O modelo de ciclos econômicos de Goodwin
Considerações sobre estabilidade e convergência

Guilherme Lins Arcoverde

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Bacharel em Matemática Aplicada e
Computacional

Programa: Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional
Orientador: Prof. Dr. Pedro da Silva Peixoto
Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Bissacot Proença

São Paulo, junho de 2015

O modelo de ciclos econômicos de Goodwin
Considerações sobre estabilidade e convergência

Esta é a versão original do Trabalho de Conclusão de Curso elaborado pelo candidato Guilherme Lins Arcoverde, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Pedro da Silva Peixoto (Orientador) - IME-USP
- Profª. Drª. Sônia Regina Leite Garcia - IME-USP
- Prof. Dr. Marcio Issao Nakane - FEA-USP
- Prof. Dr. Walter Figueiredo Mascarenhas - IME-USP

Resumo

Arcoverde, G. L. **O modelo de ciclos econômicos de Goodwin**. 2015. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Trata-se de estudo sobre o modelo econômico proposto por Richard Goodwin em 1967. O modelo proposto por Goodwin foi, inicialmente, analisado em sua formulação original, por meio da apresentação de suas propriedades e características, especialmente o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias correspondente. Foram efetuadas considerações sobre sua estabilidade e ausência de convergência ou Instabilidade Estrutural. Também testamos a introdução de modificações no modelo sugeridas pelo próprio Goodwin eliminando uma simplificação por ele adotada com vistas à obtenção de um sistema dinâmico semelhante ao Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra. Em seguida, um modelo alternativo, com alterações mais substantivas foi proposto, com realização extensa de simulações numéricas. Aproveitou-se dados de trabalho realizado para a OECD com vista à produção de evidência empírica do modelo original de Goodwin. Ilustramos as considerações efetuadas com base em dados de quatro Países Membros, submetendo à análise, tanto o modelo original, como suas modificações, a primeira eliminando a hipótese de aproximação linear para uma curva de Phillips suposta no modelo original, em seguida, introduzindo uma função de produção CES no modelo e o dotando de uma hipótese de comportamento maximizador de lucros por parte dos capitalistas, abandonando a hipótese de relação capital/produto constante, que se tornou endógena no modelo modificado. O Ponto central do trabalho é mostrar que, com a introdução das modificações efetuadas, a natureza cíclica da economia é preservada, mas não se observa mais os ciclos perpétuos que caracterizam a Instabilidade estrutural do modelo original. Mostramos que, com as modificações introduzidas, o mecanismo dos ciclos perpétuos é substituído por ciclos amortecidos para o Stedy-State, na ausência de perturbações exógenas ao modelo dinâmico determinístico. Para solução numérica das EDOs envolvidas foi utilizado o método de Runge-Kutta 44.

Palavras Chave: Ciclos Econômicos, Dinâmica Econômica Não Linear, Modelo de Goodwin, Sistemas Dinâmicos.

Sumário

1 Introdução **5**

2 O Modelo de Goodwin **9**
2.1 Considerações Gerais 9
2.2 Construção da curva de *Phillips* não linear 12
2.3 Análise do modelo de Goodwin com aproximação linear da curva de *Phillips* 18

3 Resultados numéricos **21**
3.1 Gráficos por país 21
3.2 Análise dos resultados 30

4 Instabilidade - Bases para um modelo alternativo **31**
4.1 Uma nota sobre a representação da tecnologia 31
4.2 Considerações gerais para um modelo alternativo. 36
4.3 As Propriedades 40
4.4 Resultados numéricos 42
4.4.1 Testando o modelo 42
4.4.2 Análise dos países da OECD selecionados 52

5 Comentários finais **61**

6 Conclusão **63**

A - Uma nota sobre a resolução das EDOs - Método Numérico RK44 **66**

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, boa parte dos macroeconomistas (em especial aqueles ligados ao "mainstream") entendem o ciclo econômico como algo que é provido de dois distintos mecanismos: o impulso (oriundo de choques externos) e a propagação (em regra um sistema estável com oscilações). Há um enfoque alternativo, onde se alinha o trabalho de Goodwin, entre outros. Esses últimos costumam usar sistemas não lineares para gerar ciclos no comportamento do sistema de forma que a instabilidade e as flutuações são oriundas de mecanismo endógeno inerente ao sistema econômico. Tais autores não excluem a existência de choques externos (estocásticos), mas argumentam que as flutuações ocorrerão mesmo na ausência desses choques. O Modelo de Goodwin, objeto de nossa análise, é dessa linhagem e baseia-se no mecanismo presente em modelos Predador-Presa para explicar a natureza cíclica do sistema. Goodwin (1967) descreve uma relação de antagonismo (na verdade também de complementaridade, típica da relação Predador-Presa) entre trabalhadores e proprietários do capital. Goodwin importa o modelo Predador-Presa da biologia para dar forma ao mecanismo de luta de classes.

