

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

James Santos

UMA ABORDAGEM DE ESTRATÉGIA ÓTIMA PARA
RESSEGURO POR TEORIA DE PROGRAMAÇÃO CÔNICA
DE SEGUNDA ORDEM

São Paulo - SP

2015

JAMES SANTOS

UMA ABORDAGEM DE ESTRATÉGIA ÓTIMA PARA RESSEGURO POR TEORIA DE
PROGRAMAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM

Dissertação apresentada ao Curso de Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. GABRIEL HAESER

São Paulo - SP

2015

JAMES SANTOS

UMA ABORDAGEM DE ESTRATÉGIA ÓTIMA PARA RESSEGURO POR TEORIA DE
PROGRAMAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM

Dissertação apresentada
ao Curso de Graduação
em Matemática Aplicada e Computacional da
Universidade de São Paulo, como
requisito parcial para obtenção do Grau
de Bacharel em Matemática Aplicada e
Computacional. Áreas de Concentração:
Matemática Aplicada, Pesquisa Operacional.

Aprovada em Julho de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. GABRIEL HAESER - Orientador
IME - USP

Prof. Dr. Ernesto G. Birgin
IME - USP

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
UFMT

São Paulo - SP
2015

À Amélia Ribeiro e Cecília Ogata, pelo contínuo apoio.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à orientação do Professor Dr. Gabriel Haeser, representando claras direções para o seguimento do trabalho e ajustes necessários.

Também coloco em evidência a figura dos professores doutores Marcelo Queiroz e Carlos Humes Jr, pela forte base teórica fornecida anteriormente em relação a tópicos de Otimização e Pesquisa Operacional de forma geral.

E pontuo a importância de minha família e parceiros de mercado relativos a vários outros aspectos envolvidos na concepção deste material.

Lista de Figuras

1.1	Evolução de prêmios retidos no mercado segurador brasileiro (em Milhões de reais)	1
1.2	Evolução de prêmios de repasse em resseguro no mercado segurador brasileiro (em Milhões de reais)	2
1.3	Evolução do volume de Receitas Anuais de Seguros e importância no PIB brasileiro (em Milhões de reais)	2
4.1	Organograma de tipos de contratos de resseguro	29
4.2	Sinistros mensais de seguradora nacional no ramo <i>Compreensivo Empresarial</i> (em reais) .	31
4.3	Ilustração de cenário de cessão individual de riscos	31
4.4	Histograma de Perdas relativo à amostra $Norm_1$	33
4.5	Histograma de Perdas relativo à amostra $Norm_2$	34
4.6	PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$	37
4.7	PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$	37
4.8	PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$	37
4.9	PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$	38
4.10	PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$	38
4.11	PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$	38
4.12	PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$	39
4.13	PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$	39
4.14	PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$	39
4.15	PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$	40
4.16	PDPP: Amostras $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$	42
4.17	PDPP: Amostras $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$	42
4.18	PDPP: Amostras $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$	42
4.19	PDPP: Amostras $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$	43
4.20	PDPP: Amostras $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$	43
4.21	PDPP: Amostras $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$	43
4.22	PDPP: Amostras $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$	44
4.23	PDPP: Amostras $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$	44
4.24	PDPP: Amostras $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$	45
4.25	PDPP: Amostras $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$	45

Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica sobre Otimização	4
2.1 Programação Linear	4
2.2 Programação Semidefinida	7
2.3 Programação Cônica	9
2.3.1 Programação Cônica de Segunda Ordem (SOCP)	12
3 Algoritmos e Softwares	19
3.1 <i>Métodos Primal-Dual de Caminho a Seguir</i>	19
3.2 CVX	24
4 Modelo de Otimização para Estratégia de Resseguro	27
4.1 Aspectos gerais sobre operações de resseguros	27
4.2 Modelagem de operação de resseguro via SOCP	30
4.2.1 Modelo de Minimização de Variância das Perdas Retidas (Var-Min)	35
5 Conclusões	46
A Conceitos básicos de Álgebra Linear	47
Referências Bibliográficas	51

Resumo

Resseguro representa uma estratégia alternativa importante no mercado de seguros, especialmente, em carteiras de grandes riscos. Por outro lado, existem impactos financeiros relacionados a essa operação, uma vez que as seguradoras devem repassar parte de seus prêmios para as resseguradoras, chamados de prêmios de resseguro. Esse trabalho desenvolve algumas ideias presentes em [24], apresentando e solucionando um modelo hipotético sobre modelagem ótima de resseguro, utilizando amostras normais representativas de perdas incorridas. Esse conjunto de modelos tem embasamento teórico em Programação Cônica de Segunda Ordem e pode ser eficientemente resolvido em Matlab usando o pacote CVX. Além de análises numéricas, são desenvolvidos também tópicos de álgebra linear, otimização convexa, métodos de pontos-interiores e resseguro como revisão teórica.

Palavras-chave: Seguros Gerais, Resseguro, Otimização Convexa, SOCP, CVX e Matlab.

Abstract

Reinsurance represents an important strategic alternative in insurance market, especially, in large risks portfolios. On other hand, there are financial impacts related to this operation, once insurers also have to transfer some part of their premium to reinsurers, named reinsurance premium. This work develops some ideas from [24], presenting and solving a hypothetical model about optimal reinsurance modelling with normal samples representing incurred losses. Those kinds of models have theoretical inspiration in Second Order Conic Programming and can be efficiently solved in Matlab environment using CVX package. Beyond numerical analysis, topics in linear algebra, convex optimization, interior-point methods and reinsurance are developed as theoretical review.

Keywords General Insurance, Reinsurance, Convex Optimization, SOCP, CVX e Matlab.

Capítulo 1

Introdução

O mercado de seguros tem ganhado crescente importância na economia brasileira durante os últimos anos. De acordo com informações divulgadas pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP) [24], órgão regulador do mercado em nível nacional, os prêmios diretos relativos a riscos assumidos pelas seguradoras demonstram o cenário refletido na figura 1.1.

Essa expansão nas operações também é verificada em relação à prática de Resseguro no Brasil, isto é, na transferência de riscos por parte das seguradoras para entidades denominadas Resseguradoras, o que gera de forma consecutiva a transferência de prêmios entre as partes. Conforme informações da SUSEP, os prêmios cedidos em resseguro apresentam o perfil exposto na figura 1.2.

Outra medida de exposição ilustrativa do crescimento da importância do setor de seguros na economia brasileira é a evolução da representatividade das receitas anuais oriundas das operações de seguros em função do PIB brasileiro. Conforme demonstrado na figura 1.3, esta relação se mostrou crescente de forma relevante nos últimos anos.

Dessa forma, ganha importância a discussão de práticas adequadas de resseguro, como previamente na literatura observadas por [10, 11, 12, 17, 18]. O trade-off inerente entre cessão de risco e impacto em resultado financeiro devido à cessão de prêmios pode ser traduzido a um problema genérico de otimização por uma abordagem numérica, conforme desenvolvido em [24]. A ideia básica dessa abor-

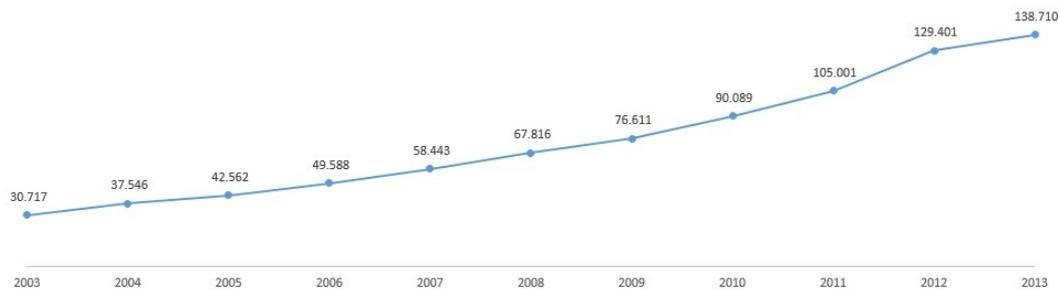


Figura 1.1: Evolução de prêmios retidos no mercado segurador brasileiro (em Milhões de reais)

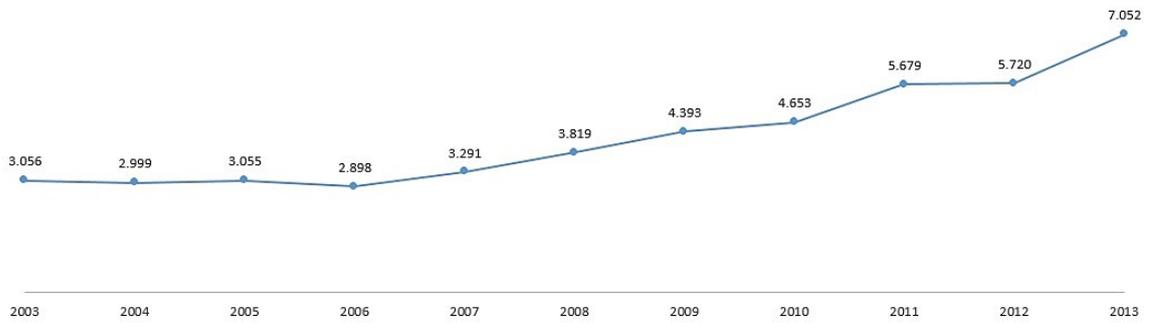


Figura 1.2: Evolução de prêmios de repasse em resseguro no mercado segurador brasileiro (em Milhões de reais)

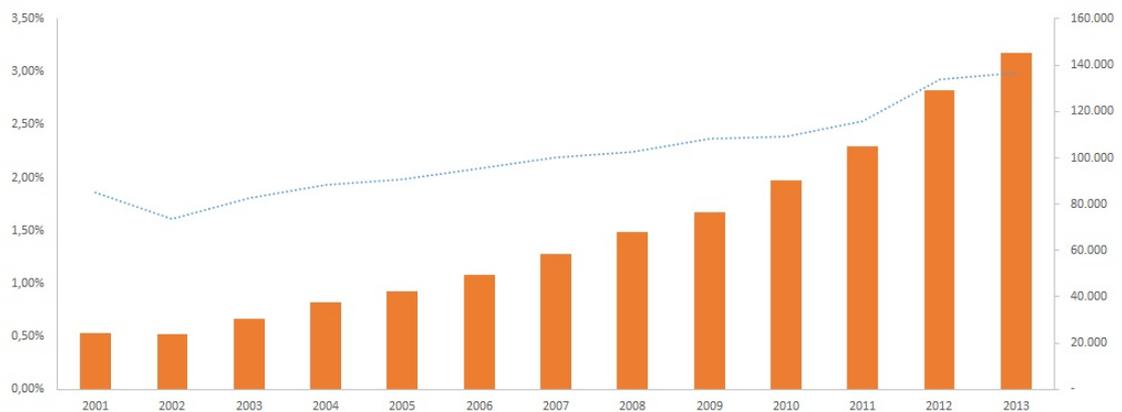


Figura 1.3: Evolução do volume de Receitas Anuais de Seguros e importância no PIB brasileiro (em Milhões de reais)

dagem busca modelar o problema em função dos seguintes aspectos:

- 1 - Estruturação de uma medida quantitativa de risco para mensuração do impacto financeiro da cessão de prêmios;**
- 2 - Utilização de histórico de obrigações observadas às seguradoras oriundas de riscos em contratos de seguro;**
- 3 - Estruturação de princípios de prêmios para estabelecimento de limites sobre a cessão dos riscos pela seguradora (em relação a questões orçamentárias ou regulamentares do mercado, por exemplo).**

A partir desses aspectos, é formulado um modelo de minimização do impacto financeiro da operação de resseguro em função de restrições sobre a cessão de prêmios. Em [24], verifica-se que uma parcela representativa dos negócios desenvolvidos no mercado pode ser modelada através de Problemas de Programação Cônica de Segunda Ordem, cuja vertente computacional possibilita resoluções numéricas eficientes.

Nesta monografia, por um lado, são avaliados os aspectos teóricos vinculados à problemática apresentada acima, ou seja, tópicos relativos a aspectos gerais de álgebra linear, teoria de otimização linear, semidefinida e cônica. Sequencialmente, são desenvolvidas diretrizes sobre construção de algoritmos de pontos interiores e softwares/solvers disponíveis para implementação. E, em terceiro plano, soluciona-se um problema teórico de estratégia ótima de resseguro para um conjunto de dados gerados aleatoriamente por duas distribuições normais, refletindo uma carteira de seguros estável e outra com maior nível de perturbação em volatilidade. Neste plano, explicita-se características básicas dos tipos de contrato de resseguro operados no mercado, bem como a relação que os resultados numéricos sugerem em função dos mesmos. Em conclusão, são avaliadas algumas possibilidades de desenvolvimento do tema dentro da perspectiva de seguros e das práticas atuariais pertinentes.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica sobre Otimização

Neste capítulo, serão apresentados conceitos relativos a Programação Linear, Programação Semidefinida, bem como será formalizada a abordagem generalizada destes tópicos sob o escopo de Programação Cônica. Especialmente, haverá um enfoque para a modelagem de Problemas de Programação Cônica de Segunda Ordem (SOCP).

2.1 Programação Linear

Esta seção cobre uma revisão sobre o estudo de Programação Linear, cujas propriedades podem ser referidas, dentro de outras perspectivas, nos entendimentos sobre Programação Semidefinida e Cônica elaborados nas seções seguintes.

Programação Linear trata-se do problema de minimização de uma função linear, denominada função objetivo, sujeita a restrições lineares. Um problema de Programação Linear (LP) em sua forma padrão é usualmente descrito da seguinte forma:

(LP-P):

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & \text{s.a } Ax = b, x \geq 0 \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

É possível verificar que a estrutura de viabilidade do modelo acima é caracterizada pela interseção entre um subespaço afim e o ortante positivo. Como a intersecção de conjuntos preserva a propriedade de convexidade, os conjuntos viáveis de Problemas de Programação Linear são sempre convexos. Em

adição, como *Poliedro* pode ser definido como um conjunto determinado por restrições de desigualdade e igualdade lineares, os Problemas de Programação Linear têm sempre um poliedro como conjunto viável.

Uma importante propriedade do estudo de Programação Linear é que cada **(LP-P)** pode ser associado a um problema dual de Programação Linear, denotado como **(LP-D)**, cujo molde padrão é o seguinte:

(LP-D):

$$\begin{aligned} & \mathbf{max} \quad b^T y \\ & \mathbf{s.a} \quad A^T y \leq c \end{aligned}$$

Nota-se que a forma padrão do problema dual também se refere à otimização de uma função linear sobre um espaço viável caracterizado como um poliedro.

Nota: embora tenha-se apresentado as formas padrões dos problemas Primal e Dual de Programação Linear, é possível demonstrar que qualquer problema linear cujas restrições não estejam compostas na forma padrão pode ser transformado em tal, por meio de inclusão de variáveis de folga. Assim, as conclusões abordadas neste texto não sofrem perda de generalidade.

