideal (1.12), por simples composição com o homomorfismo canônico entre um espaço vetorial e um quociente dado por $\pi(v) = [v]$. Vejamos que isto sempre ocorre.

Proposição 7. O ideal R associado à álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie é um Hopf-ideal.

Demonstração. Seja $r \in R$ um elemento do ideal. Sua forma é, portanto:

$$r = \sum_{i \leq N} t_i([a_i, b_i] - a_i \otimes b_i + b_i \otimes a_i),$$

onde $N \in \mathbb{N}$, e para todo índice i , $a_i, b_i \in \mathfrak{g}$, e $t_i \in T(\mathfrak{g})$. Pela fórmula da antípoda de $T(\mathfrak{g})$ 1.14, temos que:

$$S(r) = \sum_{i \leq N} (-1)^{k_i} (-[a_i, b_i] - b_i \otimes a_i + a_i \otimes b_i) t_i^F \in R.$$

□

5. A relação entre H_R e $\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}$

5.1 Propriedades combinatórias do espaço vetorial $\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}$

Vamos começar definindo uma ordem parcial \preceq no conjunto \mathfrak{T} . Para duas árvores $T \in \mathbb{K}\{\mathfrak{T}_n\}$ e $T' \in \mathbb{K}\{\mathfrak{T}_{n+1}\}$, temos que $t \preceq T'$ se, e somente se, T for uma subárvore de T' que preserve sua raiz. Em outras palavras, duas árvores distintas são comparáveis segundo esta ordem quando podemos obter a menor delas removendo sucessivamente folhas da maior. Quando $T \preceq T'$ e T pode ser obtida pela remoção de uma única folha de T' , escreve-se $T \triangleleft T'$. Quando isto ocorre, podemos associar ao par (T, T') as seguintes duas quantidades:

Definição 5.1. Se $T \triangleleft T'$, então $n(T, T')$ é o número de vértices de T aos quais podemos adicionar uma aresta ligando a um novo vértice e obter T' , enquanto $m(T, T')$ é a quantidade de folhas de T' que deixam T como resultado de sua remoção (exclusiva).

Em geral, tais quantidades não equivalem quando avaliadas para um mesmo par de árvores com raiz.

A relação entre $n(T, T')$ e $m(T, T')$ pode ser vista de uma maneira diferente ao considerarmos o grupo de simetria de uma árvore T . A rigor, este é o grupo dos automorfismos de $V(T)$

$$SG(T) = \{\sigma : V(T) \rightarrow V(T) \mid T_\sigma = (V(T), E_\sigma(T)) \approx T\}$$

onde $E(T) = \{v_{i_1}v_{i_2}, 1 \leq i < |T|\}$ representa o conjunto de elos de T , enquanto $E_\sigma(T) = \{\sigma(v_{i_1})\sigma(v_{i_2}), 1 \leq i < |T|\}$. No entanto, iremos reconstruir G como um produto direto de grupos atrelados aos vértices de T .

A respeito do produto direto de grupos, ressalta-se que, se $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ forem geradores para as parciais, cujas operações são respectivamente \circ_1, \circ_2, \dots , então $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots$ é um gerador para o grupo resultante, e $\circ_1 \times \circ_2 \times \dots$ é adotada como sua operação. É imediato ver que o produto satisfaz dessa forma todos os axiomas que definem um grupo.

Para cada $v \in V(T)$, seja T_v a **subárvore própria** de v , isto é, a subárvore de T com raiz v (com ordem induzida por T); $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ o conjunto dos filhos de v ; e $SG(T, v)$ o grupo gerado pelas permutações que, caso $t_{v_i} \approx t_{v_j}$, trocam cada vértice da primeira pelo

correspondente na segunda, mantendo fixos os demais. O grupo de simetria da árvore T será o produto direto dos grupos associados a cada vértice.

$$SG(T) = \prod_{v \in V(T)} SG(T, v)$$

Faremos um desvio para abordar algumas definições e propriedades a respeito de subgrupos e ações de grupos. Se G é um grupo (multiplicativo), $a \in G$, e $H \leq G$, o subconjunto $Ha = \{ha : a \in G\}$ de G é a **coclasse à direita** de a em relação a H . Ainda, $[G : H]$ denotará a cardinalidade do conjunto de coclasses à direita dos elementos de G com respeito a H . Este número é chamado o **índice** do subgrupo. Por último, a ordem de um grupo G é dada por sua cardinalidade $|G|$.

Lema 5.1. *Se $H \leq G$, então $|G| = [G : H]|H|$.*

Demonstração. Seja $a \in G$, e considere o mapa $c_a : H \rightarrow Ha$ que associa a cada elemento do subgrupo o seu produto por a à direita. c_a é claramente sobrejetor; tomando $h_1 \neq h_2 \in H$, temos que:

$$\begin{aligned} h_1a = h_2a &\Rightarrow h_1a(h_2a)^{-1} = 1 \\ &\Rightarrow h_1a(a^{-1}h_2^{-1}) = 1 \\ &\Rightarrow h_1h_2^{-1} = 1 \\ &\Rightarrow h_1 = h_2 \end{aligned}$$

donde o mapa é bijetor. Assim, para todo $a \in G$, $|Ha| = |H|$.