A inspiração marxista é clara: em situação de rentabilidade crescente o nível de emprego aumenta (os empresários aumentam o investimento) diminuindo o "exército de reserva" de trabalhadores com a ocupação da força de trabalho se aproximando do pleno emprego, dessa forma aumentando o poder de barganha dos trabalhadores que passam a pressionar por maiores salários. O aumento dos salários reais traz a diminuição da taxa de lucro que arrefece o processo de acumulação que vai gerar um aumento do desemprego (pela redução do investimento), reduzindo o salário real e voltando a aumentar os lucros dando origem a um novo ciclo. Também analisaremos nesse trabalho a questão da estabilidade. O Modelo de Goodwin é estruturalmente instável (Veneziani (2001)). De fato, pequenas modificações levam a significativas mudanças no comportamento das variáveis endógenas. Farei uma breve incursão nessa questão.

Richard Murphey Goodwin (1913-1996) foi um Professor Norte-Americano que ensinou em Harvard e Oxford e que nos liga às grandes tradições em economia, matemática e filosofia: Schumpeter, Currie, Harrod e Marschark no

lado da economia; Morse, Wiener, Whitehead e Le Corbeiller no lado da matemática e da filosofia segundo nos ensina Velupillai (1998), num trabalho em sua homenagem publicado no Economic Journal, onde diz ainda que ele e seus contemporâneos em Harvard e Cambridge construiram as bases do assunto tal como nos chega hoje em dia: Leontief, Samuelson, Tobin, Kaldor, Joan Robinson, Stone, Kahn e Sraffa e seus alunos continuam a propagar essas tradições em processo que está em curso. Ninguém melhor do que o próprio Goodwin, entretanto, para explicar a natureza pragmática do seu pensamento, quando justificou sua escolha pela área de moeda e bancos de forma sincera:

> *"I had to make a serious decision about what sort of economics I would pursue. I chose money and banking, as a technical subject in which my Marxism need not be visible, for I knew that as a Marxist I would be unemployable in an American University.*
>
> *Goodwin (1989), pp 281-2".*

Segundo o modelo de Goodwin, em sua essência, o capitalismo, quando descrito numa forma enxuta, sem moeda e sem governo, pode ser representado como um sistema dinâmico não linear que gravita num estado não estacionário, bifurcando entre um estado e outro, quando sujeito a choques externos sem nunca atingir o equilíbrio (ciclos perpétuos em desequilíbrio ou instabilidade estrutural). No modelo que vamos estudar tal dinâmica é dada por um sistema análogo ao modelo descrito pelas equações de *Lotka-Volterra*.

Esse trabalho consiste na análise do modelo acima. Mostraremos que, embora seja brilhante na captura da natureza cíclica do jogo entre trabalhadores e capitalistas, em sua versão original, o modelo se aplica apenas para descrever ciclos muito próximos ao equilíbrio e apresenta problemas em sua construção, pois define variáveis endógenas, a saber: participação dos trabalhadores na renda total da economia e nível de emprego, que são o quociente entre uma parte e o todo, portanto só fazem sentido no quadrado $(0,1) \times (0,1)$. Contudo, tal como formulado o modelo leva essas variáveis para fora do seu domínio de consistência. Primeiramnte, seguindo sugestão do próprio *Goodwin*, introduziremos uma modificação que melhora, sem resolver, tal comportamento, eliminando uma simplificação adotada no modelo original. Em seguida introduziremos modificações mais substantivas, mantendo o modelo suficientemente simples para se ater à essência do sistema capitalista, e mostraremos que continuamos capturando a natureza endogenamente cíclica do sistema, porém, mostraremos que o modelo, assim modificado, deixa de ser estruturalmente instável e possui uma dinâmica convergente ao equilíbrio, em ciclos amortecidos.

O equílíbrio, no sistema proposto por *Goodwin*, sem choques externos e, encontrando-se o sistema em desequilíbrio, é um evento impossível. A economia gravitará perpetuamente em um ciclo fechado ao qual o equilíbrio não pertence. Perturbado por um choque externo, mudará de órbita até uma nova perturbação, sem nunca convergir para o equilíbrio. No modelo alterado o equilíbrio deixa de ser um evento impossível, passando a ser um evento improvável, isto é, como todo ponto num continuum de possibilidades tem probabilidade nula

(no contínuum os eventos pontuais (singleton) têm probabilidade nula, todavia, ocorrem ...), mas é um atrator do sistema dinâmico subjacente, pois a economia converge para ele com maior ou menor velocidade e ciclicidade, em um processo em espiral, com oscilações maiores ou menores de acordo com certos parâmetros que explicitaremos ao longo do trabalho.

De fato, em uma economia real, o razoável é que ela esteja sempre em desequilíbrio, pois o normal é estarem sempre ocorrendo perturbações (estocásticas) que tirem a economia do seu caminho, mas há forças que levam ao equilíbrio, o que não ocorre no modelo de Goodwin, onde, coeteris paribus, o sistema gravita eternamente em uma órbita à qual o equilíbrio não pertenece.