Na sequência, cita-se um importante teorema relativo à geometria de poliedros:

Teorema 3.1: (*Minkowski-Weyl*) Todo poliedro P é gerado de forma finita, isto é, pode ser escrito como:

$$P = \text{conv}(u_1, u_2, \dots, u_r) + \text{cone}(v_1, v_2, \dots, v_s)$$

onde u_i e v_j são, respectivamente, os vértices e raios extremos de P . Os cascos convexo e cônico referenciados são definidos da seguinte forma:

$$\text{conv}(u_1, u_2, \dots, u_r) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i : \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r \right\}$$

$$\text{cone}(v_1, v_2, \dots, v_s) = \left\{ \sum_{j=1}^s \lambda_j v_j : \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, s \right\}$$

A menos que o problema seja ilimitado, a solução ótima pode sempre ser encontrada dentre o conjunto de vértices do Poliedro que define o conjunto viável, ou seja, pode ser caracterizada por restrições de igualdade e desigualdade ativas. Esse fato garante que se a estrutura de modelagem do problema é dada por matrizes compostas por números racionais, então sempre existem vértices racionais que alcançam custo ótimo.

A seguir, são apresentados alguns importantes resultados do estudo de Programação Linear e suas correspondentes demonstrações.

Proposição 3.1: (*Dualidade fraca*) Seja $(x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m)$ um par primal-dual de soluções viáveis em seus respectivos problemas. Então, vale que:

$$c^T x \geq b^T y$$

ou seja, os custos obtidos dentro do conjunto viável do problema dual são limites inferiores para os custos relativos às soluções viáveis primais. Também vale a conclusão de que os custos viáveis primais representam limites superiores para os viáveis duais.

Prova: de acordo com a modelagem dos problemas (LP-P) e (LP-D), vale que:

$$c^T x - b^T y = c^T x - (Ax)^T y = c^T x - x^T A^T y \geq c^T x - x^T c = 0$$

Antes de enunciar o próximo resultado, é demonstrado abaixo o lema de Farkas:

Teorema 3.2: (*Lema de Farkas*) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$. O sistema $Ax \leq b$ é viável se e somente se para todo $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda^T A = 0$, vale que $\lambda^T b \geq 0$.

Por um lado, se x^* é uma solução do sistema, então vale que $Ax^* \leq b$. Desta forma, se $\lambda \geq 0$ e λ é tal que $\lambda^T A = 0$, é verificável que $0 = \lambda^T Ax \leq \lambda^T b$.

Por outro lado, $Ax \leq b$ é viável se e somente se

$$\begin{aligned} Ax^+ - Ax^- + z &= b \\ x^+, x^-, z &\geq 0 \end{aligned}$$

tem solução. Se o primeiro sistema de soluções não tem solução, então o segundo também é inviável. Pode-se demonstrar que existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \geq 0$, tal que $\lambda^T [A | -A | I_m] \geq 0$ e $\lambda^T b < 0$. Para este λ , vale que $\lambda^T A = 0$, provando a segunda implicação do teorema.

Proposição 3.2: (*Dualidade forte*) Se o problema primal tem uma solução ótima, então o problema dual também admite e os custos ótimos de ambos são os mesmos.

Intuição da Prova: Seja γ o custo ótimo do problema dual. Para qualquer $\epsilon > 0$, o sistema

$$\begin{aligned} A^T y &\leq c \\ -b^T y &\leq -\gamma - \epsilon \end{aligned}$$

não tem solução. Pelo Lema de Farkas, existe $\lambda \geq 0$ com $\lambda^T (-b^T, A^T) = 0$ e $\lambda^T (-\gamma - \epsilon, c) < 0$. Escreve-se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, com $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_2 \in \mathbb{R}^n$

Se, por hipótese, $\lambda_1 = 0$, então, sabendo-se que $A^T y \leq c$ é viável, a aplicação do Lema de Farkas em λ_2 levaria a uma contradição, o que demonstra que $\lambda_1 > 0$. Supondo, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 = 1$, duas equações são obtidas:

$$\text{I. } \lambda_2^T A^T = b^T$$

$$\text{II. } \lambda_2^T c < \gamma + \epsilon$$

A primeira equação implica que λ_2 é uma solução viável para o problema primal (considerando que já foi determinado que $\lambda_2 \geq 0$). A segunda equação implica que o custo da solução λ_2 no problema primal é menor que $\gamma + \epsilon$. Assim, dada a arbitrariedade na escolha de ϵ , e visto que o problema primal admite solução ótima por hipótese, pode-se demonstrar que o custo ótimo do problema primal também é γ .

Proposição 3.3: (*Folgas complementares*) Se (x^*, y^*) é um par primal-dual de soluções ótimas, então vale que:

$$x_i^*(c - A^T y^*)_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Prova: os resultados de Dualidade Forte implicam que:

$$0 = c^T x^* - b^T y^* = c^T x^* - (Ax^*)^T y^* = c^T x^* - (x^*)^T A^T y^* = (x^*)^T (c - A^T y)$$

A propriedade de folgas complementares indica que existe uma relação inerente entre as componentes da solução ótima primal e as restrições de desigualdade equivalentes do problema dual. Assim, não é possível que mutualmente uma componente da solução ótima primal seja diferente de 0 e a restrição dual equivalente não satisfaça igualdade, ou vice-versa.

Resultados mais profundos sobre Programação Linear, relativos à teoria e construção de algoritmos, podem ser encontrados em [3].

2.2 Programação Semidefinida

Problemas de Programação Semidefinida são, a grosso modo, uma espécie de generalização do escopo de Problemas de Programação Linear. A função objetivo é linear, onde se busca minimizá-la sobre a escolha de matrizes simétricas positivas semidefinidas como variáveis e sobre desigualdades lineares matriciais para definição de viabilidade. Antes de explicitar formalmente a modelagem geral de Problemas de Programação Semidefinida, são apresentadas notações e resultados iniciais para embasamento dos temas a serem desenvolvidos subsequentemente.

Definição 3.1: Uma desigualdade matricial linear (LMI) tem a forma:

$$A_0 + \sum_{i=1}^m A_i x_i \succeq 0$$

onde $A_i \in \mathcal{S}^n$ são matrizes simétricas dadas.

Definição 3.2: Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ é dito um espectraedro se pode ser definido através da forma geral:

$$S = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : A_0 + \sum_{i=1}^m A_i x_i \succeq 0\}$$

onde $A_i \in \mathcal{S}^n$ são matrizes simétricas dadas.

Geometricamente, este conjunto é obtido pela intersecção entre o cone semidefinido positivo (intersecção de semiespaços do conjunto de matrizes semidefinidas positivas) e o espaço gerado pelas matrizes A_1, A_2, \dots, A_m , transladado de A_0 , que caracteriza um subespaço afim. Dessa maneira, espectraedros são conjuntos convexos fechados.

Definição 3.3: Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ é dito um espectraedro projetado se pode ser definido através da forma geral:

$$S = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \exists (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p, A_0 + \sum_{i=1}^m A_i x_i + \sum_{j=1}^p B_j y_j \succeq 0\}$$

Conforme a relação estabelecida acima, um espectraedro projetado corresponde a um espaço em \mathbb{R}^{m+p} projetado em \mathbb{R}^m através de um mapeamento linear.

Abaixo, apresenta-se a formulação padrão de um Problema de Programação Semidefinida Primal (SDP-P). Para $i = 1, 2, \dots, m$:

(SDP-P):

$$\begin{aligned} & \mathbf{min} \langle C, X \rangle \\ & \mathbf{s.a} \langle A_i, X \rangle = b_i, X \succeq 0 \end{aligned}$$

onde $A_i, C, X \in \mathcal{S}^n$ e $\langle X, Y \rangle := Tr(X^T Y) = \sum_{kw} X_{kw} Y_{kw}$, onde $k, w = 1, 2, \dots, n$.

De acordo com a descrição prévia a respeito da formulação de Problemas de Programação Semidefinida, observa-se que a variável deste novo escopo se trata de uma matriz semidefinida positiva. Além disso, outro resultado importante é a caracterização do conjunto viável de um (SDP-P) qualquer como um espectraedro, uma vez que a **definição 3.2**, em escopo de espaço de matrizes, pode ser colocada sob a ótica de que espectraedros correspondem à intersecção de subespaços afins e o cone de matrizes semidefinidas positivas, equivalentemente ao conjunto viável presente na formulação padrão do Problema Primal de Programação Semidefinida.

Assim como no contexto de Programação Linear, pode-se associar um Problema Dual de Programação Semidefinida (SDP-D) a um (SDP-P), relação a qual preserva algumas propriedades relacionais vistas anteriormente. A definição padrão de (SDP-D) é a seguinte:

(SDP-D):

$$\begin{aligned} & \mathbf{max} b^T y \\ & \mathbf{s.a} \sum_{i=1}^m A_i y_i \preceq C \end{aligned}$$

Neste caso, a **definição 3.2** caracteriza de forma direta a colocação de que o conjunto viável da formulação padrão do Problema Dual de Programação Semidefinida é um espectraedro.

De forma semelhante ao caso de Programação Linear, é possível demonstrar que a propriedade de *Dualidade Fraca* também é válida no cenário de Programação Semidefinida, bem como *Folgas Complementares* podem ser refletidas nesse novo contexto. A seguir, são enunciadas essas propriedades formalmente:

Proposição 3.4: Seja $(X \in \mathcal{S}^n, y \in \mathbb{R}^m)$ um par de soluções primal-dual viáveis em seus respectivos problemas. Então, vale sempre que:

$$\langle C, X \rangle \geq b^T y$$

A prova é semelhante à do caso de Programação Linear, sendo resultante direta do mesmo raciocínio explicitado anteriormente, com consideração extra de propriedades de produto interno entre matrizes.

Proposição 3.5: Seja $(X \in \mathcal{S}^n, y \in \mathbb{R}^m)$ um par de soluções primal-dual viáveis em seus respectivos problemas. Se essas soluções satisfazem a condição de folgas complementares:

$$(C - \sum_{i=1}^m A_i y_i) X = 0$$

então são soluções ótimas em seus respectivos problemas, atingindo o mesmo custo ótimo.

É importante mencionar que a propriedade de *Dualidade Forte* não é válida, no caso geral, para o Problema de Programação Semidefinida, isto é, pode haver *gap* de dualidade. É possível demonstrar, entretanto, que a propriedade vale para os casos em que os pares de problemas primal-dual sejam estritamente viáveis, isto é, se os problemas forem tais que exista $X \succ 0$ que satisfaça as restrições lineares do problema primal e y tal que $C - \sum_i A_i y_i \succ 0$ no contexto do problema dual. Abaixo, é enunciado o resultado teórico correspondente a essa afirmativa.

Proposição 3.6: Tendo por hipótese que os problemas primal (SDP-P) e dual (SDP-D) sejam estritamente viáveis, então ambos admitem soluções ótimas com custos ótimos equivalentes, ou seja, não há *gap* de dualidade.

Resultados mais profundos sobre propriedades de Programação Semidefinida podem ser encontrados em [23].

2.3 Programação Cônica

O escopo de Programação Cônica pode ser colocado como um caso geral de Programação Linear e Programação Semidefinida, além de englobar outros contextos relativos a otimização. Nesta seção, serão abordados alguns conceitos básicos de Programação Cônica para espaços de dimensão finita, com um delineamento subsequente voltado ao caso particular de Programação Cônica de Segunda Ordem (SOCP), objeto principal para a modelagem abordada neste trabalho. Por simplificação, considerar-se-á que as análises discorridas nesta seção são referentes a elementos de \mathbb{R}^n .

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo, isto é, um conjunto não vazio tal que $K + K \subset K$ e $tK \subset K, \forall t \in [0, \infty)$. São colocadas as seguintes definições:

Definição 3.4: K é dito pontudo se $K \cap (-K) = \{0\}$.

Definição 3.5: K é dito sólido se $\dim(K) = n$.

Definição 3.6: K é dito um cone próprio se ele é convexo, fechado, pontudo e sólido.

Definição 3.7: Define-se o cone dual de K da seguinte forma:

$$K^* := \{z : z^T x \geq 0, \forall x \in K\}$$

Definição 3.8: K é dito um cone dual-próprio se é tal que $K = K^*$.

Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ e o cone próprio K , é definido o par de problemas primal-dual padrão de Programação Cônica:

Problema Padrão de Programação Cônica Primal:

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & \text{s.a } Ax = b, x \in K \end{aligned}$$

Problema Padrão de Programação Cônica Dual:

$$\begin{aligned} & \max y^T b \\ & \text{s.a } c - A^T y \in K^* \end{aligned}$$

No que tange a abordagem deste texto, tratar-se-á de cones duais-próprios para os problemas de otimização. São exemplos gerais de cones duais-próprios: ortante não negativo, cone de segunda ordem e cone semidefinido positivo.

Conforme já mencionado neste texto, Programação Linear e Programação Semidefinida são casos particulares de Programação Cônica. Na prática, respectivamente, eles se referem aos casos onde o cone próprio K considerado é o ortante não negativo \mathbb{R}_+^n e o cone positivo semidefinido S_+^n .

No que se refere ao Problema Padrão de Programação Linear, é diretamente verificável tratar-se de um caso particular do Problema Padrão de Programação Cônica. Em relação ao Problema Padrão de Programação Semidefinida, considera-se novamente a função objetivo do problema primal:

$$\langle C, X \rangle := Tr(C^T X) = \sum_{kw} C_{kw} X_{kw}, \forall k, w = 1, 2, \dots, n, C, X \in S^n$$

Para $X \in S^n$:

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n,1} & X_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

considere o vetor correspondente $vec(X) \in \mathbb{R}^{nn}$:

$$vec(X) = \begin{pmatrix} X_{1,1} \\ X_{2,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n,1} \\ X_{1,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n,n} \end{pmatrix}$$

Dessa forma,

$$\langle C, X \rangle = vec(C)^T vec(X).$$

Como C e X são matrizes simétricas, é válido ainda que:

$$\langle C, X \rangle = \widetilde{vec(C)}^T \widetilde{vec(X)}.$$

onde

$$\widetilde{vec(X)} = \begin{pmatrix} X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ X_{2,2} \\ X_{1,3} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Diante deste cenário, considerando que a viabilidade é definida em relação ao cone semidefinido positivo, fica evidenciado que um problema padrão de Programação Semidefinida é um caso particular de Programação Cônica.

A demonstração da propriedade de *Dualidade Fraca* para o caso geral de Programação Cônica, considerada a definição de cone dual, é obtida conforme raciocínio do caso específico de Programação Linear. Da mesma forma como enunciado para o caso de Programação Semidefinida, em geral, não há garantia de que valha *Dualidade Forte* em Programação Cônica, entretando, pode-se demonstrar o resultado apresentado na próxima proposição.

Proposição 3.6: Se um par primal-dual de problemas de Programação Cônica são estritamente viáveis, ou seja, existe $x \in \mathbf{int}(K)$ tal que $Ax = b$ e existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $c - A^T y \in \mathbf{int}(K^*)$, então ambos os problemas admitem solução ótima com custos ótimos equivalentes, isto é, não existe *gap* de dualidade.