Por outro lado, sejam $a, b \in G$ tais que $Ha \cap Hb \neq \emptyset$. Então existem $x \in G$, $h_1, h_2 \in H$ com $x = h_1a = h_2b$. Então $a = (h_1^{-1}h_2)b$, e $b = (h_2^{-1}h_1)a$, implicando $Ha = Hb$. Dessa maneira, mostramos que as coclasses de G em relação a um subgrupo são disjuntas e iguais em cardinalidade. Como todo elemento do grupo pertence à sua própria coclasse, temos o resultado. \square

Uma **ação de grupos** (à direita) de G sobre um conjunto qualquer X é um mapa que leva elementos de $X \times G$ em elementos de X , de forma que, para todo $g, h \in G$ e $x \in X$, tenhamos $x.1 = x$ e $(x.g).h = x.(gh)$.

Dada uma ação de grupos e um elemento $x \in X$, definem-se dois subconjuntos de interesse: a **órbita** de x sobre G ,

$$X \supset Orb(x) = \{y \in X : y = x.g, \text{ para algum } g \in G\};$$

e seu subgrupo estabilizador,

$$G \geq \text{Fix}(x) = \{g \in G : x.g = x\}.$$

Lema 5.2. *Dada uma ação do grupo G sobre o conjunto X , $|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Fix}(x)]$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Fixado $x \in X$, denotaremos por κ o mapa que associa as coclasses de G com respeito a $\text{Fix}(x)$ aos elementos de $\text{Orb}(x)$ do seguinte modo:

$$G \geq A = [\text{Fix}(x)]g = \{hg : h \in \text{Fix}(x)\} \Rightarrow \kappa(A) = x.g = y \in \text{Orb}(x)$$

Como toda coclasse pode ser escrita na forma acima para algum elemento g do grupo, o mapa é bem definido. Mostraremos que ele é bijetor.

Se $\bar{y} \in \text{Orb}(x)$, então existe $\bar{g} \in G$ com $\bar{y} = x.\bar{g}$. Tomando $\bar{A} = [\text{Fix}(x)]\bar{g}$, teremos $\kappa(\bar{A}) = \bar{y}$, donde κ é sobrejetor.

Por outro lado, sejam $A = [\text{Fix}(x)]a$ e $B = [\text{Fix}(x)]b$ coclasses tais que $\kappa(A) = y = \kappa(B)$. Então $x.a = y = x.b$, implicando $x = (ba^{-1}).x$. Logo, $ba^{-1} \in \text{Fix}(x)$. Mas, ao tomarmos $h = ba^{-1}$, obtemos $ha = b$, e disto segue que $A = B$, visto que ambas são coclasses com respeito ao subgrupo $\text{Fix}(x)$. Portanto κ é injetor. \square

Podemos retomar o assunto principal desta seção. Sejam duas árvores com raiz $T \triangleleft T'$, e seja $v \in V(T)$ um dos vértices aos quais podemos ligar uma nova folha w para obter T' . Considere a ação do grupo $SG(T)$ sobre $V(T)$, e também a de $SG(T')$ sobre $V(T') = V(T) \cup w$. Recuperando a definição que demos para $n(T, T')$ e $m(T, T')$, podemos observar que tais valores são respectivamente as ordens de $\text{Orb}(v, T)$ e de $\text{Orb}(w, T')$. O primeiro representa a órbita de $v \in V(T)$ sobre $SG(T)$, e o outro é identificado analogamente. Este fato, em combinação com os dois últimos lemas apresentados, nos garante a validade das igualdades a seguir:

$$n(T, T') = |\text{Orb}(v, T)| = [SG(T) : \text{Fix}(T, v)] = \frac{|SG(T)|}{|\text{Fix}(T, v)|}$$

$$m(T, T') = |\text{Orb}(w, T')| = [SG(T') : \text{Fix}(T', w)] = \frac{|SG(T')|}{|\text{Fix}(T', w)|}$$

Contudo, notemos que existe uma equivalência entre as ordens dos estabilizadores. Se uma permutação em $SG(T)$ fixa o vértice v , então suas componentes podem ser escritas como o produto de permutações entre subárvores próprias que não contenham v e sejam isomorfas. Os elementos de $SG(T')$ são identificados similarmente. Nos dois casos, chamaremos um par de subárvores satisfazendo tais propriedades de um *par permutável*.

Considere um par permutável em T . Tal par não é modificado pela adição do vértice w à árvore, visto que v não é um de seus vértices (e nenhuma das duas subárvores é a própria de w , obviamente), logo ele também é permutável em T' . Por outro lado, qualquer par permutável de T' exclui w , e portanto exclui também v por ser um de seus ascendentes. Dessa forma, ele é par permutável em T .

Isto conclui a demonstração do seguinte fato, o qual aplicaremos mais adiante:

Proposição 8. Se $T \triangleleft T'$, então $n(T, T')|SG(T')| = m(T, T')|SG(T)|$

Iremos agora definir dois operadores lineares sobre $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}_n\}$: $\mathfrak{R}: \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_n\} \Rightarrow \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_{n+1}\}$, chamado **operador de adesão**; e $\mathfrak{B}: \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_{n+1}\} \Rightarrow \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_n\}$, o **operador de pruno**, dados respectivamente por:

$$\mathfrak{R}(T) = \sum_{T \triangleleft T'} n(T, T')T' \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{B}(T) = \sum_{T' \triangleleft T} m(T', T)T' \quad (5.2)$$

Convenciona-se ainda que $\mathfrak{B}(\blacksquare) = 0$.