Não foi feito um trabalho econométrico. Fizemos um exercício de matemática. Usamos o trabalho de *Harvie* (2000) elaborado para testar o modelo Presa-Predador de *Goodwin* em dez países da OECD, que estimou parâmetros dessas economias e escolhemos quatro para ilustrar nossa análise. Adaptamos de forma heurística os parâmetros das economias que Harvie estimou para o modelo original de forma a poder exibir resultados do modelo alterado não apenas fictos, mas também, de alguma forma, em sintonia com parâmetros de economias reais.

Entendo que o trabalho abre perspectivas para, de posse de uma máquina de análise de uma economia reduzida à sua essência, com comportamento compatível com os fenômenos econômicos observáveis em economias reais, elaborar modelos de crescimento econômico ou de análise dos ciclos reais de uma economia em modelos mais sofisticados, onde se poderia diminuir o inevitável reducionismo macroeconômico, trazendo à modelagem outros aspectos, como multiplos setores, dotados de diferentes tecnologias, algum avanço na modelagem da formação do capital humano e alguma diversidade na mão de obra, além dos mandatórios: moeda, governo, expectativas futuras e mercado de crédito, entre outros, sem perder de vista a solidez da estrutura essencial da economia real.

O ponto central desse trabalho é discordar da natureza inatingível do equilíbrio presente no modelo de *Goodwin* (inspirado em Marx) e afirmar certa fé na existência de algo como uma mão invisível (nesse trabalho, tornada nem tão invisível assim, por meio de hipóteses comportamentais, tais como: a modelagem do jogo trabalhadores $\times$ capitalistas por meio de uma curva de Phillips do salário real, do racionale maximizador de lucros dos capitalistas e da presença de substitutibilidade de fatores no modo de produção dos humanos), apregoada por outros grandes do pensamento econômico, em particular, *Adam Smith*, embora tal polêmica econômico-filosófica não seja objeto desse trabalho, que objetiva apenas fazer umas continhas e apresentar os resultados obtidos. É meu ponto de vista pessoal, que, ao adequar o modelo para obter uma dinâmica conhecida - o modelo Presa-Predador - *Goodwin* exagera em seu mencionado pragmatismo, incorrendo no erro de inverter a ordem de trabalho do modelador, da realidade para a modelagem, priorizando seu inverso, com vistas à obtenção de um resultado conhecido, a saber o sistema *Lotka-Volterra*. Mais ou menos assim: não se pensa no tubo de vácuo para negar a existência da resistência do ar, mas para ressaltar as propriedades da força gravitacional. Há na realidade econô-

mica tanto forças que a afastam do equilíbrio como forças atratoras. A História aponta para onde o vento sopra.

Capítulo 2

O Modelo de Goodwin

2.1 Considerações Gerais

O modelo é estabelecido a partir de sete premissas:

1. progresso técnico constante
2. crescimento constante da força de trabalho
3. somente são empregados dois fatores de produção - trabalho e capital com função de produção *Leontieff,* isto é, para produzir uma unidade do produto, utiliza-se sempre a mesma proporção de cada fator de produção, no caso, trabalho e capital.[1]
4. todas as quantidades são reais e líquidas
5. todos os salários são consumidos e todos os lucros são poupados e reinvestidos
6. a razão capital / produto é constante[2]
7. a taxa de salário real é crescente na vizinhança do pleno emprego

Goodwin busca com tais premissas capturar aspectos essenciais da dinâmica capitalista, embora reconheça sua rudeza na representação da realidade.

Sejam Y - o produto total, L - o emprego total da força de trabalho, N - a oferta de trabalho, $K-$ o estoque de capital, a - a produtividade do trabalho α - a

[1] Trata-se de uma hipótese muito restritiva, pois não há substitutibilidade entre os fatores de produção. No modelo alternativo que vamos sugerir, abandonaremos tal hipótese, adotando uma função de produção CES . A função de produção CES contempla um espectro amplo de possibilidades para modelar a tecnologia, especificamente, ela permite que o parâmetro elasticidade de substituição entre fatores seja qualquer valor, parâmetro esse que será fundamental para o modelo alternativo que vamos sugerir, tendo a função Leontief (proporções fixas - ausência de substitutibilidade) e a função Cobb-Douglas (elasticidade de substituição unitária) como casos limites.

[2] cabe o comentário da nota 1.

taxa de crescimento do progresso técnico, β - a taxa de crescimento da população economicamente ativa. Dessa forma temos: $\frac{Y}{L} = a = a_0 e^{\alpha t}$, com o crescimento da população economicamente ativa dado por: $N = N_0 e^{\beta t}$. Definimos como x - a participação dos salários dos trabalhadores no produto, sendo w o salário real de um trabalhador, suposto o mesmo para todos, como é usual em modelos macroeconômicos:

$$x = \frac{wL}{Y} = \frac{w}{a}$$

Consequentemente, a participação dos capitalistas no produto é: $1 - x = 1 - \frac{w}{a}$. Multiplicando a participação dos capitalistas pelo produto obtemos a renda dos capitalistas que dividida pelo capital total dará a taxa de lucroπ :

$$\pi = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right) Y}{K} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k}$$