Proposição 3.7: (*Condições de Otimalidade de KKT*) Seja (p^*, d^*) um par de soluções ótimas correspondente ao par primal-dual padrão de Problemas de Programação Cônica. Se ambos problemas são estritamente viáveis, então o *gap de dualidade* é zero, isto é, $p^* = d^*$. Além disso, sob as mesmas hipóteses, um par primal-dual (x, y) de soluções viáveis é ótimo se e somente se valerem as seguintes condições de KKT:

1. **Viabilidade Primal:** $x \in K, Ax = b$;
2. **Viabilidade Dual:** $c - A^T y \in K^*$; e
3. **Folgas Complementares:** $(c - A^T y)^T x = 0$.

Resultados mais profundos sobre o tema podem ser encontrados em [23,25].

2.3.1 Programação Cônica de Segunda Ordem (SOCP)

Um caso particular da formulação de Programação Cônica é o chamado problema de Programação Cônica de Segunda Ordem (SOCP), onde o cone próprio K considerado é o *Cone de Lorentz* (ou *Cone de Segunda Ordem*), definido da seguinte forma:

$$\epsilon = \{x = (x_0; \bar{x}) : \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, x_0 \in \mathbb{R}, (\bar{x}^T \bar{x})^{1/2} \leq x_0\}$$

Neste texto, serão utilizadas as seguintes correspondências de notação por simplificação:

$$x \in \epsilon \equiv x \succeq_{\epsilon} 0$$

$$x \in \mathbf{int}(\epsilon) \equiv x \succ_{\epsilon} 0$$

Dessa maneira, $x_i \succeq_{\epsilon} 0$ ($x_i \succ_{\epsilon} 0$) é a notação utilizada neste texto para desigualdades cônicas de segunda ordem (estritas) em relação a ϵ .

A seguir, apresenta-se as formas padrões dos SOCPs Primal e Dual:

Problema Primal de Programação Cônica de Segunda Ordem Padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1^T x_1 + \dots + c_r^T x_r \\ \text{s.a} \quad & A_1 x_1 + \dots + A_r x_r = b, x_i \succeq_{\epsilon} 0 \\ & i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Problema Dual de Programação Cônica de Segunda Ordem Padrão:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{min} \quad b^T y \\
& \mathbf{s.a} \quad A_i^T y + z_i = c_i, \quad z_i \succeq_{\epsilon} 0 \\
& \quad \quad \quad i = 1, \dots, r
\end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
x &= (x_1; x_2; \dots; x_r), \text{ tal que } x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \\
z &= (z_1; z_2; \dots; z_r), \text{ tal que } z_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \\
c &= (c_1; c_2; \dots; c_r), \text{ tal que } c_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \\
A &= (A_1; A_2; \dots; A_r), \text{ tal que } A_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i},
\end{aligned}$$

Apresentados os problemas dessa forma, toma-se r como o número de blocos, $n = \sum_{i=1}^r n_i$ como a dimensão do problema e m como o número de linhas em cada matriz A_i .

Pode-se demonstrar que problemas de Programação Linear, Programação Quadrática Estritamente Convexa e Programação Quadrática Convexa com restrições quadráticas são casos particulares de SOCP, ou seja, admitem representações por meio de desigualdades cônicas de segunda ordem.

Em relação a problemas de Programação Linear, a representação padrão do problema primal é dada como:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{min} \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \\
& \mathbf{s.a} \quad \sum_{i=1}^n x_i a_i = b, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

onde $c_i, x_i \in \mathbb{R}$ e $a_i \in \mathbb{R}^m, \forall i = 1, \dots, n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

As restrições que limitam a viabilidade ao ortante não negativo $x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, são restrições cônicas de segunda ordem em espaço de dimensão um. Dessa forma, problemas de Programação Linear correspondem a um caso especial de SOCPs. Além disso, o cone de segunda ordem em \mathbb{R}^2 , $K = \{(x_0; x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \geq |x_1|\}$, é uma rotação do quadrante não negativo e, portanto, qualquer SOCP no qual todos os cones de segunda ordem sejam de dimensão um ou dois pode ser transformado em um problema de Programação Linear.

No que tange a Problemas de Programação Quadrática Estritamente Convexa, as regiões de viabilidade podem ser descritas por poliedros e as soluções podem ser obtidas via SOCPs. Considera-se o problema geral de Programação Quadrática Estritamente Convexa:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{min} \quad q(x) := x^T Q x + a^T x + \beta \\
& \mathbf{s.a} \quad Ax = b, \quad x \geq 0
\end{aligned}$$

onde Q é uma matriz simétrica positiva definida, isto é, vale que $Q \succ 0$ e $Q = Q^T$. Nota-se que a função objetivo pode ser escrita como $q(x) = \|\bar{u}\|^2 + \beta - \frac{1}{4}a^T Q^{-1}a$, onde $\bar{u} = Q^{1/2}x + \frac{1}{2}Q^{-1/2}a$. Portanto, o problema de Programação Quadrática Estritamente Convexa proposto acima pode ser modelado como um SOCP da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \mathbf{min} \quad u_0 \\ \mathbf{s.a} \quad & Q^{1/2}x - \bar{u} = \frac{1}{2}Q^{-1/2}a, Ax = b, x \geq 0, (u_0; \bar{u}) \succeq_{\epsilon} 0 \end{aligned}$$

De maneira mais genérica, problemas de Programação Quadrática Convexa com restrições quadráticas podem ser solucionados via SOCPs. Para tal, primeiramente considera-se uma representação para esta classe de problemas:

$$\begin{aligned} & \mathbf{min} \quad c^T x \\ \mathbf{s.a} \quad & q_i(x) := x^T B_i^T B_i x + a_i^T x + \beta_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

onde $B_i \in \mathbb{R}^{k_i \times n}$ com posto $k_i, i = 1, \dots, m$. Por outro lado, observa-se que a restrição quadrática

$$q(x) := x^T B^T B x + a^T x + \beta \leq 0$$

é equivalente à restrição cônica de segunda ordem $(u_0; \bar{u}) \succeq_{\epsilon} 0$, onde:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \begin{pmatrix} Bx \\ \frac{a^T x + \beta + 1}{2} \end{pmatrix} \\ u_0 &= \frac{1 - a^T x - \beta}{2} \end{aligned}$$

o que garante a representatividade desta classe de problemas como Problemas de Programação Cônica de Segunda Ordem.

Além disso, é verificável também que SOCP é um caso particular de Programação Semidefinida. Para verificar tal relação, considera-se a definição da matriz *arrow-shaped* $Arw(x)$:

$$Arw(x) := \begin{pmatrix} x_0 & \bar{x}^T \\ \bar{x} & x_0 I \end{pmatrix}$$

onde I é a matriz identidade de dimensão $n - 1$.

É verificável que $x \succeq_{\epsilon} 0$ ($x \succ_{\epsilon} 0$) se e somente se $Arw(x)$ é semidefinida positiva (definida positiva), uma vez que $Arw(x) \succeq 0$ se e somente se $x = 0$ ou se vale que $x_0 > 0$ e $x_0 - \bar{x}^T (x_0 I)^{-1} \bar{x} \geq 0$.

Assim, SOCPs são casos particulares de Problemas de Programação Semidefinida. Entretanto, a atenção especial dada a esta classe de problemas se baseia, principalmente, nas particulares que a modelagem proporciona em relação à obtenção de soluções computacionais eficientes. Estes tópicos são avaliados em [25].

É importante também descrever alguns tópicos relativos a propriedades algébricas dentro do escopo deste texto. A álgebra que contempla o entedimento de SOCPs, no que tange a questões referentes a dualidade, propriedades de complementariedade das soluções, condições de não degenerescência ou mesmo análise e construção de algoritmos de pontos interiores, é um caso particular da *Álgebra de Jordan Euclidiana*, cujo escopo generaliza propriedades algébricas de matrizes simétricas.

É possível verificar que a análise detalhada a respeito da Álgebra de Jordan de Cones Simétricos Semidefinidos Positivos trata-se de um caso especial da *Álgebra de Jordan Euclidiana*. Outro caso particular é aquele associado à álgebra de cones de segunda ordem. Observa-se, dessa forma, a correspondência entre a análise de SOCPs e Programação Semidefinida.

Conforme apresentado em [26], o estudo de cones simétricos é associado ao estudo de certa álgebra não associativa sobre a Álgebra de Jordan Euclidiana, que pode ser relacionada à generalização do conceito de espaço de matrizes consistindo de todas as matrizes $n \times n$ reais simétricas. Como o produto de matrizes simétricas não preserva necessariamente esta propriedade, este espaço não é fechado sobre o produto matricial. Entretanto, é definido na sequência o *Produto de Jordan*, o qual se mostra relevante no estudo das propriedades algébricas de Problemas de Programação Cônica de Segunda Ordem.

Considera-se a seguinte forma de vetores para fins das definições a serem apresentadas: $x = (x_0; \bar{x}) \in \mathbb{R}^n$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, define-se o produto de Jordan da seguinte forma:

$$x * y = \begin{pmatrix} x^T y \\ x_0 \bar{y}_1 + y_0 \bar{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_0 \bar{y}_{n-1} + y_0 \bar{x}_{n-1} \end{pmatrix} = \text{Arw}(x)y = \text{Arw}(x)\text{Arw}(y)e$$

onde $e = (1; 0) \in \mathbb{R}^n$, com $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

O espaço de matrizes reais simétricas de ordem n tem a caracterização de álgebra real comutativa, mas (para $n > 1$) não associativa. Por outro lado, em relação a este operador, é válida a chamada propriedade de *Identidade de Jordan*:

$$x^2 * (y * x) = (x^2 * y) * x$$

Dessa maneira, este operador tem importância relevante no que se refere à concepção de Álgebra de Jordan Euclidiana, que pode ser avaliada com maior ênfase em [26]. Embora o escopo deste texto não tenha como objetivo tratar de forma detalhada sobre a teoria de análise desta álgebra, mas demonstrar seus aspectos de interesse ao estudo apresentado em relação a SOCPs, é válida a motivação de que a propriedade de *Folgas Complementares* em SOCPs corresponde exatamente à condição:

$$x_i * z_i = 0$$

Além disso, abaixo são mencionadas algumas relações sob o escopo da álgebra $(\mathbb{R}^n, *)$:

1. Dadas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e vetores $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, vale a propriedade distributiva, isto é:

$$x * (\alpha y + \beta z) = \alpha x * y + \beta x * z$$

e

$$(\alpha y + \beta z) * x = \alpha y * x + \beta z * x$$

2. Dados vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale que:

$$x * y = y * x$$

3. O vetor $e = (1; 0) \in \mathbb{R}^n$ representa o único elemento de identidade, ou seja, para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $x * e = x$ somente nas condições especificadas para e .

4. Dado o vetor $x \in \mathbb{R}^n$, define-se $x^2 = x * x$. Como as matrizes $Arw(x)$ e $Arw(x^2)$ comutam, para qualquer vetor $y \in \mathbb{R}^n$, vale que:

$$x * (x^2 * y) = x^2 * (x * y)$$

5. $*$ não é associativa para $n > 2$. Por outro lado, dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, o produto de k cópias deste vetor $x : x * x * x \dots * x$ não é influenciado pela ordem na qual os vetores são dispostos, ou seja, o operador $*$ é *Associativo na Potenciação*. Dessa forma, vale sempre que $x^p * x^q = x^{p+q}$.

Também, especialmente no que se refere à construção de algoritmos de pontos interiores para resolução numérica de SOCPs, é importante definir a transformação linear referenciada como *Representação Quadrática*:

$$Q_x := 2Arw^2(x) - Arw(x^2)$$

Proposição 3.6: Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e t inteiro, vale que:

1. $Q_{\alpha y} = \alpha^2 Q_y$;

2. $Q_x x^{-1} = x$, o que implica $Q_x^{-1} x = x^{-1}$;

3. $Q_y e = y^2$; e

4. $Q_{x^{-1}} = Q_x^{-1}$ e, de forma mais geral, $Q_{x^t} = Q_x^t$.

Ainda em relação a $x \in \mathbb{R}^n$, define-se o seu polinômio característico por:

$$p(\lambda, x) = \lambda^2 - 2x_0\lambda + (x_0^2 - x^T x)$$

As raízes deste polinômios, denotadas neste texto por λ_1 e λ_2 , são definidas como autovalores de x .

As provas das propriedades acima mencionadas, bem como propriedades espectrais dessa álgebra, podem ser encontradas em [25, 26], conteúdo cujo escopo deste trabalho, conforme avaliado, não tem por objetivo explicitar aprofundamento técnico.

As seguintes proposições são importantes no que se refere à teoria de SOCPs:

Proposição 3.7: (*Dualidade Fraca*) Se x e (y, z) são, respectivamente, soluções primal e dual viáveis em seus problemas correspondentes, então vale que:

$$c^T x - b^T y \geq 0$$

Proposição 3.8: (*Dualidade Forte*) Se um par de SOCPs primal-dual tem soluções estritamente viáveis (ou seja, tais que $x_i \succ_\epsilon 0$ e $z_i \succ_\epsilon 0, \forall i$) então ambos admitem soluções ótimas, representadas respectivamente por x^* e (y^*, z^*) cujos custos ótimos são equivalente, isto é, tais que $c^T x^* = b^T y^*$. Em outras palavras, não existe *gap* de dualidade nestas circunstâncias.

Proposição 3.9: (*Dualidade Semi-Forte*) Se um problema Primal de Programação Cônica de Segunda Ordem admite uma solução estritamente viável \hat{x} e a função objetivo $c^T x$ é inferiormente limitada sobre a região viável deste problema, então o dual correspondente admite solução ótima com mesmo custo da solução ótima do problema primal.

Proposição 3.10: (*Condições de Complementariedade*) Sejam $x, z \in \epsilon$. Então, $x^T z = 0$ se e somente se $x_i * z_i = Arw(x_i)Arw(z_i)e = 0, \forall i = 1, 2, \dots, r$, ou equivalentemente:

$$i. \quad x_i^T z_i = x_{i0}z_{i0} + \bar{x}_i^T \bar{z}_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

$$ii. \quad x_{i0}\bar{z}_i + z_{i0}\bar{x}_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

Prova: Se $x_{i0} = 0$ ($z_{i0} = 0$), o resultado segue de forma direta, uma vez que isso implicaria em $x_i = 0$ ($z_i = 0$). Por outro lado, se não valem essas condições, então as hipóteses de que as desigualdades cônicas de segunda ordem são satisfeitas e a desigualdade de Cauchy-Schwars garantem que:

$$\bar{x}_i^T \bar{z}_i \geq -(\bar{x}_i^T \bar{x}_i)^{1/2}(\bar{z}_i^T \bar{z}_i)^{1/2} \geq -x_{i0}z_{i0}$$

Portanto, $x_i^T z_i = x_{i0}z_{i0} + \bar{x}_i^T \bar{z}_i \geq x_{i0}z_{i0} - x_{i0}z_{i0} = 0$ e vale que $x^T z = \sum_{i=1}^k x_i^T z_i = 0$ se e somente se $x_i^T z_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$, o que é válido se e somente se a desigualdade elucidada a partir da hipótese inicial e pela desigualdade de Schwars for satisfeita estritamente na igualdade. Existem duas possibilidades que satisfazem este cenário:

(a): $x_i = 0$ ou $z_i = 0$ e os resultados *i.* e *ii.* seguem de forma direta; ou

(b): $x_i \neq 0$ e $z_i \neq 0$, $\bar{x}_i = -\alpha_i \bar{z}_i$, onde $\alpha > 0$ e $x_{i0} = \alpha z_{i0}$, isto é, $\bar{x}_i + (x_{i0}/z_{i0})\bar{z}_i = 0$.