Quando definidos sobre uma álgebra não comutativa, o comutador funciona como uma espécie de medida do quão distantes seus elementos estão da comutatividade. Notamos que o espaço dos operadores lineares em $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}$ é uma álgebra com a composição. Nesse contexto, temos o seguinte resultado:

Proposição 9. O comutador entre \mathfrak{B} e \mathfrak{R} é dado por \mathfrak{D} , com $\mathfrak{D}(T) = |T|T$.

Demonstração. Aqui, se v_i é um vértice de uma árvore T , e v_j uma folha da mesma, T_i denotará a árvore obtida adicionando a T um vértice conectado apenas v_i , e T^j aquela dada pela remoção de v_j . Temos:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{R}(T)) = \sum_{i=1}^{|T|} \mathfrak{B}(T_i) = \sum_{i=1}^{|T|} \left(T + \sum_{j \in [|T|] \setminus \{i\}} T_i^j \right) = |T|T + \sum_{i=1}^{|T|} \left(\sum_{j \in [|T|] \setminus \{i\}} T_i^j \right)$$

Por outro lado:

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{B}(T)) = \sum_{j=1}^{|T|} \mathfrak{R}(T^j) = \sum_{j=1}^{|T|} \left(\sum_{i \in [|T|] \setminus \{j\}} T_i^j \right) = \sum_{i=1}^{|T|} \left(\sum_{j \in [|T|] \setminus \{i\}} T_i^j \right)$$

□

Podemos munir $\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$ com o seguinte produto interno:

$$(T, T') = |SG(T)|\delta_{T,T'}, \quad (5.3)$$

em relação ao qual os operadores \mathfrak{R} e \mathfrak{B} são adjuntos, ou seja:

$$(\mathfrak{R}(T), T') = (T, \mathfrak{B}(T'))$$

De fato, quando $T \triangleleft T'$, teremos:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}(T), T') &= \sum_{T \triangleleft U} n(T, U) (U, T') = n(T, T') (T', T') = n(T, T') |SG(T')| \\ (T, \mathfrak{B}(T')) &= \sum_{S \triangleleft T'} m(S, T') (T, S) = m(T, T') (T, T) = m(T, T') |SG(T)| \end{aligned}$$

E o resultado segue pela proposição (8). Caso não se tenha $T \triangleleft T'$, ambos os lados da igualdade serão nulos.

Proposição 10. Para duas árvores com raiz T_1 e T_2 quaisquer, vale que

$$(\mathfrak{R}(T_1), \mathfrak{R}(T_2)) - (\mathfrak{B}(T_1), \mathfrak{B}(T_2)) = |T| |SG(T)| \delta_{T_1, T_2},$$

com $T = T_1 = T_2$.

Demonstração. O resultado provado acima transforma os dois lados da equação das respectivas maneiras:

$$(\mathfrak{R}(T_1), \mathfrak{R}(T_2)) = (T_1, \mathfrak{B}\mathfrak{R}(T_2))$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}(T_1), \mathfrak{B}(T_2)) &= (\mathfrak{B}(T_2), \mathfrak{B}(T_1)) \\ &= (\mathfrak{R}\mathfrak{B}(T_2), T_1) \\ &= (T_1, \mathfrak{R}\mathfrak{B}(T_2)) \end{aligned}$$

Reescrevendo, e aplicando a expressão de $\mathfrak{D}(T)$, pela proposição (9):

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}(T_1), \mathfrak{R}(T_2)) - (\mathfrak{B}(T_1), \mathfrak{B}(T_2)) &= (T_1, \mathfrak{B}\mathfrak{R}(T_2) - \mathfrak{R}\mathfrak{B}(T_2)) \\ &= (T_1, \mathfrak{D}(T_2)) \\ &= |T_2| |SG(T_1)| \delta_{T_1, T_2} \end{aligned}$$

□

Em relação à última proposição, é possível observar que, para toda árvore com raiz T :

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{R}(T), \mathfrak{R}(T)) &= \left(\sum_{T \triangleleft T'} n(T, T')T', \sum_{T \triangleleft T'} n(T, T')T' \right) \\
&= \sum_{T \triangleleft T'} n(T, T')^2 |SG(T')| \\
(\mathfrak{B}(T), \mathfrak{B}(T)) &= \left(\sum_{T'' \triangleleft T} m(T'', T)T'', \sum_{T'' \triangleleft T} m(T'', T)T'' \right) \\
&= \sum_{T'' \triangleleft T} m(T'', T)^2 |SG(T'')|
\end{aligned}$$

implicando o seguinte:

$$\sum_{T \triangleleft T'} n(T, T')^2 |SG(T')| - \sum_{T'' \triangleleft T} m(T'', T)^2 |SG(T'')| = |T| |SG(T)|$$

Mas, pela proposição (8), temos que $n(T, T') |SG(T')| = m(T, T') |SG(T)|$, e também que $n(T'', T) |SG(T)| = m(T'', T) |SG(T'')|$. Substituindo-as na igualdade acima, e dividindo por $|SG(T)| > 0$, obtemos:

$$T \in \mathfrak{J} \implies \sum_{T \triangleleft T'} n(T, T')m(T, T') - \sum_{T'' \triangleleft T} n(T'', T)m(T'', T) = |T| \quad (5.4)$$