Onde k é a relação capital produto $k = \frac{K}{Y}$. Como o modelo assume quantidades reais e líquidas, o reinvestimento total dos lucros e uma razão capital produto constante, temos: $\frac{K}{Y} = constante \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y}$, sendo - $I(t) = \dot{K}$ o investimento, a taxa de lucro é $\frac{\dot{K}}{K}$ e portanto podemos escrever:

$$\pi = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

Aplicando logarítmo na relação da produtividade do trabalho $\frac{Y}{L} = a = a_0 e^{\alpha t}$, e, derivando em relação ao tempo obtemos: $\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha$, que implica, substituindo a expressão já obtida para $\frac{\dot{Y}}{Y}$ em: $\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - \alpha$. Definindo o nível de emprego y como a razão entre a força de trabalho empregada (L) e a população economicamente ativa (N), ($y = \frac{L}{N}$), temos que: $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - \alpha - \beta$, isto é, chegamos a uma expressão para a variação do nível de emprego dada por:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{1 - x}{k} - (\alpha + \beta) \Rightarrow \dot{y} = \{[\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)] - \frac{x}{k}\} y$$

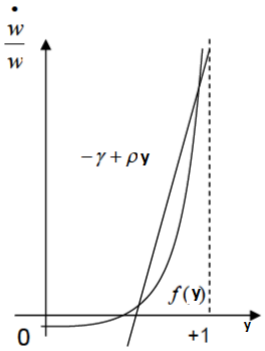
O modelo pressupõe o crescimento da taxa de variação do salário real conforme y se aproxima do pleno emprego, isto é, $\frac{\dot{w}}{w} = f(y)$, sendo f :(0,1)$\rightarrow$R com $f^{'}(y) > 0$ e $f^{''}(y) > 0$, onde o que se quer modelar é o comportamento qualitativo do sistema em construção permitindo que a taxa $\frac{\dot{w}}{w}$ se torne negativa abaixo de certo nível de equilíbrio y^* (a tendência do salário é cair com o aumento do desemprego) e acelere seu crescimento quando o nível de emprego se aproxima de 1 (pleno emprego). Goodwin trabalha com uma aproximação linear do tipo $\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho y$, com a ressalva que esta equação é aceitável num intervalo contido no $(0, 1]$ contendo y^* e não muito distante do pleno emprego ($y = 1$). Aqui já vemos uma grande limitação do modelo nessa versão com aproximação linear da referida função f.

Trata-se de uma versão linear de uma curva de Phillips para salários reais, que pode ser perfeitamente relaxada, assumindo-se uma função não linear na região de interesse. O objetivo dele aqui é chegar nas equações tradicionais de um modelo Presa-Predador cujo comportamento é bem conhecido. Procuraremos testar a versão não linear uma vez que a aproximação linear apresenta comportamentos não muito ortodoxos que exploraremos em seguida. Como $x = \frac{w}{a}$ temos que $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{w}}{w} - \alpha$. Substituindo a expressão para $\frac{\dot{w}}{w}$ já obtida temos: $\frac{\dot{x}}{x} = -(\alpha + \gamma) + \rho y$. Sob tais assunções chegamos às duas equações fundamentais do modelo de Goodwin, cujas premissas e aproximações conduziram a um modelo análogo aos sistema $Lotka - Volterra$, de comportamento bem conhecido em outros contextos, sendo x a participação dos trabalhadores na renda e y o nível de emprego.

$$\dot{x} = [-(\alpha + \gamma) + \rho y]\, x$$

$$\dot{y} = \{[\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)] - \frac{x}{k}\} y$$

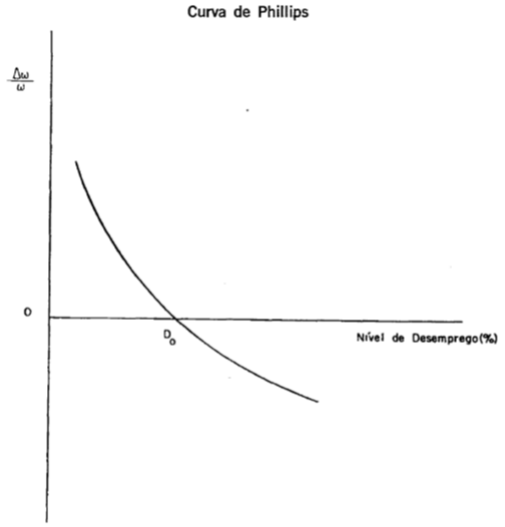
Hipótese de Goodwin de uma curva de Phillips linear para obter uma dinâmica análoga aos sistema Lotka - Volterra



Não estamos, em princípio, presos a esse intento e vamos testar variantes, como o uso de uma função não linear para a curva de Phillips do salário real (a curva f da figura). Disponho de dados para diferentes países, para os quais foram estimadas versões lineares - *Harvie, D.* (2000) - que farei uso sem maiores compromissos que não o de tentar obter um comportamento adequado às nossas premissas da dinâmica a ser modelada. Descrevo agora uma possível forma de construir a função não linear e que foi adotada no programa que simulará o comportamento do modelo trocando a versão linear da curva de Phillips (para a qual disponho de parâmetros estimados para alguns países). Em seguida vamos analisar o modelo tal como descrito nas equações análogas ao sistema Presa-Predador acima desenvolvido, com os parâmetros do contexto decorrente das hipóteses de Goodwin. Teremos portanto, já de início, duas versões a testar: com e sem a aproximação linear da curva de Phillips.