O resultado segue dessa forma.

Proposição 3.11: (*Condições de Otimalidade*) Se um par Padrão Primal-Dual de SOCPs admite soluções estritamente viáveis $(\hat{x}, (\hat{y}, \hat{z}))$ (isto é, que satisfaçam estritamente as desigualdades cônicas de segunda ordem correspondentes), então um par de soluções $(x, (y, z))$ é ótimo para estes problemas se e somente se:

$$\begin{aligned} Ax &= b, x \in \epsilon \\ A^T y + z &= c, z \in \epsilon \\ x * z &= 0 \end{aligned}$$

As provas detalhadas das propriedades mencionadas nessa seção e questões relativas a degenerescência e outras abordagens igualmente relevantes são explicitadas em maiores detalhes em [23, 25]

Capítulo 3

Algoritmos e Softwares

Neste capítulo, serão tratados aspectos relativos a Algoritmos de Pontos Interiores voltados à obtenção de soluções eficientes para SOCPs bem como softwares disponíveis. Conforme proposta deste trabalho, o escopo desta abordagem está vinculado a Problemas de Programação Cônica de Segunda Ordem. Demais abordagens, referentes a Problemas de Otimização Linear, Semidefinida e outros, podem ser encontradas em [2, 4, 5, 6, 7, 8].

No contexto de Otimização Linear, duas classes de Algoritmos de Pontos Interiores podem ser destacadas: uma contemplando métodos primais unicamente ou duais unicamente, e outra relativa a métodos primal-dual. A primeira classe pode ser generalizada a SOCPs de forma muito direta, porém a segunda incorre de dificuldades algébricas para tal, sendo esta última a que empiricamente apresentou propriedades numéricas mais favoráveis. Dessa forma, a literatura traz alternativas resultantes em diferentes Métodos Primal-dual por Pontos Interiores. A seguir, é desenvolvida a lógica que embasa *Métodos Primal-Dual de Caminho a Seguir*. Em [25] são feitas contextualizações relevantes sobre o tema.

3.1 *Métodos Primal-Dual de Caminho a Seguir*

Retomando as definições padrões de SOCPs apresentadas neste texto:

Problema Primal de Programação Cônica de Segunda Ordem Padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1^T x_1 + \dots + c_r^T x_r \\ \text{s.a} \quad & A_1 x_1 + \dots + A_r x_r = b, x_i \succeq_{\epsilon} 0 \\ & i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Problema Dual de Programação Cônica de Segunda Ordem Padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.a} \quad & A_i^T y + z_i = c_i, z_i \succeq_{\epsilon} 0 \\ & i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Pode ser demonstrado que, se $x \in \epsilon$, então $-\ln[\det(x)]$ é uma função convexa de barreira para ϵ . Para tal, veja [25]. Dessa maneira, considerando as desigualdades cônicas de segunda ordem do primal estritas e, para $\mu \in \mathbb{R}$, tomando o termo $-\mu \sum_i \ln[\det(x_i)]$, obtém-se o seguinte derivado do problema primal:

(P $_{\mu}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{min} \quad & \sum_{i=1}^r c_i^T x_i - \mu \sum_{i=1}^r \ln[\det(x_i)] \\ \mathbf{s.a} \quad & \sum_{i=1}^r A_i x_i = b, x_i \succ_{\epsilon} 0 \\ & i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

É possível verificar que as condições de KKT para **(P $_{\mu}$)** são:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r A_i x_i &= b; \\ c_i - A_i^T y - 2\mu x_i^{-1} &= 0, \forall i = 1, 2, \dots, r; \text{ e} \\ x_i \succ_{\epsilon} 0, \forall i &= 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

Definindo $z_i := c_i - A_i^T y$, verifica-se que toda solução de **(P $_{\mu}$)** também satisfaz as seguintes condições **(C.P $_{\mu}$)**:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r A_i x_i &= b; \\ A_i^T y + z_i &= c_i, \forall i = 1, 2, \dots, r; \\ x_i * z_i &= 2\mu e, \forall i = 1, 2, \dots, r; \text{ e} \\ x_i, z_i &\succ_{\epsilon} 0, \forall i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Tratamento similar pode ser feito ao problema Padrão Dual de Programação Cônica de forma a obter o seguinte problema derivado:

(D $_{\mu}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{max} \quad & b^T y + \mu \sum_{i=1}^r \ln[\det(z_i)] \\ \mathbf{s.a} \quad & A_i^T y + z_i = c_i, i = 1, \dots, r \\ & z_i \succ_{\epsilon} 0. i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

É verificável que as condições de KKT para **(D $_{\mu}$)** são equivalentes a **(C.P $_{\mu}$)**.

Um resultado importante é tal que, para cada $\mu > 0$, pode-se demonstrar que o conjunto de restrições **(C.P $_{\mu}$)** tem solução única. Dessa maneira, pode-se definir a noção de *trajetória central* para SOCPs, dada a seguir:

Definição 4.1: A trajetória de pontos (x, y, z) que satisfazem **(C.P $_{\mu}$)** para $\mu > 0$ é a *trajetória central* associada ao par primal-dual padrão de Problemas de Programação Cônica.

A ideia da construção deste método equivale, de modo geral, aos seguintes passos: (1) identificação de um ponto inicial próximo ou pertencente à *trajetória central*; (2) aplicação do Método de Newton ao sistema $(C.P_\mu)$ para obtenção de alguma direção $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ que reduza o *gap* de dualidade; (3) percorrer a direção obtida, garantindo que o novo ponto seja viável e esteja no interior de ϵ ; (4) redução de μ por um fator constante e (5) repetição do processo. Com a combinação adequada dos critérios aplicados em cada passo descrito, pode-se demonstrar convergência em um número polinomial de iterações. A seguir, são desenvolvidas ideias básicas para o entendimento construtivo do método.

Se as direções $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ forem consideradas e as ocorrências de x_i, y, z_i forem substituídas, respectivamente, por $(x_i + \Delta x_i, y + \Delta y, z_i + \Delta z_i)$, o conjunto de restrições $(C.P_\mu)$ é reduzido à seguinte forma linear em Δ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r A_i \Delta x_i &= b - \sum_{i=1}^r A_i x_i; \\ A_i^T \Delta y + \Delta z_i &= c_i - A_i^T y - z_i, \forall i = 1, 2, \dots, r; \\ z_i * \Delta x_i + x_i * \Delta z_i &= 2\mu e - x_i * z_i, \forall i = 1, 2, \dots, r; \end{aligned}$$

Definindo $r_p := b - Ax$, $r_d := c - A^T y - z$ e $r_c := 2\mu e - x * z$, o conjunto de equações descrito acima é equivalente a:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Arw(z) & 0 & Arw(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{pmatrix}$$

A aplicação de Redução Gaussiana por blocos resulta em:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (AAr w^{-1}(z)Arw(x)A^T)^{-1}(r_p + AAr w^{-1}(z)(Arw(x)r_d - r_c)) \\ \Delta z &= r_d - A^T \Delta y \\ \Delta x &= -Arw^{-1}(z)(Arw(x)\Delta z - r_c) \end{aligned}$$

A direção de Newton explicitada acima traz naturalmente duas considerações importantes no contexto de SOCPs: a primeira é se, de fato, ela incorre na redução do *gap* de dualidade e a segunda, relacionada à real observação de convergência em número polinomial de iterações do método. A fim de controlar essas questões, são definidas noções de *vizinhas* em relação à *trajetória central*. Isso traz a abordagem sobre limite de passo na direção de Newton bem como redução efetiva em *gap* de dualidade a uma perspectiva mais clara.

Seja $w_i = Q_{x_i^{1/2}} z_i$ e $w = (w_1; \dots; w_r)$. São definidas abaixo três *Medidas de Centralização*:

$$\begin{aligned} d_F(x, z) &:= \|Q_{x^{1/2}} z - \mu e\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r (\lambda_1(w_i) - \mu)^2 + (\lambda_2(w_i) - \mu)^2} \\ d_2(x, z) &:= \|Q_{x^{1/2}} z - \mu e\|_2 = \max_{i=1, \dots, r} \{|\lambda_1(w_i) - \mu|, |\lambda_2(w_i) - \mu|\} \\ d_{-\infty}(x, z) &:= \mu - \min_{i=1, \dots, r} \{\lambda_1(w_i), \lambda_2(w_i)\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, com respeito às *Medidas de Centralização* propostas acima, podem ser definidas as seguintes *vizinhas* em relação à *trajetória central*, tomando $\gamma \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
N_F(\gamma) &:= \{(x; y; z) \mid Ax = b, A^T y + z = c, x, z \succ_\epsilon 0, d_F(x, z) \leq \gamma\mu\} \\
N_2(\gamma) &:= \{(x; y; z) \mid Ax = b, A^T y + z = c, x, z \succ_\epsilon 0, d_2(x, z) \leq \gamma\mu\} \\
N_{-\infty}(\gamma) &:= \{(x; y; z) \mid Ax = b, A^T y + z = c, x, z \succ_\epsilon 0, d_{-\infty}(x, z) \leq \gamma\mu\}
\end{aligned}$$

Pode ser demonstrado que $d_F(x, z) \geq d_2(x, z) \geq d_{-\infty}(x, z)$ e, portanto, que $N_F(\gamma) \subseteq N_2(\gamma) \subseteq N_{-\infty}(\gamma)$. Intuitivamente, pode parecer mais atrativo desenvolver análises sob a ótica de $N_{-\infty}(\gamma)$, por possibilitar maiores ajustes de passo nas direções de Newton. Porém, na prática, torna-se difícil provar a convergência polinomial do método nessa perspectiva, trazendo melhores resultados o uso de $N_F(\gamma)$.

Para $p \succ_\epsilon 0$, define-se os seguintes operadores:

$$\begin{aligned}
\acute{u} &:= Q_p u \\
\check{u} &:= Q_{p^{-1}} u
\end{aligned}$$

Considerando que ϵ permanece invariante sobre a mudança de variáveis $x \rightarrow \acute{x}$, o par Primal-Dual Padrão de SOCP pode ser reduzido à seguinte forma:

\acute{P} :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{min} \quad \check{c}_1^T \acute{x}_1 + \dots + \check{c}_r^T \acute{x}_r \\
&\mathbf{s.a} \quad \check{A}_1 \acute{x}_1 + \dots + \check{A}_r \acute{x}_r = b, \acute{x}_i \succeq_\epsilon 0 \\
&\quad \quad i = 1, \dots, r
\end{aligned}$$

\check{D} :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{min} \quad b^T y \\
&\mathbf{s.a} \quad \check{A}_i^T y + \check{z}_i = \check{c}_i, \check{z}_i \succeq_\epsilon 0 \\
&\quad \quad i = 1, \dots, r
\end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
z &\rightarrow \check{z} \\
c &\rightarrow \check{c} \\
A_i &\rightarrow \check{A}_i = A_i Q_{p_i^{-1}} \quad \therefore A \rightarrow \check{A} = A Q_{p^{-1}}
\end{aligned}$$

A seguir, são apresentados dois lemas importantes para o desenvolvimento das ideias finais desta subseção:

Lema 4.1: Para p não singular dado, vale que:

- i. $x^T z = \acute{x}^T \check{z}$;
- ii. Para qualquer vetor u dado, $Au = 0$ se e somente se $\check{A}\acute{u} = 0$;
- iii. $d(x, z) = d(\acute{x}, \check{z})$ para os critérios de centralidade $F, 2, -\infty$; e
- iv. Sob a mudança de variáveis proposta, a *trajetória central* e as *vizinhanças* $d_F(x, z)$, $d_2(x, z)$ e $d_{-\infty}(x, z)$

são invariantes.

Lema 4.2: $(\acute{\Delta}x, \Delta y, \check{\Delta}z)$ satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\check{A}\acute{\Delta}x &= b - \check{A}\acute{x} \\ \check{A}^T \Delta y + \check{\Delta}z &= \check{c} - \check{A}^T y - \check{z} \\ \acute{\Delta}x * \check{z} + \acute{x} * \check{\Delta}z &= 2\mu e - \acute{x} * z\end{aligned}$$

se e somente se $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ satisfaz:

$$\begin{aligned}A\Delta x &= b - Ax \\ A^T \Delta y + \Delta z &= c - A^T y - z \\ (Q_p \Delta x) * (Q_{p-1} z) + (Q_p x) * (Q_{p-1} \Delta z) &= 2\mu e - (Q_p x) * (Q_{p-1} z)\end{aligned}$$

Nota-se que a direção $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ trabalhada anteriormente é resultante do caso particular apresentado no último lema, em que $p = e$. Do mesmo modo, pode-se observar que $(\acute{\Delta}x, \Delta y, \check{\Delta}z)$ equivale à resultante da aplicação do Método de Newton, considerando viabilidade primal-dual e as relações de complementaridade $(\acute{x} * \check{z} = \mu e)$ resultantes dos modelos \acute{P} e \check{D} . Dessa maneira, as direções dependem da escolha de p , cujas possibilidades culminam em diferentes métodos propostos na literatura, conforme mencionado ao início do capítulo.

Definição 4.2: A classe de direções $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ resultantes da escolha de p de modo que \acute{x} e \check{z} comutam é chamada de *classe comutativa de direções*. Uma direção pertencente a esta classe é dita *direção comutativa*.

O caso em que $p = e$ não incorre em uma direção resultante comutativa, no caso geral. Por outro lado, outras direções o fazem, tais como:

- i. $p = z^{1/2}$
- ii. $p = x^{-1/2}$
- iii. $[Q_{x^{1/2}}(Q_{x^{1/2}}z)^{-1/2}]^{-1/2} = [Q_{z^{-1/2}}(Q_{z^{1/2}}x)^{1/2}]^{-1/2}$.

As duas primeiras direções são referidas na literatura como direções HRVW/KSH/M em Problemas de Programação Semidefinida e a terceira é a direção de Nesterov e Todd. Resultantes interessantes a respeito destas direções podem ser mais profundamente observados em [6, 7, 8, 25].