Por representarem maneiras de construir e desconstruir árvores passo a passo, as quantidades m e n podem ser naturalmente expandidas a quaisquer árvores comparáveis pela ordem \preceq . Para tal, definiremos generalizações dos mapas \mathfrak{R} e \mathfrak{B} como segue:

$$\mathfrak{R}^k(T) = \sum_{|T'|=|T|+k} n(T, T')T' \quad (5.5)$$

$$\mathfrak{B}^k(T) = \sum_{|T|=|T''|+k} m(T'', T)T'' \quad (5.6)$$

Nota. Percebamos que $\mathfrak{R}^k : \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_n\} \mapsto \mathbb{K}\{\mathfrak{J}_{n+k}\}$ é a composição de k versões do mapa original, cada uma com domínio e contradomínio adequados; o mesmo vale para as generalizações de \mathfrak{B} . Isto garante, em especial, que esses mapas continuem adjuntos em relação ao produto interno definido anteriormente. isto é:

$$k \in \mathbb{N}, |T'| - |T| = k \implies (\mathfrak{R}^k(T, T'), T') = (T, \mathfrak{B}^k(T, T')) \quad (5.7)$$

O resultado da proposição (8) é mantido pela expansão, como mostraremos a seguir.

Ainda, exibiremos como a expansão é consistente quanto à decomposição das construções e desconstruções de árvores, e quanto à avaliação de m ou n sobre árvores não comparáveis por \preceq .

Proposição 11. Sejam $T, T' \in \mathfrak{T}$ com $|T| \leq |T'|$. Então:

(i) $n(T, T')|SG(T')| = |SG(T)|m(T, T')$;

(ii) Se $|T| \leq l \leq |T'|$, então:

$$n(T, T') = \sum_{|U|=l} n(T, U)n(U, T')$$

$$m(T, T') = \sum_{|U|=l} m(T, U)m(U, T')$$

(iii) $n(T, T') = m(T, T') = 0$ se não tivermos $T \preceq T'$.

Demonstração. A primeira afirmação vem da expressão (5.7), pois:

$$n(T, T')|SG(T')| = (T', \mathfrak{R}^k(T)) = (\mathfrak{B}^k(T'), T) |SG(T)|m(T, T'),$$

onde $k = |T'| - |T|$. Quanto à segunda, podemos trabalhar com o fato dos mapas originais (com $k = 1$) serem adjuntos para, a partir de (5.7), obter (com $l = |T| + i$):

$$\begin{aligned} n(T, T') &= \frac{(\mathfrak{R}^k(T), T')}{|SG(T')|} \\ &= \frac{(\mathfrak{R}^i(T), \mathfrak{B}^{k-i}(T'))}{|SG(T')|} \\ &= \sum_{|U|=l} \frac{(\mathfrak{R}^i(T), m(U, T')U)}{|SG(T')|} \\ &= \sum_{|U|=l} \frac{(\mathfrak{R}^i(T), U)}{|SG(T')|} m(U, T') \\ &= \sum_{|U|=l} \frac{(\mathfrak{R}^i(T), U)}{|SG(U)|} \frac{|SG(U)|}{|SG(T')|} m(U, T') \\ &= \sum_{|U|=l} n(T, U) \frac{|SG(U)|}{|SG(T')|} m(U, T') \\ &= \sum_{|U|=l} n(T, U)n(U, T') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(T, T') &= \frac{(\mathfrak{B}^k(T'), T)}{|SG(T)|} \\
&= \frac{(\mathfrak{B}^{k-i}(T'), \mathfrak{R}^i(T))}{|SG(T)|} \\
&= \sum_{|U|=l} \frac{(\mathfrak{B}^{k-i}(T), n(T, U)U)}{|SG(T)|} \\
&= \sum_{|U|=l} \frac{(\mathfrak{B}^{k-i}(T), U)}{|SG(T)|} n(T, U) \\
&= \sum_{|U|=l} \frac{(\mathfrak{B}^{k-i}(T), U)}{|SG(U)|} \frac{|SG(U)|}{|SG(T)|} n(T, U) \\
&= \sum_{|U|=l} m(U, T') \frac{|SG(U)|}{|SG(T)|} n(T, U) \\
&= \sum_{|U|=l} m(U, T') m(T, U)
\end{aligned}$$

Por fim, (iii) vale quando $k = 1$ por definição, e utilizando (ii), é simples generalizar o fato para todo k via indução. \square

Notemos ainda que, como $\blacksquare \preceq T$ para toda árvore T , é válido pensar nos valores $n(\blacksquare, T)$ e $m(\blacksquare, T)$. Pelo raciocínio envolvido na definição de tais quantidades, concluímos que o primeiro representa a quantidade de formas para se construir a árvore T a partir da raiz, enquanto a outra nos diz de quantos modos podemos desconstruí-la.

5.2 O Teorema de Milnor-Moore

Anteriormente, definimos a estrutura de graduação que pode ser verificada para espaços vetoriais, e estendida a álgebras, coálgebras e biálgebras por compatibilidade com os mapas fundamentais. Também vimos que os elementos primitivos $P(H)$ de uma biálgebra H constituem uma subálgebra de Lie desta, sem necessariamente absorver sua estrutura algébrica.

Tais definições são requisitos para que enunciemos o teorema de Milnor-Moore, provado originalmente em [13], que dá, sob algumas condições, um isomorfismo entre uma álgebra de Hopf H e a álgebra envolvente universal Ξ do conjunto dos primitivos de H . Pela discussão presente na seção (4.2), esta álgebra tem uma estrutura Hopf-algébrica, pois o ideal envolvido em sua construção é fechado para a antípoda de H .