2.2 Construção da curva de *Phillips* não linear

É assunto controverso em economia, em particular, sobre o mercado de trabalho a relação entre inflação e desemprego. A discussão originou-se do já clássico artigo de *Phillips* (Econômica, 1958). Seu propósito era testar empiricamente para o Reino Unido, se a taxa de variação do salário nominal podia ser explicada pelo nível de desemprego. A evidência empírica, encontrada por Phillips, se bem que questionável, caracteriza uma relação entre variações do salário nominal e nível de desemprego como no gráfico abaixo:



Em seguida, a chamada curva de *Phillips* produziu intensa discussão entre os economistas e passou a ser apresentada trocando-se $\frac{\triangle w}{w}$ por $\frac{\triangle p}{p}$, sendo p o nível geral de preços. Assim, por meio de um processo inflacionário, poder-se-ia diminuir o desemprego numa economia. A existência de tal relação entre inflação e desemprego implica na existência de ilusão monetária por parte dos trabalhadores e tais discussões povoaram o mundo macroeconômico por décadas trazendo novos enfoques para justificar uma evidência empírica nessa direção.

Nesse trabalho não estamos interessados nessa discussão e tal existência será assumida como hipótese comportamental definidora da dinâmica do jogo entre capitalistas e trabalhadores, sendo que, no nosso mundo sem governo, não há inflação e todas as variáveis são reais, portanto, assumiremos uma relação entre $\frac{\dot{w}}{w}$, sendo w o salário real e o nível de desemprego (ou de emprego) como descrita pelo gráfico acima, o que está em sintonia com enfoques microeconomicos mais modernos que buscam fundamentar tal relação, que comentaremos brevemente no que segue, mas, para nós, tal relação é *input* (hipótese comportamental - tipo: existe a gravitação universal dada por...) do modelo.

A assunção de *Goodwin* de que *a taxa de variação do salário real aumenta na vizinhança do pleno emprego* significa a adoção de uma curva de *Phillps* do salário real e a adotaremos no modelo alternativo que vamos construir em sua versão não linear, dispensando a aproximação linear, que limita a validade do

modelo a uma vizinhança pequena do nivel de emprego de equilíbrio, que, no modelo de *Goodwin* nunca é atingido.

A existência de determinado nível de desemprego involuntário é uma realidade observável no mercado de trabalho das economias capitalistas sendo razoável perguntar por que isso ocorre, isto é, por que o nível dos salários não equilibra o mercado de trabalho num nível de pleno emprego? Para *Shapiro and Stiglitz (1984)* isso se deve à inabilidade dos empregadores (*imperfect monitoring*) para, a baixos custos, monitorarem o esforço dos trabalhadores em seu dia a dia. A intuição é simples. Sob o paradigma convencional competitivo, no qual os trabalhadores recebem o salário ofertado pelo mercado, não havendo desemprego involuntário, o pior que pode ocorrer ao trabalhador que faz corpo mole e trabalha pouco é ser demitido.

Como, por hipótese, ele é imediatamente recontratado, não há punição ao seu jeito displicente de ser, ou seja, com monitoramente imperfeito dos trabalhadores por parte das empresas e pleno emprego, ser displicente é uma decisão natural para os trabalhadores. Para induzí-los a um comportamento diverso, as firmas pagam um salário maior que esse nível de equilíbrio, de forma que um trabalhador que seja demitido, por ser "relaxado", sofra uma "punição". Ocorre que, se uma firma paga salários maiores as outras também pagam. A situação em que todas as firmas passam a pagar um salário mais alto, destruiria, em tese, o "incentivo" à não displicência por parte dos trabalhadores. Contudo, a adoção pelas firmas de um salário superior reduz a quantidade agregada de trabalho demandada, levando o mercado a se equilibrar num nível com desemprego.

Dessa forma, com desemprego, ainda que todas as firmas paguem o mesmo salário, o trabalhador que for demitido ficará um tempo desempregado, portanto o mercado forma seu equilíbrio num nivel de desemprego suficientemente grande para criar os incentivos a que os trabalhadores não sejam "displicentes". Isso explicaria o equilíbrio com desemprego. Por óbvio tal modelo é muito simples, mas captura o fato de que, objetivamente, toda economia capitalista encontra seu equilíbrio no mercado de trabalho abaixo do pleno emprego.

Não é nosso interesse nesse trabalho construirmos uma fundamentação microeconômica da existência de uma curva de *Phillips* do salário real (algo que, como já comentado, se observa empiricamente). Partiremos do pressuposto de que uma relação não linear entre a taxa de variação do salário real e o nível de emprego existe e possui as características clássicas de uma curva de Phillips. Também não temos interesse em estimar econometricamente, para determinado país, uma tal função nesse trabalho.