Diante das análises ilustradas nesta seção, há condições suficientes, neste momento, para demonstrar a estratégia de obtenção de algoritmos de pontos interiores com tempo polinomial de iterações para SOCPs, conforme mencionado anteriormente neste texto. Primeiramente, relembra-se o sistema de equações citado no **lema 4.2**:

$$\begin{aligned}A\Delta x &= b - Ax \\ A^T \Delta y + \Delta z &= c - A^T y - z\end{aligned}$$

$$(Q_p \Delta x) * (Q_{p-1} z) + (Q_p x) * (Q_{p-1} \Delta z) = 2\mu e - (Q_p x) * (Q_{p-1} z)$$

Considerando-se que (x, y, z) seja um ponto viável para algum critério de vizinhança e que a direção $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ é obtida como solução do sistema acima, tomando-se $\mu = \frac{\text{tr}(x * z)}{2r} \sigma$ para $\sigma \in (0, 1)$. Para o novo ponto obtido $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, verifica-se que:

$$\text{tr}((x + \Delta x) * (z + \Delta z)) = \text{tr}(x * z) + \text{tr}(\Delta x * z + x * \Delta z) + \text{tr}(\Delta x * \Delta z) = \text{tr}(x * z) + \text{tr}\left(\sigma \frac{\text{tr}(x * z)}{2r} e - x * z\right) + \text{tr}(\Delta x * \Delta z) = \sigma \text{tr}(x * z) + 2\Delta x^T \Delta z.$$

Como (x, y, z) é um ponto viável, então necessariamente $r_p = 0$ e $r_d = 0$, garantindo que $\Delta x^T \Delta z = 0$. Assim, é evidenciado que o fator de redução do *gap de dualidade* a cada iteração é σ . Por outro lado, a escolha de σ e γ deve ser cuidadosa de modo que a permanência na vizinhança $N(\gamma)$ e a consequente viabilidade sejam satisfeitas durante as iterações.

Diz-se que um algoritmo de pontos interiores tem *complexidade de iteração* $\mathbf{O}(f)$ se cada f iterações do mesmo representarem uma redução de *gap de dualidade* por, pelo menos, um fator constante. Pode ser demonstrado que, sob a vizinhança $N_F(\gamma)$, a escolha $\sigma = (1 - \frac{\delta}{\sqrt{r}})$, para $\delta, \gamma \in (0, 1)$, garante que o próximo ponto da iteração continuará na vizinhança. A complexidade de iteração do algoritmo, neste escopo, pode ser demonstrada $\mathbf{O}(\sqrt{r})$. Pode-se ainda demonstrar que sob a mesma escolha de σ , a direção de Nesterov-Todd implica em complexidade de iteração de $\mathbf{O}(r)$ para as vizinhanças N_2 e $N_{-\infty}$. Alterando $p = x^{-1/2}$ ou $p = z^{1/2}$, a complexidade de iteração se torna, respectivamente, $\mathbf{O}(r)$ e $\mathbf{O}(r^{1.5})$ para as vizinhanças N_2 e $N_{-\infty}$. Nestas mesmas vizinhanças, a complexidade de direções não comutativas, especialmente $p = e$, não é definida no caso geral.

Esta subseção cobriu aspectos básicos sobre a construção de *algoritmos de pontos interiores de caminho a seguir*. Sobre a avaliação mais profunda das ordens de complexidade de cada direção escolhida, pode-se consultar [25]. Em [25] também são feitas considerações a respeito de métodos adequados para implementação numérica dos algoritmos discutidos nesta parte do texto.

3.2 CVX

CVX é um sistema de modelagem implementado em Matlab voltado à construção e solução de Programas Convexos Disciplinados (DCPs). Dentre os problemas pertencentes ao seu escopo de suporte, estão problemas de programação linear, quadrática, semidefinida e SOCPs. Ele também pode ser utilizado para modelagens de otimização mais complexas. Uma característica importante sobre sua utilização é que a linguagem de programação se torna muito intuitiva em relação às descrições matemáticas dos modelos, facilitando suas construções computacionais.

Explicitando de forma mais clara o exposto no parágrafo acima, Programação Convexa Disciplinada é uma metodologia proposta por Michael Grant, Stephen Boyd e Yinyu Ye para construção de problemas convexos de otimização. A ideia geral é estabelecer um padrão de regras a serem verificadas para um modelo de otimização que sejam suficientes, embora não necessárias, para garantir sua convexi-

dade e a transformação em tal forma que admita solução numérica eficiente. Problemas não identificados como convexos, se o forem de fato, precisam ser reformulados de modo a contemplar o padrão de regras de DCP para serem modelados em CVX. A formulação completa dos padrões aceitos em DCP são definidas em [14].

Maiores detalhes a respeito de DCP

O conjunto de regras de Programação Convexa Disciplinada formam um conjunto de condições suficientes, mas não necessárias, para convexidade. Neste contexto, as expressões escalares são classificadas pelas suas *curvaturas*, que podem ser dos seguintes tipos: *constante*, *afim*, *convexa* e *côncava*. Para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, as categorias mencionadas são refletidas pelas seguintes estruturas:

constante : $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$

afim : $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$

convexa : $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0, 1]$

côncava : $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0, 1]$

Vale observar que as categorias admitem implicações mútuas, como expressões constantes também serem afins e expressões afins reais serem mutualmente convexas e côncavas.

Expressões convexas e côncavas são, por definição, reais. O uso de expressões afins e constantes complexas pode ser efetuado, mas com determinadas limitações (como por exemplo, elas não podem estar associadas a restrições de desigualdade).

DCP suporta programas disciplinados de minimização, maximização e de constatação de viabilidade. Por outro lado, é importante mencionar que os autores [14] não indicam a utilização de restrições de desigualdade estrita pura e simplesmente, a não ser pela tomada de passos adicionais que garantam que o modelo cumpra esta imposição.

Em relação à verificação de expressões válidas, CVX busca categorizá-las dentro das seguintes perspectivas, rejeitando-as em caso contrário:

Uma expressão constante válida é:

- qualquer expressão do Matlab bem estruturada avaliada como valor finito.

Uma expressão afim válida é:

- uma expressão constante válida;
- uma variável declarada;
- uma chamada a alguma função com resultado afim;
- soma ou diferença de expressões afins;

- produto de uma expressão afim e uma constante.

Uma expressão convexa válida é:

- uma expressão constante ou afim válida;
- uma chamada a alguma função com resultado convexo;
- soma de duas ou mais expressões convexas;
- diferença entre uma expressão convexa e uma expressão côncava;
- produto de uma expressão convexa por uma constante não negativa;
- produto de uma expressão côncava e uma constante não positiva;
- negação de uma expressão côncava.

Uma expressão côncava válida é:

- uma expressão constante ou afim válida;
- uma chamada a alguma função com resultado côncavo;
- soma de duas ou mais expressões côncavas;
- diferença entre uma expressão côncava e uma expressão convexa;
- produto de uma expressão côncava e uma constante não negativa;
- produto de uma expressão convexa e uma constante não positiva;
- negação de uma expressão convexa.

Outras análises de DCP para aceitação ou rejeição de modelos são referentes a monotonicidade das funções combinadas às classificações de curvatura e em relação a formas quadráticas. Estas análises são exploradas com maior aprofundamento conceitual em [14].

Os solvers SeDuMi e SDPT3 estão inclusos na biblioteca padrão de solvers de CVX. Outros dois, Gurobi e MOSEK, estão contemplados para a versão com fins comerciais de CVX e, portanto, necessitam de licença para utilização. A construção de SeDuMi foi, em grande parte, baseada nos trabalhos de Nesterov-Todd, com menção feita na última subseção. Maiores detalhes técnicos a respeito dos solvers utilizados por CVX podem ser encontrados em [9, 14, 20].

No capítulo seguinte, será feita uma abordagem numérica para um problema prático de otimização, o de *Estratégias de Resseguro*, cujas soluções foram obtidas por CVX. Dessa maneira, os códigos utilizados e maiores especificidades da linguagem estão em tal escopo.

Capítulo 4

Modelo de Otimização para Estratégia de Resseguro

Neste capítulo, será introduzido o conceito de resseguro, bem como os tipos de contratos praticados no mercado e será formulado um modelo de otimização usando SOCP para proposta de estratégia ótima de transferência de riscos.

4.1 Aspectos gerais sobre operações de resseguros

Resseguro é um mecanismo de transferência de riscos, através do qual as seguradoras transferem determinada parcela de riscos de suas carteiras de apólices. As resseguradoras concordam em indenizá-las mediante à materialização do risco, o que tecnicamente é equivalente ao termo *ocorrência de sinistro*. Conforme existente a transferência de riscos, deve existir também a transferência de parte dos prêmios da seguradora associados a estes riscos cedidos, ou seja, parcela do montante que a seguradoras recebeu para aceitar o risco do segurado. De forma semelhante, as resseguradoras também podem utilizar de transferência de riscos para outras, o que se denomina operação de retrocessão.

O órgão regulador do mercado de seguros no Brasil é a Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), o qual, dentre outras funções relativas a fiscalização e regulação, determinam regras mínimas de perfil de transferência de riscos que as seguradoras precisam respeitar, conforme [22]. De acordo com esta prática, as resseguradoras são classificadas em três categorias:

Ressegurador Local: ressegurador sediado no País, constituído sob a forma de sociedade anônima, que tenha por objeto exclusivo a realização de operações de resseguro e retrocessão;

Ressegurador Admitido: ressegurador sediado no exterior, com escritório de representação no País, que, atendendo às exigências previstas na Lei Complementar Nº 126/07 e nas normas aplicáveis à ativi-

dade de resseguro e retrocessão, tenha sido cadastrado como tal na Superintendência de Seguros Privados - SUSEP, para realizar operações de resseguro e retrocessão;

Ressegurador Eventual: empresa resseguradora estrangeira sediada no exterior, sem escritório de representação no País, que, atendendo às exigências previstas na Lei Complementar No 126/07 e nas normas aplicáveis à atividade de resseguro e retrocessão, tenha sido cadastrada como tal na SUSEP, para realizar operações de resseguro e retrocessão;

A SUSEP estabelece limites para operações com resseguro/retrocessão em função dos prêmios de seguro/resseguro avaliados para cada cenário de companhia. Dentre as principais restrições estabelecidas, é importante mencionar que:

- i. A sociedade seguradora ou o ressegurador local não poderá transferir, para empresas ligadas ou pertencentes ao mesmo conglomerado financeiro sediadas no exterior, mais de 20% (vinte por cento) do prêmio correspondente a cada cobertura contratada. Neste contexto, entende-se que a condição a condição de mesmo conglomerado é caracterizada pelo conjunto de pessoas jurídicas relacionadas, direta ou indiretamente, por participação acionária de 10% ou mais no capital, ou por controle operacional efetivo, pela administração ou gerência comum, ou pela atuação no mercado sob a mesma marca ou nome comercial;
- ii. A sociedade seguradora contratará com resseguradores locais pelo menos quarenta por cento de cada cessão de resseguro em contratos automáticos ou facultativos;
- iii. As sociedades seguradoras e os resseguradores locais não poderão ceder, respectivamente, em resseguro e retrocessão, mais de cinquenta por cento dos prêmios emitidos relativos aos riscos que houver subscrito, considerando-se a globalidade de suas operações, em cada ano civil; e
- iv. A sociedade seguradora ou a sociedade cooperativa poderá ceder a resseguradores eventuais até dez por cento do valor total dos prêmios cedidos em resseguro, considerando-se a globalidade de suas operações em cada ano civil.

Os contratos estabelecidos nas operações de resseguro admitem variações e, de forma genérica, estão descritos na figura 1, na sequência.

Primeiramente, observa-se a diferença entre os conceitos de contratos de resseguro automático e facultativo:

Contrato de Resseguro Facultativo: operação de resseguro através da qual o ressegurador ou resseguradores dão cobertura a riscos referentes a uma única apólice ou plano de benefícios ou grupo de apólices ou planos de benefícios já definidos quando da contratação entre as partes;



Figura 4.1: Organograma de tipos de contratos de resseguro

Contrato de Resseguro Automático: a operação de resseguro através da qual a cedente acorda com ressegurador ou resseguradores a cessão de uma carteira de riscos previamente definidos entre as partes e compreendendo mais de uma apólice ou plano de benefícios, subscritos ao longo de um período pré-determinado em contrato.

De posse da diferenciação acima, são tecidos comentários a respeito dos contratos proporcionais e suas ramificações possíveis, bem como para os não proporcionais e suas derivações possíveis.

Contrato de Resseguro Proporcional: Este tipo de contrato tem por característica, conforme é intuitivo pela nomenclatura, a proporcionalização da participação do segurador e ressegurador(es) no risco sob escopo de contratação, considerando percentuais negociados no mesmo. Isso significa que a participação que um ressegurador detém no prêmio é proporcional àquela que detém no que tange a sinistros. Dois tipos de contratos, mais específicos, são derivados dessa classificação: quota-parte (ou *quota-share*) e excedente de responsabilidade (ou *surplus*).

Modalidade quota-share: Nesta modalidade, a partir da definição de um percentual a se aplicar sobre cada risco, limite de cobertura e respectivo prêmio, é definida a repartição dos prêmios e dos montantes de indenizações a serem pagas entre o que é retido pelo segurador e o que é devido ao ressegurador. Nesta mesma proporção, é definida a partição das partes nos sinistros.

Modalidade de Excedente de Responsabilidade: Neste tipo de resseguro, o segurador determina seu limite de retenção fixo por cada risco, o que é referenciado tecnicamente como *pleno*. De acordo com o contrato, o ressegurador fica responsável pela cobertura de um múltiplo desse pleno. Neste caso, a proporção de participação de resseguro de excedente de responsabilidade é avaliada individualmente por risco, dependendo da importância segurada, ao contrário da retenção direta do segurador, que assume, no máximo, o limite de retenção fixado. A mesma proporção é utilizada no rateio de prêmios e nas participações sobre indenizações de sinistros.

Contrato de Resseguro Não Proporcional: No contexto de contratos não proporcionais, ao contrário do que foi demonstrado anteriormente, não são estabelecidas proporções fixas de participação entre segurador e ressegurador, mas observadas ocorrências efetivas para essas determinações. Basicamente, é definida uma *prioridade* sobre a qual o segurador detém total responsabilidade de cobertura, mas cujos excedentes são repassados ao ressegurador. São importantes tipos de contratos não proporcionais: excesso de danos e excesso de sinistros (ou *stop-loss*).

Modalidade de Excesso de danos: Neste tipo de contrato, o escopo de responsabilidade do ressegurador é determinado pelo excedente de sinistros, até um limite de cobertura acordado, em relação a um montante estabelecido (prioridade) em contrato para retenção única do segurador. A métrica de prêmios não influencia a lógica de negócios neste contexto. Existem dois critérios possíveis para este tipo de contrato:

Modalidade de Excesso de danos por risco: coloca a métrica de excedente à prioridade a nível isolado de cada risco.

Modalidade de Excesso de danos por evento: coloca a métrica de excedente à prioridade a nível de vários sinistros decorrentes de uma mesma causa, isto é, a nível de eventos.

Modalidade Stop-loss: Neste tipo de contrato, a métrica utilizada para definição de participação entre as partes é a sinistralidade anual da seguradora, isto é, a relação percentual anual entre a receita de prêmios e pagamento de sinistros da mesma. O segurador garante, neste caso, cobertura sobre variações anuais de sinistralidade e a prioridade é determinada percentualmente.

4.2 Modelagem de operação de resseguro via SOCP

Nesta subseção, serão apresentadas as principais ideias propostas em [24], no que tange à construção de modelos de suporte a estratégias ótimas de cessão de riscos em resseguros e na apresentação de resultados importantes presentes na literatura sobre o tema, que podem ser consultados em [16, 17, 18, 19, 21, 24].