Teorema 5.3. *Seja H uma álgebra de Hopf cocomutativa, conexa e com graduação (isto é, $H_0 = u_H(\mathbb{K})$). Então existe um isomorfismo entre H e $\Xi(P(H))$, o envoltório universal dos primitivos de H , que é compatível com a estrutura Hopf-algébrica de $\Xi(P(H))$.*

A demonstração desse teorema chave demanda alguns resultados mais específicos a respeito de coálgebras, os quais fogem do escopo do trabalho, e portanto será omitida.

A álgebra de Hopf $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$ de Grossman-Larson atende a todas as restrições impostas pelo teorema de Milnor-Moore. Além disso, a coálgebra de $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$ torna bem claro o conjunto dos seus elementos primitivos.

Teorema 5.4. *A álgebra de Lie $P(\mathbb{K}\{\mathcal{J}\})$ é gerada como espaço vetorial pelas árvores cuja raiz tem grau de saída exatamente igual a um, isto é, as árvores da forma $B_+(T)$, sendo T uma árvore qualquer.*

Demonstração. O conjunto das árvores com raiz é base de $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$, logo qualquer um de seus subconjuntos tem independência linear por definição. Para ver que as árvores citadas geram o espaço dos primitivos, notemos que se T é uma árvore, então $\Delta(T)$ tem exatos 2^k termos, onde k é o grau de saída de sua raiz. Isto ocorre pelo fato de cada termo representar um elemento λ do conjunto das partes de $\{1, \dots, k\}$, quando $B_-(T) = t_1 \dots t_k$. Pela linearidade de Δ , os primitivos de $\mathbb{K}\{\mathcal{J}\}$ são de fato gerados pelas árvores da forma $B_+(T)$. \square

5.3 O dual graduado de H_R

A álgebra de Hopf de Connes-Kreimer admite graduação de acordo com o número de vértices em uma dada floresta. Portanto, podemos definir seu dual com graduação, denotado por H_R^{gr} , que será também uma biálgebra e, por (1.6), uma álgebra de Hopf.

Definição 5.2. O dual com graduação da álgebra de Hopf de Connes-Kreimer é a álgebra de Hopf $(H_R^{gr}, \mu, U, \delta, E)$ gerada linearmente pelos elementos Z_a , indexados pela base de H_R , dados por $Z_a(b) = \delta_{a,b}$, onde δ é o operador delta de Kronecker. Ela é conexa, e graduada de acordo com o número de vértices dos índices de cada operador, portanto.

Como mostrado em (1.10), podemos escrever o coproduto em H_R^{gr} na forma de uma soma sobre todas as florestas do espaço:

$$\delta(f) = \sum_{a,b \in H_R} f(ab) Z_a \otimes Z_b$$

Calculemos o coproduto na base do espaço. Seja $c \in H_R$ uma floresta qualquer. Então:

$$\delta(Z_c) = \sum_{a,b \in H_R} Z_c(ab) Z_a \otimes Z_b = \sum_{a,b \in H_R: ab=c} Z_a \otimes Z_b$$

Em vista disso, conseguimos visualizar quais os elementos primitivos de H_R^{gr} : o espaço gerado pelos mapas Z_T , onde T é uma árvore.

Proposição 12. $P(H_R^{gr}) = \text{span}\{Z_T : T \in \mathfrak{J}\}$.

Demonstração. Considere $Z_a = Z_{t_1 \dots t_n}$ em H_R^{gr} . Pela expressão do coproduto acima, temos que $\delta(Z_a) - Z_a \otimes 1 - 1 \otimes Z_a = \sum_{i=1}^{n-1} Z_{t_1 \dots t_i} \otimes Z_{t_{i+1}} \otimes t_{n-1}$. Todos esses tensores estão na base canônica de $H_R^{gr} \otimes H_R^{gr}$, logo são linearmente independentes, donde qualquer elemento de H_R^{gr} cuja decomposição relativa à sua base canônica inclui um fator λZ_a , com $\lambda \neq 0$, não é um primitivo. \square

Esse espaço é naturalmente uma álgebra de Lie, quando equipado com o comutador. Connes e Kreimer introduzem uma expressão que exhibe mais claramente sua relação com o coproduto em H_R .

Proposição 13. Sejam $T_1, T_2, T \in \mathfrak{J}$. Seja $m(T_1, T_2; T)$ o número de cortes simples $c \in C(T)$ tais que $R_c(T) = T_2$ e que $P_c(T) = T_1$. Note que isto implica $|c| = 1$. O produto em $P(H_R^{gr})$ é dado de acordo com a seguinte expressão:

$$Z_{T_1} * Z_{T_2} = \sum_T m(T_1, T_2; T) Z_T$$

Nota. Isto generaliza mais uma vez o mapa m , discutido no início do capítulo. É possível fazê-lo também para n , o que será visto mais adiante.

Demonstração. O produto da álgebra dual tem a forma apresentada em (1.6), portanto, se tivermos $T \in \mathfrak{J}$:

$$[\mu(Z_{T_1} \otimes Z_{T_2})](T) = \sum_{c \in C(T)} Z_{T_1}(P_c(T)) Z_{T_2}(R_c(T)).$$

O resultado dessa soma será diferente de zero apenas para árvores T tais que exista ao menos um corte $c \in C(T)$ com $R_c(T) = T_2, P_c(T) = T_1$. Como $m(T_1, T_1; T)$ conta o número de vezes que tal evento ocorre, temos o proposto. \square

A cocomutatividade do mapa δ vem diretamente da comutatividade da álgebra de Connes-Kreimer, que nos diz que $Z_{t_1 \dots t_n} = Z_{t_n \dots t_1}$. Logo, o teorema de Milnor-Moore é aplicável.