Partiremos de estimativas efetuadas para alguns países (as que dispomos foram estimativas da aproximação linear) e contruiremos tais funções de forma relativamente arbitrária, assumindo um formato de uma curva aproximadamente constante e negativa abaixo do pleno emprego, com crescimento não linear cada vez mais acentuado ao se aproximar desse nível, buscando o infinito de forma assintótica à reta vertical no nível de pleno emprego no plano *nível de emprego* (y) *versus taxa de variação do salário* $(\frac{\dot{w}}{w})$.

Veremos que o comportamento qualitativo do sistema é preservado para di-

ferentes escolhas na construção de tal função $\left(\frac{\dot{w}}{w} = g(y)\right)$. Em nossa análise do comportamento do modelo de Goodwin clássico, observaremos o efeito de simplesmente introduzir a curva de Phillips não linear. Respaldados pelos resultados que obtivemos e que exibiremos no que segue, no modelo alternativo que vamos construir, adotaremos tal versão não linear e estudaremos com detalhe a dinâmica do novo sistema. Aqui, isto é, sem maiores modificações no modelo Presa-Predador de Goodwin, nos limitaremos a observar o efeito no modelo original da adoção dessa versão, pois, como já foi dito, juntamente com outras modificações, chegaremos a um modelo que nos parece extremamente mais adequado para modelar a dinâmica essencial de uma economia real. Entendi não ser necessário aprofundar a análise num sistema dinâmico que, ja me convenci, pode ser melhorado. Descreveremos em seguida o procedimento adotado nessa etapa em que alteraremos o modelo de Goodwin apenas pelo abandono da aproximação linear. De fato, o modelo fica mais interessante, mas ainda apresenta uma tendência a sair do seu domínio de consistência, o que não mais ocorrerá com a introdução de novas hipóteses, em troca do abandono de certas premissas como veremos mais adiante.

O modelo com curva de Phillips não linear, que vamos testar, manterá a equação original do nível de emprego y e trocará a equação da participação dos trabalhadores na renda x pela equação que relaciona x com w, isto é, $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{w}}{w} - \alpha$, onde especificaremos a função f não linear tal que $\frac{\dot{x}}{x} = f(y)$ a partir de uma função linear $\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho y$ isto é $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{w}}{w} - \alpha = -(\alpha+\gamma) + \rho y$, para a qual dispomos de estimativas para alguns países (*Harvie*). Estamos portanto fazendo o "*caminho inverso*", isto é: obtendo f a partir da estimativa de uma função linear que, em tese, lhe aproxima, num intervalo que contém o nível de equilíbrio à esquerda do nível de pleno emprego, e teremos como equação da dinâmica de x a equação $\frac{\dot{x}}{x} = f(y)$. Procederemos como segue:

1. Temos uma reta representada pela função $l(y) = -(\alpha+\gamma) + \rho y$. Queremos uma função f definida tal que temos *f:* (0,1]$\rightarrow \mathbb{R}$ com:

   $$f(0) < 0;\ f'(y) > 0;\ f''(y) > 0\, e\, f(y) = 0 \Rightarrow y_1 < y < 1,$$

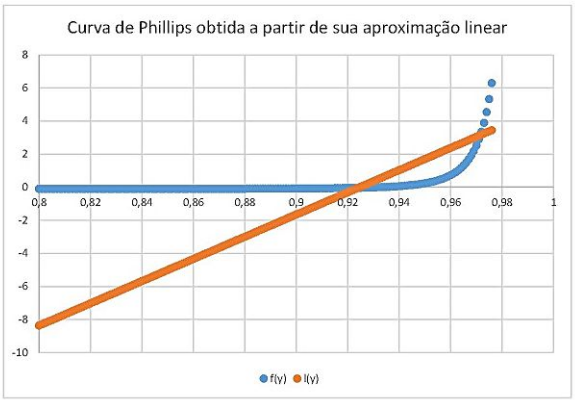
   (ou seja, a função f se anula à direita do ponto (y_1), onde se anula a função linear l), sendo $l(y_1) = 0$ ou seja: $y_1 = \frac{\alpha+\gamma}{\rho}$. Note-se que isso foi uma escolha arbitrária para desenhar a curva a partir da função linear. Poderíamos perfeitamente ter feito o inverso. Só poderíamos saber uma forma mais adequada de desenhar a função com um estudo econométrico especifíco para estimar uma f não linear. Nesse trabalho não estamos interessados nessa tarefa, que será indispensável quando quisermos estudar uma economia específica com nosso modelo.

2. Façamos $f(y) = -c_1 + \frac{c_2}{(1-y)^m}$, onde fizemos m=4 de forma arbitrária.

3. Arbitramos c_1 e calculamos c_2 de forma a fazer $f(y_2) = 0$ onde $y_2 = y_1 + \frac{1-y_1}{n}$, a saber $c_2 = c_1 (1-y_2)^m = c_1 \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right)\right]^m$

4. Disporemos, pois, para cada país de uma função $f(y|c_1, m, n)$, heuristicamente determinada. A figura abaixo ilustra o procedimento adotado num caso particular (Noruega no trabalho de Harvie).

$$f(y) = c_1 \left\{ \left[\frac{(1-y_2)}{(1-y)} \right]^m - 1 \right\}$$



observe-se que dispomos de uma estimativa da função linear (afim) que faz sentido numa vizinhança do nível de equilíbrio e construímos uma função não linear com formato que segue as hipóteses clássicas para uma curva de Phillips que descrevemos acima. O comportamento qualitativo do sistema (nosso objeto de análise nesse trabalho) não é alterado por diferentes escolhas para essa construção, por óbvio, obedecendo às hipóteses consideradas para a curva de *Phillips*. Testamos isso no modelo alternativo que construiremos mais a frente, quando variamos a forma de obter f , mas obedecendo sempre às hipóteses assumidas para a curva de *Phillips*, que lhe dá o formato acima exibido.