Como motivação prática para a análise a ser proposta, considera-se as perdas totalizadas por ano e mês de competência contábil relativas às operações de uma grande seguradora brasileira no ramo *Compreensivo Empresarial*, informação esta obtida pelo **Sistema de Estatísticas da SUSEP - SES SUSEP** [22]. Por tratar-se, em geral, de uma operação muito volátil e tipicamente composta por grandes danos, a utilização de contratos de resseguro para mitigação de riscos é usual neste caso. O gráfico apresentado na figura 4.2 demonstra a volatilidade abordada e garante noção prática em relação a perdas diretas incorridas às seguradoras por ocorrência de sinistros.

A cobertura básica deste ramo compreende, como em todos os ramos de seguros, a garantia principal que a seguradora deve oferecer ao cliente. A base é o seguro incêndio tradicional, isto é, coberturas contra risco de incêndio de qualquer natureza: queda de raio ocorrida dentro da área do terreno ou edifício onde estiverem localizados os bens segurados e explosão de gás, desde que ocorrida dentro da área do terreno ou edifício onde estiverem localizados os bens segurados. Entretanto, a SUSEP permite que as seguradoras escolham outros riscos garantidos pela cobertura básica, não sendo necessariamente os mesmos que os da apólice padronizada. Os mais comuns são as coberturas adicionais derivadas do seguro incêndio e dos seguros patrimoniais e de responsabilidades, como, por exemplo, alagamento e inundação, danos elétricos, proteção contra roubo de equipamentos e valores, lucros cessantes, pagamento de aluguel, recomposição de documentos, fidelidade de funcionários, responsabilidade civil e outras.

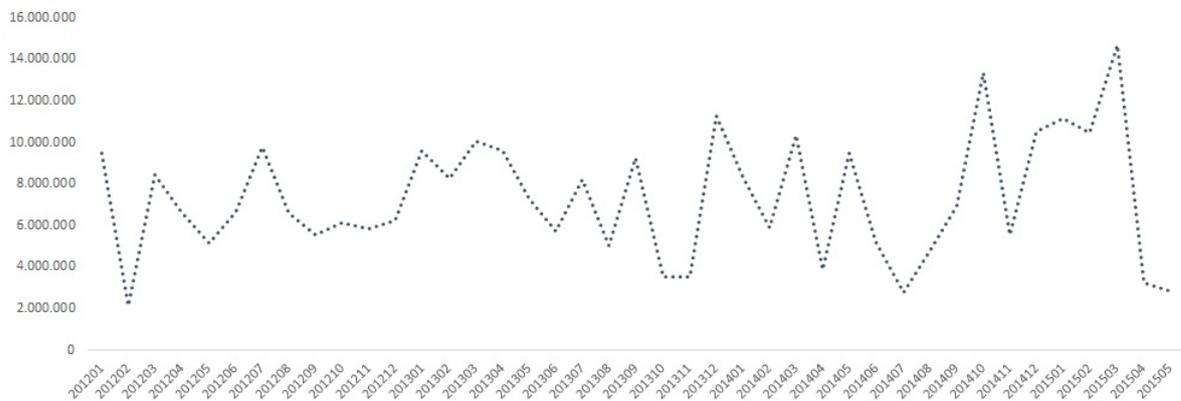


Figura 4.2: Sinistros mensais de seguradora nacional no ramo *Compreensivo Empresarial* (em reais)

Como este exemplo trata de informações públicas reportadas à SUSEP mensalmente pelas seguradoras, dados analíticos, como quantidade de sinistros, não são disponibilizados. De qualquer forma, representa-se na figura 4.3 um quadro genérico e ilustrativo de interesse para o modelo proposto.

Identificação do Sinistro	Valor Total do Sinistro	Valor Cedido a ressegurador	Valor Retido pelo Segurador
1	$X(1)$	$f(1)$	$I(1) = X(1) - f(1)$
2	$X(2)$	$f(2)$	$I(2) = X(2) - f(2)$
3	$X(3)$	$f(3)$	$I(3) = X(3) - f(3)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N-2	$X(N-2)$	$f(N-2)$	$I(N-2) = X(N-2) - f(N-2)$
N-1	$X(N-1)$	$f(N-1)$	$I(N-1) = X(N-1) - f(N-1)$
N	$X(N)$	$f(N)$	$I(N) = X(N) - f(N)$

Figura 4.3: Ilustração de cenário de cessão individual de riscos

A análise de cessão individual de riscos a resseguradores, como representada na figura 4.3, é importante no que tange o entendimento do impacto financeiro que esta operação representa às seguradoras. A transferência de obrigações em pagamentos de sinistros é antecedida por contratos de resseguros,

em moldes tais como os delineados na subseção anterior, que definem a transferência prévia de prêmios da seguradora recebidos de segurados pela aceitação inicial dos riscos. Essa caracterização do negócio imediatamente implica na concorrência de objetivos por parte da seguradora: repasse de riscos elevados (no exemplo gráfico, picos observados na evolução mensal de sinistros) x retenção de resultado financeiro na forma de diminuição de cessão de prêmios dos segurados. A modelagem a ser proposta adiante é composta por elementos que representam a estrutura de decisão encontrada neste *trade-off* e busca, dentro de algum aspecto definido *à priori*, obter uma função de repasse ótimo de resseguro.

Conforme citado em [24], este método, em especial, tem uma vantagem operacional, pois não utiliza de suposições estatísticas em relação aos dados e distribuições, mas somente uma análise numérica e computacionalmente eficiente sobre a escolha de algum horizonte histórico observado.

Em termos de modelagem, considera-se $X \in \mathbb{R}^n$, onde $n \geq 0$ é utilizado a fim de caracterizar a quantidade de sinistros ocorridos/a ocorrer e trazer o problema ao escopo de análise em dimensão finita, como uma variável aleatória não negativa representando os riscos assumidos por um segurador, o qual estrategicamente cede $f(X)$, onde $0 \leq f(X) \leq X$, via contratos de resseguro. Assim, a retenção de risco do segurador é $I_f(X) = X - f(X)$, onde $I_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é determinada como função de cessão de perdas e I_f , como função de retenção de perdas. A cessão de prêmios em resseguros associada é representada por $\Pi(f(X))$, onde $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ reflete algum princípio de cessão de prêmios contratualmente definido, em geral, de acordo com os tipos de contratos expostos anteriormente. Como consequência, a função $T_f(X) := I_f(X) + \Pi(f(X))$, onde $T_f(X) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, é dita função de risco total ao segurador na presença de resseguro.

Naturalmente, o custo total ao segurador depende de X , f e Π . Essa estrutura, intuitivamente, leva à formulação de um modelo de otimização, onde a função objetivo seja obtida por alguma medida de risco em relação ao risco total e a variável do modelo dependa de $f(X)$. Definindo $\rho(T_f(X))$, tal que $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como a medida de risco a ser minimizada, pode-se avaliar o seguinte problema geral de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_f \rho(T_f(X)) \\ & \text{s.a } \Pi(f(X)) \leq \pi, 0 \leq f(X) \leq X \end{aligned}$$

onde $\pi \in \mathbb{R}^n$ representa um limite de cessão de prêmios, seja este devido a questões orçamentárias ou legais, de acordo com a regulação vigente. No mercado brasileiro, conforme evidenciado neste texto, sabe-se que existem limites regulamentares para cessão de prêmios em resseguro.

A ideia a ser construída dentro dessa perspectiva é limitar o escopo de X a observações reais, dando a caracterização de um problema de otimização em dimensão finita. Isso evita a necessidade de hipóteses existentes em outros métodos sobre a distribuição de X e, juntamente ao fato de que muitos problemas práticos podem ser enquadrados na estrutura de SOCPs, garante viabilidade computacional para obtenção de soluções numéricas eficientes.

Considera-se que são observadas N perdas (ou sinistros), denotadas por $x^T := (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, onde cada componente corresponde a uma perda verificada. Associado a este vetor de perdas, considere $f := (f_1, f_2, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^N$ como o vetor de cobertura de riscos por resseguro, componente a

componente. f refere-se à variável de decisão sobre a qual o problema de otimização se dá. O modelo empírico obtido, na forma geral, é o seguinte:

$$\begin{aligned} & \min_f \widehat{\rho}(x, f) \\ \text{s.a. } & 0 \leq f_i \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \widehat{\Pi}(f) \leq \pi_0 \end{aligned}$$

onde $\pi_0 \in \mathbb{R}$. $\widehat{\rho}(x, f)$ e $\widehat{\Pi}(f)$ são, respectivamente, os estimadores empíricos para $\rho(x, f)$ e $\Pi(f)$.

O modelo tem uma hipótese inerente de que as observações passadas refletem adequadamente a expectativa futura de perdas. Dessa maneira, mudanças nas estruturas de carteira de negócios ou questões macroeconômicas gerais, como inflação, devem ser contempladas na análise para melhor ajuste dos resultados à realidade das operações modeladas.

Estará associada a cada modelo, quando aplicável, o vetor ótimo resultante $f^* = (f_1^*, \dots, f_N^*)^T$. Neste aspecto, é importante mencionar que o objetivo final da modelagem, quando o problema admitir solução ótima, é obter a função ótima de cessão de risco $f(X)$, o que pode ser feito por interpolação de $\{(x_i, f_i^*), i = 1, \dots, N\}$. Neste texto, a análise será restrita à visualização gráfica dos pontos $\{(x_i, f_i^*), i = 1, \dots, N\}$ e a relação observada dos resultados obtidos com a literatura sobre o tema.

Na sequência, são apresentados alguns resultados numéricos do modelo geral empírico proposto, específicos para a medida de risco $\widehat{\rho}(x, f)$ adotada, variando o princípio de prêmio sob escopo. Em relação aos dados utilizados, foram geradas duas amostras de tamanho $N = 500$, provindas da distribuição normal com média 100 e utilizando as variâncias de valor 10 e 60, representadas respectivamente por $Norm_1$ e $Norm_2$. Os valores são nominais a fim de garantir análise didática e as dispersões foram escolhidas de modo a evidenciar de forma simples o impacto da volatilidade das carteiras de risco hipotéticas sobre a modelagem. Os histogramas correspondentes aos dados são representados na sequência nas figuras 4.4 e 4.5.

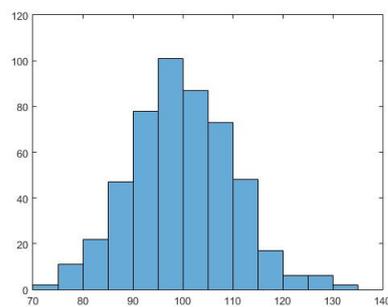


Figura 4.4: Histograma de Perdas relativo à amostra $Norm_1$

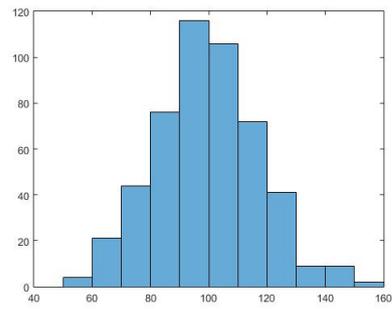


Figura 4.5: Histograma de Perdas relativo à amostra $Norm_2$

4.2.1 Modelo de Minimização de Variância das Perdas Retidas (Var-Min)

Nesta especificação, a medida de risco adotada é a estimativa amostral da variância das perdas retidas pelo segurador, ou seja, busca-se uma estratégia ótima de resseguro no sentido de que a distribuição de perdas retidas apresente dispersão mínima viável.

Dados os pares $\{(x_i, f_i) : i = 1, \dots, N\}$, um estimador possível para $Var(I_f)$ é dado por:

$$\widehat{Var}(I_f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_i - f_i) - (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - f_i))]^2 = \frac{1}{N} (x - f)^T Q (x - f) = \frac{1}{N} [f^T Q f - 2x^T Q f + x^T Q x]$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é formada por linhas $q_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \dots, N$, de modo que sua i -ésima componente seja dada por $1 - \frac{1}{N}$ e as demais sejam dadas por $\frac{1}{N}$. Dessa maneira:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & 1 - \frac{1}{N} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}$$

Diante dessa formulação, o problema de otimização de interesse pode ser representado por:

$$\begin{aligned} & \min_{f \in \mathbb{R}^N} f^T Q f - 2x^T Q f \\ \text{s.a. } & 0 \leq f_i \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \widehat{\Pi}(f) \leq \pi_0, \quad \pi_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Princípio de Esperança de Prêmio (PEP)

Um princípio de prêmio possível neste contexto é o **Princípio de Esperança de Prêmio**. Definido um *fator de carregamento* $\theta > 0$, o problema se resume a:

$$\begin{aligned} & \min_{f \in \mathbb{R}^N} f^T Q f - 2x^T Q f \\ \text{s.a. } & 0 \leq f_i \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & (1 + \theta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i = \pi_0 \end{aligned}$$

Verifica-se que a função objetivo do problema acima é convexa e as restrições envolvidas são lineares, o que garante que o mesmo pode ser representado via SOCP, conforme é explicitado em [24]. Pode-se verificar também que o problema pode ser colocado como um Programa Convexo Disciplinado, portanto, solucionável via CVX, de acordo com o previsto em [14].

Na sequência, serão apresentados resultados numéricos deste modelo obtidos via CVX, com uso do solver SeDuMi, variando as escolhas dos parâmetros definidos *à priori*, para diferentes propostas de obtenção amostral de perdas. Os valores de π_0 serão tomados como 10, 30, 50, 70 e 100 e o fator de carregamento θ , por simplicidade, será fixado a 20%, ou seja, $\theta = 0,2$.

Conforme mencionado anteriormente, foram analisados em gráfico conjunto os pontos $\{(x_i, f_i^*), i = 1, \dots, N = 500\}$ para análise da função de cessão de riscos em questão. Os resultados estão demonstrados na sequência de gráficos iniciada na figura 5.3 e finalizada na figura 5.12.

Por meio dos resultados abaixo, identificados nas funções ótimas de cessão de risco para cada amostra, algumas características se fazem relevantes. Ambos os casos ilustram a prática de resseguro na modalidade ajustada à de **Stop-loss** (isto é, $f(X) = \max(X - d, 0$, onde d é a retenção do segurador) . Essa afirmação reside na explicação de que conforme aumenta a possibilidade de cessão de prêmios em resseguro, com o aumento de valor de π_0 , o ponto em que a cessão torna-se não nula se reduz no eixo horizontal dos gráficos. Essa resposta ilustra que a seguradora deve reter seus riscos até determinado nível de sinistralidade, repassando os demais excedentes à sua *prioridade*, e essa cessão torna-se maior conforme a relevância dos riscos torna-se maior em magnitude. Este resultado também é previsto na literatura sobre o tema [18].

Por outro lado, a amostra $Norm_1$, intencionalmente gerada para representação de uma carteira de negócios de comportamento mais estável, apresenta uma característica que a difere da segunda amostra. A partir do momento em que existe a cessão de risco, o padrão com que ela ocorre não se modifica de forma significativa diante do aumento no volume de perdas. Na segunda amostra, observa-se que, em última instância, o padrão de cessão de riscos para maiores danos ocorre de forma mais branda do que os anteriores, devido à presença de maior instabilidade projetada para esta carteira. Resumidamente, a diferença de comportamento dos riscos pode influenciar muito na concepção da função ótima de cessão em resseguro, o que traz a necessidade, na prática, de estudos prévios de agrupamento de categorias para aplicação da modelagem proposta em diferentes níveis isolados.