Teorema 5.5. A álgebra de Hopf de Connes-Kreimer é dual ao envoltório universal da álgebra de Lie $(P(H_R^{gr}), [,])$.

5.4 Isomorfismo de Hoffman

Em seu artigo, Hoffman se utiliza das técnicas combinatórias discutidas no decorrer da seção (5.1), além de se apoiar sobre as ideias de Panaite para corrigir o resultado final do último, que apontava a dualidade entre as álgebras de Hopf abordadas até aqui.

Citamos como a quantidade m foi generalizada mais uma vez, de forma a contar de quantos modos uma certa árvore pode ser cortada de modo a obtermos um par específico de outras. O procedimento mais lógico para generalizar n é, dessa forma, torná-lo um instrumento que aponte para o número de maneiras que se pode unir duas árvores dadas de forma a gerar uma terceira.

Definição 5.3. Sejam $T_1, T_2, T \in \mathfrak{T}$. Definimos $n(T_1, T_2; T)$ como o número de vértices de T_1 com a seguinte propriedade: conectando T_1 a T_2 ligando a raiz de T_1 a este vértice, obtém-se T .

Nota. Foi dito até aqui que esses mapas são generalizações dos originais, e agora podemos apresentar evidência concreta desse fato. Se $T_2 \triangleleft T_3$, então:

$$n(\blacksquare, T_2; T_3) = n(T_2, T_3) \quad \text{e} \quad m(\blacksquare, T_2; T_3) = m(T_2, T_3)$$

Mostraremos agora como as propriedades enunciadas nas proposições (8) e (11) continuam valendo, após as devidas adaptações.

Proposição 14. Para quaisquer árvores com raiz T_1, T_2, T_3 com $|T_3| = |T_1| + |T_2|$, a igualdade abaixo é válida.

$$|SG(T_1)| |SG(T_2)| m(T_1, T_2; T) = n(T_1, T_2; T) |SG(T)| \quad (5.8)$$

Demonstração. Iremos supor que existe um corte $c = \{(v, w)\} \in C(T)$ de forma que as quantidades não sejam nulas, visto que, em outro caso, os dois lados da equação acima são zero. Temos que a subárvore própria do vértice w , $T_w \approx T_1$, portanto, $m(T_1, T_2; T)$ representa o número de arestas da árvore T que deixam T_1 após seu corte, logo equivale à órbita de (v, w) sobre $SG(T)$, donde:

$$m(T_1, T_2; T) = |Orb((v, w), T)| = |SG(T) : Fix(T, (v, w))|$$

$Fix(T, (v, w))$ é o produto entre o estabilizador da subárvore própria do vértice v e o grupo das permutações de T_w , visto que tais permutações não modificam a árvore T . Logo:

$$m(T_1, T_2; T) = \frac{|SG(T)|}{|Fix(T, T_v)| |SG(T_1)|}$$

Já $n(T_1, T_2; T)$ dá a ordem da órbita do vértice v sobre $R_c(T) \approx T_2$, pois se refere à quantidade de vértices que podem ser a origem da única aresta no corte c . Isto nos dá:

$$n(T_1, T_2; T) = |\text{Orb}(v, R_c(T))| = |\text{SG}(R_c(T) : \text{Fix}(R_c(T), v))| = \frac{|\text{SG}(T_2)|}{|\text{Fix}(R_c(T), v)|}$$

Os grupos $\text{Fix}(T, T_v)$ e $\text{Fix}(R_c(T), v)$ são isomorfos, donde segue a igualdade. \square

Temos todos os resultados necessários para apresentar o isomorfismo entre $\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$ e H_R^{gr} , dado explicitamente por Hoffman.

Teorema 5.6. $\chi : \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \mapsto H_R^{gr}$, mapa dado, para qualquer árvore com raiz T e floresta a , por:

$$[\chi(T)](a) = (B_-(T), a) = (T, B_+(a)), \quad (5.9)$$

é um isomorfismo entre álgebras de Hopf. $(,)$ representa o produto interno em $\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}$.

Demonstração. H_R^{gr} é uma álgebra localmente finita, de acordo com a definição (2.1). Assim, tomando $f \in H_R^{gr}$, existe uma subálgebra de Hopf de H_R^{gr} de dimensão finita contendo f . Seja $\{Z_a : a \in A\}$ uma base para tal subálgebra, onde A é um conjunto finito de florestas com raiz. Reescrevendo f , teremos:

$$\begin{aligned} f &= \sum_A c_a Z_a = \sum_A c_a \delta_{a,*} \\ &= \sum_A \frac{c_a |\text{SG}(B_+(a))|}{|\text{SG}(B_+(a))|} \delta_{a,*} \\ &= \sum_A \frac{c_a}{|\text{SG}(B_+(a))|} \chi((B_+(a))) \\ &= \chi \left(\sum_A \frac{c_a}{|\text{SG}(B_+(a))|} B_+(a) \right) \end{aligned}$$