Abaixo exibimos as estimativas de curva de *Phillips* obtidas a partir do estudo de *Harvie* para dez países da OECD, dos quais escolhemos quatro. É importante observar que: No que diz respeito ao modelo linear, a função só faz sentido próxima ao ponto de equilíbrio, isto é, $[y_1 - \delta,\ y_1 + \delta]$ e, pelos resultados que obtivemos, esse próximo é muito próximo mesmo, fora dessa vizinhança do equilíbrio o modelo sai do seu domínio de consistência, isto é, o quadrado $(0,1) \times (0,1)$ para x e y. De qualquer forma, f está definida no (0,1) por completude, já que para um nivel de emprego abaixo de 60%, por exemplo, já não teríamos uma economia e seria necessário modelar uma situação de calamidade pública, guerra ou barbárie. A modelagem que estamos fazendo não é adequada para calibrar uma economia real abaixo de um nível de emprego de 80%. O modelo Presa-Predador de Goodwin, como veremos, não se presta pra modelar ciclos econômicos com perturbações acima de dois pontos percentuais do equilíbrio. O modelo que iremos propor vai mais longe, mas também não é adequado para modelar situações de calamidade pública.

O gráfico abaixo foi desenhado no intervalo [0.70, 1) não apenas por razões de escala. Convém lembrar que esse é o intervalo onde tal função faz sentido

e onde operam as economias reais. Como veremos mais a frente, a dinâmica qualitativa do modelo é a mesma em todas as economias que parametrizamos, mas a intensidade da natureza oscilatória e a velocidade de convergência para o equilíbrio vão variar significativamente de uma Noruega para uma Itália, que dizer para uma Venezuela (da qual não temos dados).

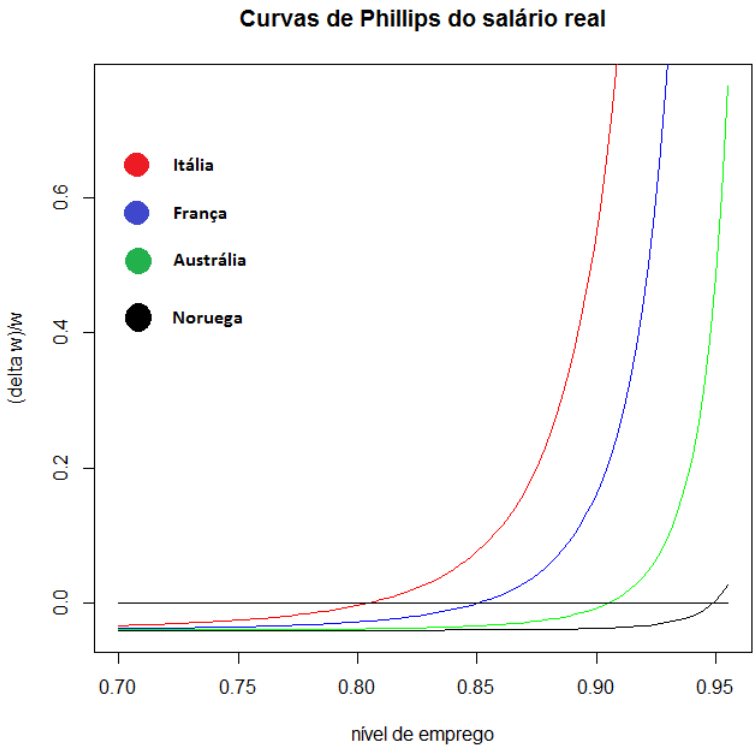
Essas curvas, parametrizadas a partir de estimativas empíricas dos países em tela, estão refletindo um mundo de fatores, que vão desde a "instituição" Mercado de Trabalho (The Labor market as a Social Institution - Solow 1990), à "instituição" Sistema Educacional, passando pela "instituição" Sistema Tributário entre centenas de fatores histórico culturais que caracterizam uma sociedade e vão se refletir nas curvas abaixo que, no nosso contexto são *inputs*, isto é, hipóteses comportamentais do jogo entre trabalhadores e capitalistas, que estamos assumindo como dados empíricos que condicionarão o sistema dinâmico modelado para cada economia.