Ainda em relação à aplicação real do modelo proposto, fatores vinculados à inflação, variações cambiais e questões macroeconômicas gerais devem ser agregados por meio de restrições, que mantenham a representatividade via SOCPs, ou modificações posteriores nos resultados. Outra necessidade a considerar refere-se aos limites regulamentares, citado o caso brasileiro neste texto, dentre as restrições do modelo. O relaxamento do modelo ao formato apresentado tem fim didático de apresentação.

Abaixo, são feitas as demonstrações gráficas.

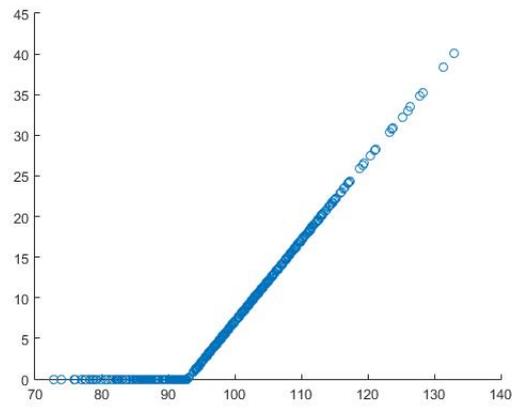


Figura 4.6: PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$

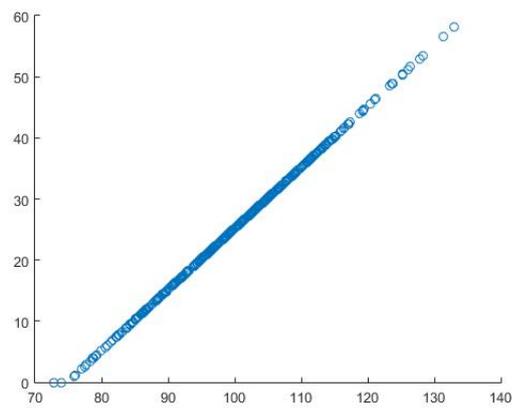


Figura 4.7: PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$

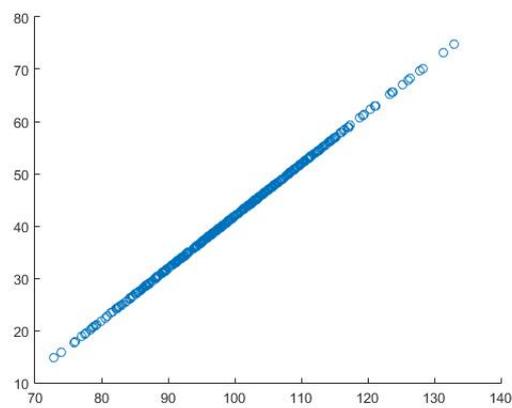


Figura 4.8: PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$

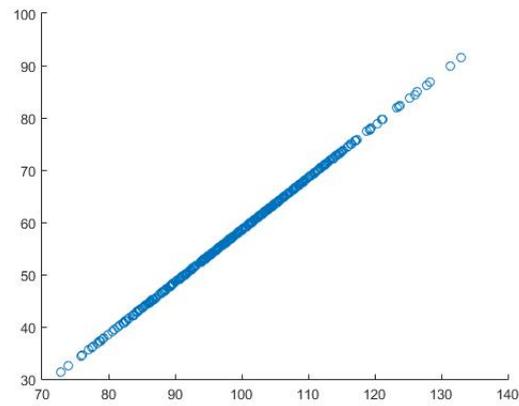


Figura 4.9: PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$

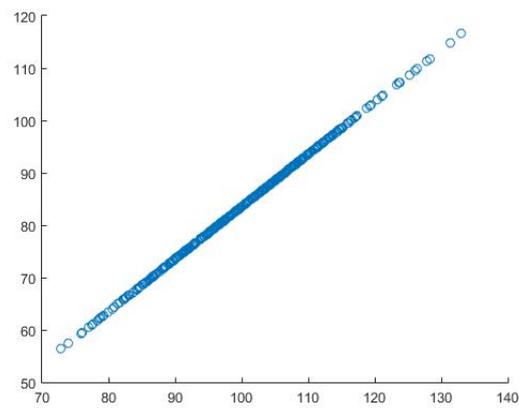


Figura 4.10: PEP: Amostra $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$

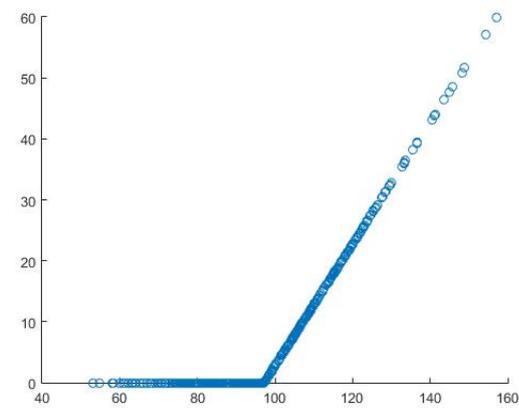


Figura 4.11: PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$

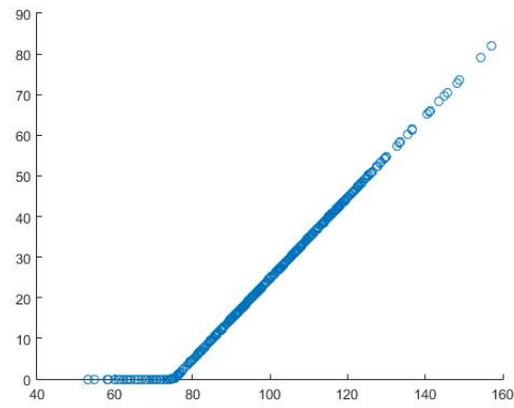


Figura 4.12: PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$

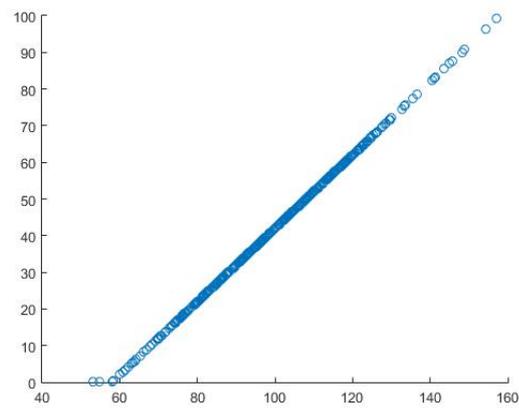


Figura 4.13: PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$

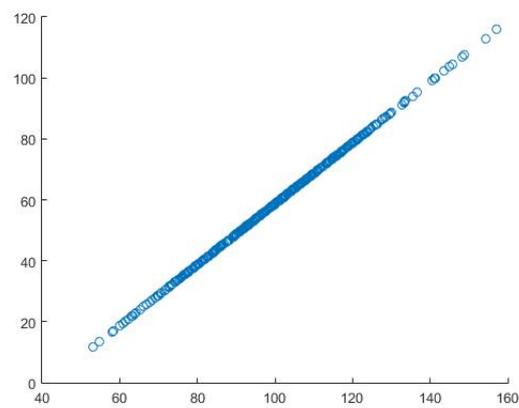


Figura 4.14: PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$

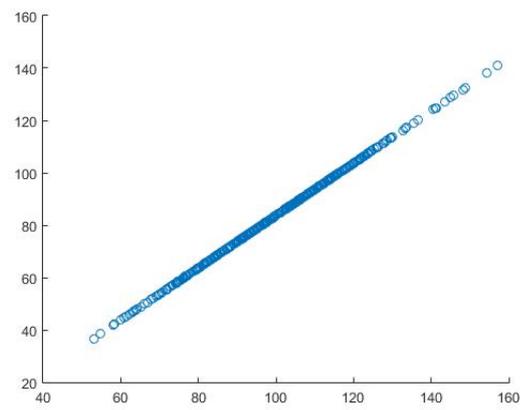


Figura 4.15: PEP: Amostra $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$

Princípio de Desvio Padrão de Prêmio (PDPP)

Outro princípio de prêmio possível neste contexto é o **Princípio de Desvio Padrão de Prêmio**. Definido um *fator de carregamento* $\beta > 0$, o problema se resume a:

$$\begin{aligned} & \min_{f \in \mathbb{R}^N} f^T Q f - 2x^T Q f \\ & \text{s.a. } 0 \leq f_i \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \|Qf\| \leq -\frac{1}{\beta\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N f_i + \frac{\sqrt{N}}{\beta} \pi_0 \end{aligned}$$

Este princípio tem por ideia básica limitar a média dos valores cedidos em resseguros somada a um carregamento de desvio padrão destes valores, portanto, é mais sensível em relação a mudanças em volatilidade de carteira. Este princípio também é importante pelo fato de que materializa um problema puramente de Programação Cônica de Segunda Ordem, ao contrário do primeiro princípio, que caracteriza um problema de Programação Quadrática (classe a qual, como já demonstrado, é um caso particular de SOCP).

Verifica-se que a função objetivo do problema acima é convexa e as restrições envolvidas estão dentro da estrutura de SOCPs. Pode-se verificar também que o problema pode ser colocado como um Programa Convexo Disciplinado, portanto, solucionável via CVX, de acordo com o previsto em [14].

Na sequência, serão apresentados resultados numéricos deste modelo obtidos via CVX, com uso do solver SeDuMi, variando as escolhas dos parâmetros definidos *à priori*, para diferentes propostas de obtenção amostral de perdas. Os valores de π_0 serão tomados como 10, 30, 50, 70 e 100 e o fator de carregamento β , por simplicidade, será fixado em 5 desvios, ou seja, $\beta = 5$.

Conforme mencionado anteriormente, foram analisados em gráfico conjunto os pontos $\{(x_i, f_i^*), i = 1, \dots, N = 500\}$ para análise da função de cessão de riscos em questão.

Conforme avaliado para o Princípio de Esperança de Prêmio, o cenário ótimo de cessão de riscos equivale à modalidade de contrato de **Stop-Loss**. Da mesma maneira, este resultado é previsto na literatura sobre o tema [18].

A análise de comportamento de cessão ótima de resseguro para as amostras geradas, neste escopo de princípio de prêmio, demonstra que o *threshold* de **stop-loss**, ou seja, o nível máximo de risco em que não há cessão, é pouco sensibilizado pela aumento de π_0 para a amostra $Norm_2$, mas tem maior reposta no cenário oriundo da amostra $Norm_1$. Este comportamento é esperado pela definição do princípio de prêmio, uma vez que a volatilidade de cada carteira hipotética, representada pelo desvio padrão dos dados resultantes em cessão ótima, interfere diretamente nas restrições de viabilidade do problema.

Abaixo, são demonstrados os resultados gráficos pertinentes a esta análise.

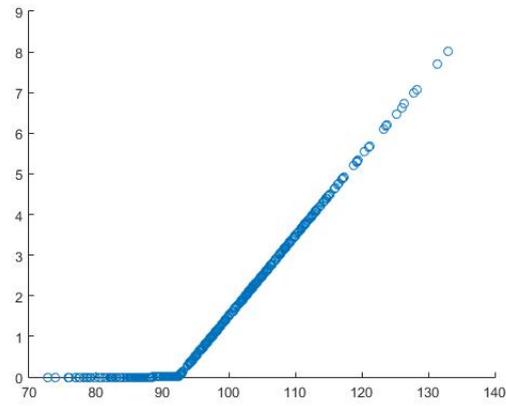


Figura 4.16: PDPP: Amostra1 $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$

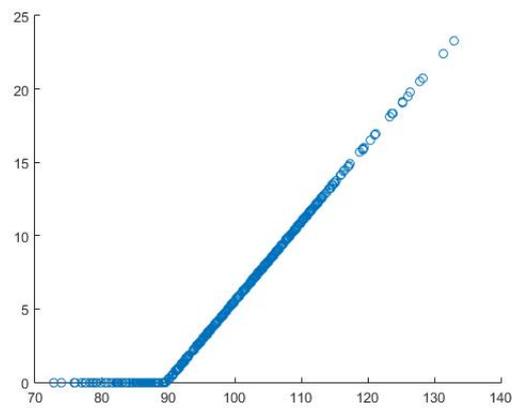


Figura 4.17: PDPP: Amostra1 $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$

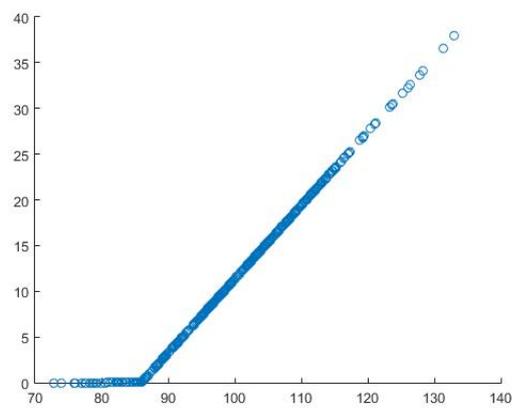


Figura 4.18: PDPP: Amostra1 $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$

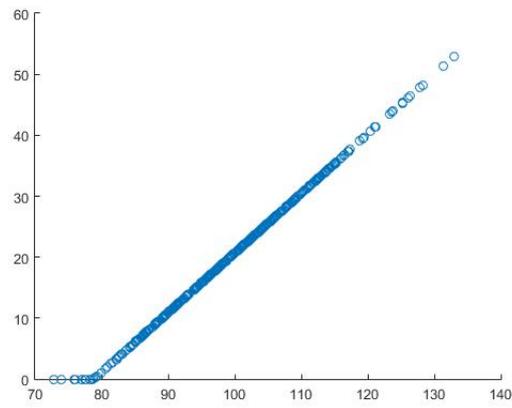


Figura 4.19: PDPP: Amostra1 $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$

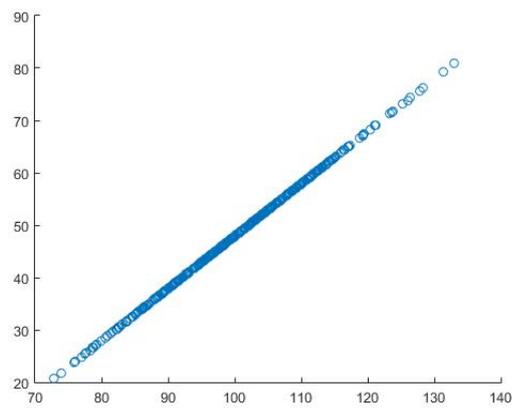


Figura 4.20: PDPP: Amostra1 $Norm_1$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$