Logo, χ é sobrejetivo. Dessa forma, basta provar que χ é um homomorfismo entre álgebras de Hopf, o que equivale a mostrar a comutatividade dos quatro diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} & \xrightarrow{\chi \otimes \chi} & H_R^{gr} \otimes H_R^{gr} & \mathbb{R} \\ \downarrow m_{\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}} & & \downarrow \mu_{H_R}^{gr} & \downarrow u_{\mathbb{K}\{\mathcal{T}\}} \\ \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} & \xrightarrow{\chi} & H_R^{gr} & \mathbb{K}\{\mathcal{T}\} \end{array} \begin{array}{c} \searrow U_{H_R}^{gr} \\ \xrightarrow{\chi} \\ \searrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\} \otimes \mathbb{K}\{\mathfrak{T}\} & \xrightarrow{\chi \otimes \chi} & H_R^{gr} \otimes H_R^{gr} \\
\uparrow \Delta_{\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}} & & \uparrow \delta_{H_R}^{gr} \\
\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\} & \xrightarrow{\chi} & H_R^{gr}
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & & \\
\uparrow \varepsilon_{\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}} & \swarrow E_{H_R}^{gr} & \\
\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\} & \xrightarrow{\chi} & H_R^{gr}
\end{array}$$

Com base no conteúdo da seção (1.1.1), definiremos por extenso os mapas fundamentais de H_R^{gr} . Sejam a, b elementos quaisquer da base de H_R , isto é, florestas com raiz, $f, g \in \text{Hom}(H_R, \mathbb{R})$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, temos:

$$\Delta_R(a) = \sum a_1 \otimes a_2 \Rightarrow [\mu_R^{gr}(f \otimes g)](a) = \sum f(a_1)g(a_2) \quad (5.10)$$

$$[U_R^{gr}(\lambda)](a) = \lambda \varepsilon_R(a) \quad (5.11)$$

$$[\delta_R^{gr}(f)](a \otimes b) = \sum_{\text{base de } H_R} f(a_i a_j) Z_{a_i}(a) \otimes Z_{a_j}(b) \quad (5.12)$$

$$E_R^{gr}(f) = f(u_R(1)) = f(1_{H_R}) \quad (5.13)$$

No restante da demonstração, $(,)$ denotará o produto interno em $\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}$, como definido pela equação (5.3) no início do capítulo. Com isto em mãos, mostraremos a comutatividade do primeiro diagrama, o que equivale a provar que a igualdade abaixo vale, para quaisquer árvores com raiz T_1, T_2 :

$$\chi \circ m_{\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}}(T_1 \otimes T_2) = \mu_R^{gr} \circ (\chi \otimes \chi)(T_1 \otimes T_2) \quad (5.14)$$

Como $\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}$ é álgebra gerada pelas árvores primitivas, podemos considerar que T_1 é primitiva, e escrever $T_1 = B_-(T)$ para alguma árvore T . Denote por $T_2(T, v)$ a árvore obtida conectando T ao vértice $v \in V(T_2)$ por meio de uma única aresta. Com isto, para toda floresta u , vale:

$$\begin{aligned}
[\chi \circ m_{\mathbb{K}\{\mathfrak{T}\}}(T_1 \otimes T_2)](u) &= \left[\chi \left(\sum_{v \in V(T_2)} T_2(T, v) \right) \right](u) \\
&= \sum_{v \in V(T_2)} (T_2(T, v), B_+(u)) \\
&= n(T, T_2; B_+(u)) |SG(B_+(u))|,
\end{aligned}$$

visto que os termos diferentes de zero da última soma são justamente aqueles indexados por vértices v de T_2 aos quais podemos conectar a árvore T , de forma a obter $B_+(u)$. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
[\mu_R^{gr} \circ (\chi \otimes \chi)(T_1 \otimes T_2)](u) &= [\mu_R^{gr}(\chi(T_1) \otimes \chi(T_2))](u) \\
&= \sum [\chi(T_1)](u_1) [\chi(T_2)](u_2) \\
&= \sum (B_-(T_1), u_1) (B_-(T_2), u_2) \\
&= \sum (T, u_1) (B_-(T_2), u_2) \\
&= \sum (T, u_1) (T_2, B_+(u_2))
\end{aligned}$$

onde $\sum u_1 \otimes u_2 = \Delta_R(u) = \Delta(t_1 \dots t_k) = \prod_{i=1}^k (t_i \otimes 1 + \sum_{c \in C(t_i)} P_c(t_i) \otimes R_c(t_i))$. Os termos diferentes de zero da última soma são os tensores cuja primeira coordenada é a árvore T , e a segunda é a floresta $B_-(T_2)$. Eles ocorrem de duas maneiras:

- (i) quando existe $i \in [k]$ com $T = t_i$, e $B_-(T_2)$ é exatamente a floresta formada pelas demais árvores em u ;
- (ii) quando há um corte unitário $c \in C(t_i)$ para o qual $P_c(t_i) = T$ e $B_-(T_2)$ é a justaposição de $R_c(t_i)$ e das demais árvores em u .

Os cortes descritos em (ii) podem ser interpretados como cortes unitários da árvore $B_+(u)$ que deixam $B_+(B_-(T_2)) = T_2$ como tronco e T como galho. Notemos que esses cortes são sempre dados por arestas que não têm como origem a raiz de $B_+(u)$. De fato, cada aresta diretamente conectada à raiz com a propriedade acima é identificada com uma ocorrência tal como a descrita em (i). Assim, existem $m(T, T_2; B_+(u))$ termos diferentes de zero na soma dada anteriormente, donde

$$[\mu_R^{gr} \circ (\chi \otimes \chi)(T_1 \otimes T_2)](u) = m(T, T_2; B_+(u)) |SG(T)| |SG(T_2)|.$$

Pela proposição (14), temos a igualdade, donde comuta o diagrama superior à esquerda.

O mapa ε_R é a unidade do dual de H_R , por (5.11). Notemos que este corresponde ao elemento primitivo de H_R^{gr} associado à árvore vazia 1_R , que denotamos por Z_1 . Ademais:

$$\chi(u_{\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}}(1)) = \chi(\blacksquare) = |SG(B_-(\blacksquare))| Z_{SG(B_-(\blacksquare))} = Z_1,$$

provando a comutatividade do segundo diagrama.

O terceiro diagrama é comutativo se, e só se os mapas abaixo forem idênticos.

$$(\chi \otimes \chi) \circ \Delta_{\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}} = \delta_R^{gr} \circ \chi \tag{5.15}$$

Tomemos, mais uma vez, $T_1 = B_+(T)$. Como esta é primitiva, vale:

$$(\chi \otimes \chi) \circ \Delta_{\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}}(T_1) = (\chi \otimes \chi)(T_1 \otimes \blacksquare + \blacksquare \otimes T_1) = Z_T \otimes Z_1 + Z_1 \otimes Z_T.$$

Por outro lado, o coproduto de $Z_T = \delta_R^{gr}(T_1)$ é dado pela expressão (5.12), com $f = Z_T$. Neste caso, o coeficiente $Z_T(a_i a_j)$ de um termo da soma é diferente de zero (e, de fato, igual a um), se e só se $a_i a_j = T$, onde ambas são florestas quaisquer. Isto ocorre somente quando valer $a_i = T$ ou $a_j = T$, sendo a restante a floresta vazia. Portanto:

$$\chi(Z_T) = Z_T \otimes Z_1 + Z_1 \otimes Z_T.$$

Finalmente, $E_R^{gr}(\chi(T_1)) = Z_T(1)$, o que retorna zero para toda árvore primitiva diferente de \blacksquare , comportamento idêntico ao do coproduto de $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}$. Assim, o último diagrama comuta.

Devemos, agora, mostrar a injetividade de χ : se $W = \sum_j \lambda_j T_j$ está no kernel do homomorfismo, então $[\chi(W)](a) = 0 = \sum_j \lambda_j (T_j, B_+(a))$, para toda floresta a . Em particular, tome um índice qualquer j . Então, quando $a = a_j = B_-(T_j)$, teremos $\lambda_j (T_j, T_j) = 0$, o que implica $\lambda_j = 0$. Portanto, para qualquer índice j , $a_j = 0$, donde $W = 0$. \square

Panaite [14] comete um erro ao afirmar que o mapa que relaciona um elemento primitivo $B_+(T)$ de $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}$ a Z_T induz um isomorfismo entre as álgebras de Hopf $\mathbb{K}\{\mathfrak{J}\}$ e H_R^{gr} . O autor deixa de notar que o número de maneiras através das quais duas árvores se conectam para formar uma terceira é, em geral, inferior ao número de cortes que se pode aplicar à árvore maior a fim de obter as duas menores. Por sua vez, isto acarreta na incompatibilidade do mapa ao qual Panaite se refere com os produtos das álgebras de Hopf (isto é, o primeiro diagrama característico de um homomorfismo entre álgebras não comuta).



Como exemplo, sejam T_1 , T_2 e T as árvores com raiz representadas acima. Claramente, existe um único vértice de T_1 ao qual podemos conectar T_2 e obter T , ao passo que há três cortes distintos de T que produzem as outras duas árvores. Ou seja, temos:

$$n(T_2, T_1, T) = 1 < 3 = m(T_2, T_1, T).$$

Referências Bibliográficas

- [1] Y. A. Bathurin, A. A. Baranov, and A. E. Zalesski. Simple Lie algebras of locally finite associative algebras. *Journal of Algebra*, 281, Issue I:225–246, 2004.
- [2] A. Connes and D. Kreimer. Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry. *Communications in Mathematical Physics*, 199:203–242, 1998.
- [3] A. Connes and H. Moscovici. Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 198:199–246, 1998.
- [4] S. Dascalescu, C. Nastasescu, and S. Raianu. *Hopf algebras - An introduction*. Marcel Dekker, New York, first edition, 2001.
- [5] H. Figueroa and J. M. Gracia-Bondía. On the antipode on Kreimer’s Hopf algebra. *Modern Physics Letters A*, 16:1427–1434, 2001.
- [6] P. A. Grillet. *Abstract algebra*. Springer, New York, second edition, 2007.
- [7] R. Grossman and R. L. Larson. Hopf-algebraic structure of families of trees. *Journal of Algebra*, 126:184–210, 1989.
- [8] M. Hoffman. Combinatorics of rooted trees and Hopf algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355:3795–3411, 2003.
- [9] P. Imani. Introduction to Lie algebras. http://www.math.uni-hamburg.de/home/wockel/teaching/data/cohomology_of_lie_algebras_imani.pdf. Último acesso em 23/01/2016.
- [10] N. Jacobson. *Lie algebras*. Dover, New York, first edition, 1979. Republicação do trabalho original (ed. Interscience, 1962).
- [11] C. Kassel. *Quantum groups*. Springer-Verlag, New York, first edition, 1995.
- [12] D. Kreimer. On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2:303–334, 1997.
- [13] J. M. Milnor and J. C. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Annals of Mathematics, Second Series*, 81:211–264, 1965.

- [14] F. Panaite. Relating the Connes-Kreimer and Grossman-Larson Hopf algebras built on rooted trees. *Letters on Mathematical Physics*, 51:211–219, 2000.
- [15] G. Pollachini. Álgebras de Hopf associadas a grafos tipo árvore. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2015.
- [16] M. E. Sweedler. *Hopf algebras*. W. A. Benjamin, New York, first edition, 1969.