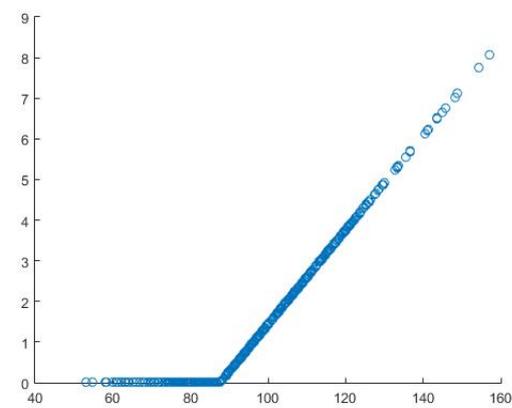


Figura 4.21: PDPP: Amostra1 $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 10$

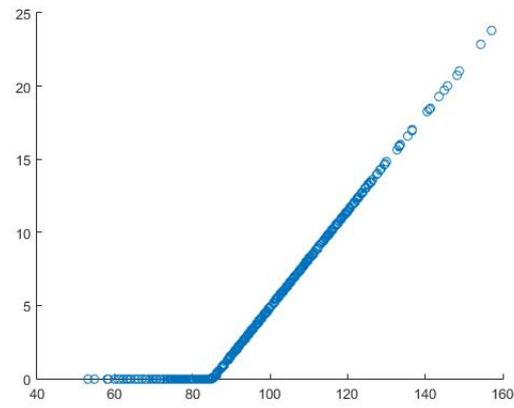


Figura 4.22: PDPP: Amostra1 $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 30$

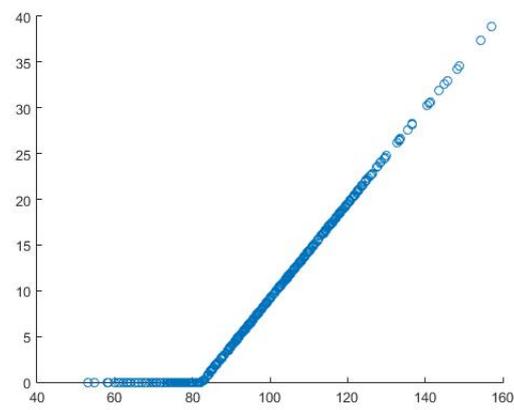


Figura 4.23: PDPP: Amostra1 $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 50$

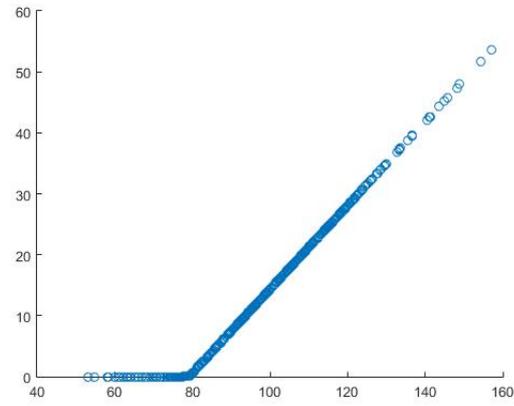


Figura 4.24: PDPP: Amostra1 $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 70$

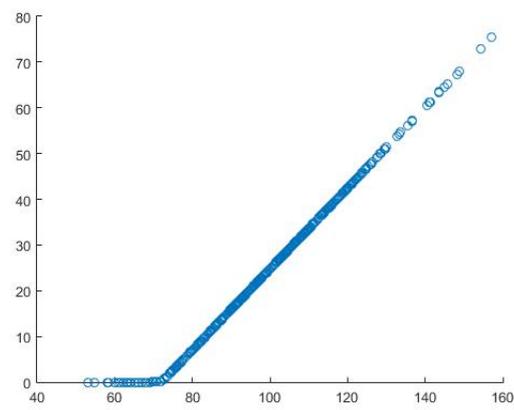


Figura 4.25: PDPP: Amostra1 $Norm_2$ - Função ótima de cessão de risco para $\pi_0 = 100$

Capítulo 5

Conclusões

Em caráter conclusivo, pode-se destacar que a metodologia apresentada em [24], descrita neste texto, representa ganho, principalmente, em relação à objetividade da obtenção de resultados. Hipóteses estatísticas sobre os dados, muitas vezes não aplicáveis ou de difícil verificação em casos práticos, não são necessárias dentro do escopo abordado e, além disso, a viabilidade numérica encontrada é de considerável relevância.

Em conformidade com resultados propostos por [10, 11, 24], para as amostras geradas neste estudo, o modelo de resseguro de maior conexão aos resultados numéricos foi o de modalidade **Stop-loss**, o que não garante que isso seja válido em geral, mas demonstra a rastreabilidade das conclusões de SOCP em relação às práticas de resseguro do ponto de vista estritamente de negócios. Além disso, os diferentes critérios para princípios de prêmios combinados às variações de perfis das carteiras hipotéticas ilustraram quão sensível o modelo pode ser a estes cenários, o que faz necessário o estudo prévio da carteira e do mercado em questão para modelagem similar.

Avaliando estudos futuros em relação ao tema, são de importante consideração a estruturação mais clara no senso teórico para complexidades inerentes ao mercado, tais como: inflação, variações cambiais, oscilações em valores de mercado e classificações de riscos de empresas, dentre outras questões macroeconômicas. No que tange o mercado nacional, é válido apontar a importância de desenvolvimento no sentido de também considerar questões regulamentares na modelagem, de forma a manter as propriedades desejáveis para formulação via SOCPs. Outras vertentes relevantes estão ligadas ao estudo de impactos de políticas ótimas de resseguro em nível de Capital Mínimo Requerido para as companhias, nível de Provisões Técnicas e demais tópicos referentes a solvência.

Apêndice A

Conceitos básicos de Álgebra Linear

Neste capítulo, são abordados alguns conceitos de Álgebra Linear fundamentais às discussões a serem apresentadas posteriormente.

Definição 2.1: A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

é dita simétrica se $a_{i,j} = a_{j,i}$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

O espaço de matrizes simétricas, neste texto, é denotado por \mathcal{S}^n .

Proposição 2.1: \mathcal{S}^n é um espaço vetorial real de dimensão $n(n+1)/2$.

Prova: Esta demonstração será ser feita em duas partes: I - prova de que \mathcal{S}^n é, de fato, um espaço vetorial real e II - prova de que sua dimensão é $n(n+1)/2$.

I - Para provar que \mathcal{S}^n é um espaço vetorial basta verificar que se são dados $A, B \in \mathcal{S}^n$ e $k \in \mathbb{R}$, então necessariamente vale que:

I.i: $A + B \in \mathcal{S}^n$;

I.ii: $kA \in \mathcal{S}^n$.

Como A e B são matrizes simétricas, $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, e I.i segue de forma imediata. Da mesma maneira, vale que $(kA)^T = kA^T = kA$, verificando I.ii.

II - Uma alternativa para se deduzir a dimensão de \mathcal{S}^n é achar uma base para este espaço vetorial. Para tal, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, considera-se as matrizes simétricas $S_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com a seguinte estrutura geral:

$$S_{ij} = \begin{cases} s_{i,j} = s_{j,i} = 1, \\ s_{k,w} = 0, \forall \{k, w\} \in \{1, \dots, n\}^2 \setminus (\{i, j\} \cup \{j, i\}) \end{cases}$$

O número de elementos abaixo da diagonal principal de S_{ij} é $\frac{n^2-n}{2}$. Portanto, a quantidade máxima de matrizes distintas $S_{i,j}$ construídas através da regra acima é $\frac{n^2-n}{2} + n = n(n+1)/2$.

Segue que se $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica qualquer, então existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que:

$$X = \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} S_{ij}$$

Como S_{ij} são matrizes linearmente independentes em \mathcal{S}^n , pois nenhum par delas possui elementos não nulos simultaneamente em uma mesma posição, segue que o conjunto de matrizes S_{ij} , tal que $i \leq j$, forma uma base para \mathcal{S}^n . Dessa forma, verifica-se que $\dim(\mathcal{S}^n) = n(n+1)/2$.

Definição 2.2: Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A é dita uma *Matriz Positiva Semidefinida* se, para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $x^T A x \geq 0$; propriedade cuja notação adotada neste texto é $A \succeq 0$. De forma similar, uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita uma *Matriz Positiva Definida* se vale a desigualdade estrita $x^T A x > 0$ para qualquer vetor $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, com notação representada por $A \succ 0$. É possível também definir essas propriedades através dos autovalores da matriz A , onde ela é dita uma *Matriz Positiva Semidefinida* se todos seus autovalores forem não nulos e *Matriz Positiva Definida*, se todos seus autovalores forem estritamente positivos.

Abaixo, são feitas duas proposições acerca de propriedades equivalentes para matrizes simétricas reais positivas definidas e semidefinidas. Antes de explorá-las, são consideradas duas características de matrizes simétricas reais, cujas provas não estão dentro do escopo deste trabalho:

Proposição 2.2: Seja $A \in \mathcal{S}^n$ uma matriz simétrica. É possível demonstrar que:

1. Todos autovalores de A são reais;
2. Os autovetores de A constituem uma base ortonormal de \mathbb{R}^n

Proposição 2.3: Seja $A \in \mathcal{S}^n$ uma matriz simétrica. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Os autovalores da matriz A são não-negativos;
2. Existe $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tal que $A = BB^T$, sendo r o posto de A ;
3. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $x^T Ax \geq 0$;
4. Todos menores principais de A são não negativos.

Intuição de Prova: Esta prova deve ser feita demonstrando os dois blocos de implicações sequenciais:

$$\underbrace{1. \rightarrow 2. \rightarrow 3. \rightarrow 1.}_{\mathbf{b1}} \text{ e } \underbrace{2. \rightarrow 4. \rightarrow 1.}_{\mathbf{b2}}$$

b1:

2. \rightarrow 3. : considere a matriz $U \in \mathbb{R}^{r \times n}$, obtida pela relação $U = B^T$. Vale que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T Ax = x^T U^T U x = (Ux)^T Ux \geq 0$.

3. \rightarrow 1. : seja $v \in \mathbb{R}^n$ um autovetor de A relativo ao autovalor λ . Por hipótese, vale que $0 \leq v^T Av = \lambda v^T v$. Portanto, λ é não-negativo.

b2:

2. \rightarrow 4. : considera-se a matriz $U \in \mathbb{R}^{r \times n}$, obtida pela relação $U = B^T$. Seja $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$, onde $k < n$, o conjunto de índices cuja exclusão das respectivas linhas e colunas da matriz A determina a submatriz A_H . A exclusão das colunas da matriz U referentes aos mesmos índices determina a matriz U_H , valendo ainda a relação:

$$A_H = (U_H)^T U_H$$

Portanto, $\det(A_H) = \det((U_H)^T U_H) = (\det(U_H))^2 \geq 0$, provando este item.

4. \rightarrow 1. : o método de demonstração neste item é por indução da contrapositiva.

Assume-se que a matriz A tem algum autovalor $\lambda < 0$ relativo ao autovetor v , isto é, esta matriz não é positiva semidefinida. Isso implica que A não tem todos os menores principais positivos, contrariando a hipótese.

Em caso contrário, escolhe-se algum autovetor u ortogonal a v com autovalor correspondente $\mu \leq 0$. Determina-se $s \in \mathbb{R}$ tal que $w = v + su$ tenha pelo menos uma coordenada nula (por exemplo, a i -ésima

coordenada). Sendo A' a submatriz obtida removendo-se a i -ésima linha e coluna da matriz A e w' o vetor obtido removendo-se a i -ésima coordenada do vetor w , vale que:

$$(w')^T A' w' = w^T A w = \lambda + s^2 \mu \leq 0$$

Dessa forma, como já foi demonstrado a equivalência entre os itens **1.** e **3.**, A' não é positiva semidefinida. Por indução, é possível demonstrar que, no caso geral, vale a negativa de que todos os menores principais da matriz A são maiores ou iguais a zero.

Similarmente, para matrizes positivas definidas apresenta-se a seguinte proposição:

1. Os autovalores da matriz A são estritamente positivos;
2. Existe $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A = BB^T$, onde B é inversível;
3. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $x^T A x > 0$;
4. Todos menores principais de A são estritamente positivos.

As provas destes itens se assemelham às apresentadas na proposição anterior e, portanto, não são explicitadas neste texto.

Os temas percorridos nesta parte do trabalho, bem como suas vertentes de caráter elementar, podem ser consultados com maior enfoque teórico em [1].

Referências Bibliográficas

- [1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*, 4th edition. Wellesley Cambridge Press, 2009.
- [2] F. Alizadeh. *Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization*. SIAM J. Optim, 1995.
- [3] D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, Cambridge, MA, 1997.
- [4] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [5] E. de Klerk. *Aspects of Semidefinite Programming: Interior Point Algorithms and Selected Applications, Applied Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2002.
- [6] Y. E. Nesterov and A. Nemirovski. *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming, Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [7] Y. Nesterov and A. Nemirovski. *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [8] Y.E. Nesterov and M.J. Todd. *Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming*. Math. of Oper. Res., 1997.
- [9] J.F. Sturm. *Using SeDuMi 1.0x, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*. Manuscript, available at <http://www.unimass.nl/sturm>, August 1998.
- [10] Balbas, A., B. Balbas, and A. Heras. *Optimal Reinsurance with General Risk Measures*. Insurance: Mathematics and Economics, 2009.
- [11] Cai, J., and K.S. Tan. *Optimal Retention for a Stop-loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measure*. ASTIN Bulletin, 2007.
- [12] Cai, J., K.S. Tan, C. Weng, and Y. Zhang. *Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures*. Insurance: Mathematics and Economics, 2008.
- [13] Chi, Y. *Optimal Reinsurance under Variance Related Premium Principles*. Insurance: Mathematics and Economics, 2012.

- [14] Grant, M., and S. Boyd. *CVX: MATLAB Software for Disciplined Convex Programming*. Web Page and Software, version 2.0 beta, available at <http://cvxr.com/cvx/>, 2012.
- [15] Kass, R., M. Goovaerts, J. Dhaene, and M. Denuit. *Modern Actuarial Risk Theory*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [16] Kaluszka, M. *Modern Actuarial Risk Theory*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [17] Kaluszka, M. *Optimal Reinsurance under Mean-variance Premium Principles*. Insurance: Mathematics and Economics, 2001.
- [18] Kaluszka, M. *Optimal Reinsurance under Convex Principles of Premium Calculation*. Insurance: Mathematics and Economics, 2005.
- [19] Satchell, S. *Optimizing Optimization: the Next Generation of Optimization Applications and Theory*. London: Academic Press, 2010.
- [20] Sturm, J.F. *Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Symmetric Cones*. Optimization Methods and Software, 1999.
- [21] Tan, K.S., C. Weng, and Y. Zhang. *Optimality of General Reinsurance Contracts under CTE Risk Measure*. Insurance: Mathematics and Economics, 2011.
- [22] Atos Normativos. Disponível em: <<http://www.susep.gov.br/>>. Acesso em> 15 jun. 2015.
- [23] Bleckherman, G., Parrilo, P.A, Thomas, R.R. *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*. SIAM, 2013.
- [24] Tan, K.S, Weng, C . *Empirical approach for optimal reinsurance design*. North American Actuarial Journal, 2014.
- [25] Alizadeh, F., Goldfarb, D. *Second-order cone programming*. Mathematical programming, 2003.
- [26] Faraut, J., Korányi, A. *Analysis on Symmetric Cones*. Oxford University Press, UK, 2003.