Cabe no estudo de uma política de desenvolvimento para uma dada economia identificar os fatores institucionais que levam a uma curva como a da Noruega, por exemplo. Juntamente com fatores que modelam a capacidade de substituir fatores de produção e as características da tecnologia existente (modeladas pela função de produção agregada), entre outros, a dinâmica de convergência para o equilíbrio será dada de forma acentuadamente distinta na natureza oscilatória das órbitas envolvidas e na velocidade de convergência rumo ao equilíbrio, como ficará claro quando submetermos essas economias à análise no contexto do modelo modificado.

Esse trabalho objetiva apenas clarear essa dinâmica, não tratamos da questão de porque a curva de um país difere daquela de outro como observamos abaixo. Para nós, o mundo a ser modelado é esse e isso é tão somente uma hipótese comportamental. É fato que não inventamos tais parâmetros, os obtivemos com base numa estimativa econométrica que supõe uma linearidade improvável no mundo real, que adaptamos com o engenho e arte de quem modela, mas esses aspectos fogem ao foco desse trabalho. Essa seção poderia ser resumida à seguinte frase: Suponha que a taxa de variação do salário real dos trabalhadores varia em função do nível de emprego da economia de acordo com as funções abaixo especificadas para os casos das economias A, B, C e D. O que *Phillips* e os modeladores macroeconomistas (*Goodwin* entre eles) seus contemporâneos fizeram não foi muito diferente disso. Hoje, há uma tentativa de buscar os fundamentos microeconômicos dessas hipóteses comportamentais, da mesma forma que os físicos tentam explicar a lei da gravitação universal suposta (ou constatada) por Newton no século XVII, mas não tratamos disso nesse trabalho. Tal como o IDH, seria possível criar um ICP (Índice Curva de *Phillips*), que estabelecesse um ranking entre os países, considerando fatores como, nível de emprego de equilíbrio formado pela "instituição" mercado de trabalho, seja lá o que isso signifique, velocidade da percepção por parte dos trabalhadores (empregados) em admitir perdas salariais quando o mundo está ruim (desemprego alto), *mutatis mutantis*, percepção dos capitalistas da necessidade de permitir a conquista de uma fatia maior do bolo para os trabalhadores em prol do crescimento econômico, enfim, percepção pela sociedade de que o jogo entre capital

e trabalho tem mais de complementaridade do que de antagonismo (não vemos trabalhadores da *Google* fazendo greve, nem sendo demitidos, como nas linhas de montagem das indústrias Tayloristas, mas vemos dirigentes da Google garimpando cabeças em competição com seus rivais capitalistas). Mensurando tais aspectos, seria certamente possível construir uma ordem $\succeq$ que estabeleceria um ranking entre os diversos países, de forma que seria possível afirmar, segundo o ICP, que:

$$ICP_{Noruega} \succeq ICP_{Austrália} \succeq ICP_{França} \succeq ICP_{Itália}$$



Por óbvio, nem tudo na vida é ICP, e não dá para ser feliz sem um Petit Gateau francês nem sem um Gelato italiano. Veremos que as diferenças nas funções determinarão diferentes intensidades na natureza oscilatória e na velocidade da convergência ao equilíbrio no modelo alternativo.

2.3 Análise do modelo de Goodwin com aproximação linear da curva de *Phillips*

Incialmente determinemos os pontos críticos do sistema, isto é, $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ que seja solução de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Além da solução trivial $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ obtemos:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - k(\alpha + \beta) \\ \frac{\alpha+\gamma}{\rho} \end{pmatrix}$$

Notemos que estamos interessados em modelar algo com algum sentido econômico, portanto, devemos impor algumas condições às nossas varíáveis bem como aos nossos parâmetros. De início devemos impor $x > 0$, isto é, a a participação dos trabalhadores na renda nacional deve ser positiva, portanto, aplicando esse fato a x^* obtemos $1 - k(\alpha + \beta) > 0 \Rightarrow \alpha + \beta < \frac{1}{k}$, ou seja, a soma da taxa de crescimento da produtividade e da taxa de crescimento da oferta de trabalho deve ser menor que a relação produto/capital. Fazendo $X = x - x^*$ e $Y = y - y^*$ obtemos:

$$\dot{X} = \dot{x} = \rho Y [X + 1 - k(\alpha + \beta)]$$

$$\dot{Y} = \dot{y} = -X[Y + y^*] = -\frac{X}{k}\left[Y + \frac{(\alpha + \gamma)}{\rho}\right]$$

Portanto numa vizinhança de $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ temos a aproximação linear em torno da origem do Plano (X, Y)

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho(1 - k(\alpha + \beta)) \\ -\frac{(\alpha+\gamma)}{\rho k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

cujo polinômio característico da matriz A é $\lambda^2 + \Delta$, onde $\Delta = \frac{(\alpha+\gamma)}{\rho k}\rho(1 - k(\alpha + \beta)) = (\alpha + \gamma)\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)\right)$. Matematicamente, poderíamos distinguir entre 3 possibilidades qualitativamente distintas em função de Δ. Entretanto, como o crescimento da produtividade (α) é positivo assim como o parâmetro γ, uma vez que estabelecemos que $\alpha + \beta < \frac{1}{k}$, economicamente (restringindo o espaço de parâmetros à região onde nosso modelo faz sentido econômico), devemos ter $\Delta > 0$. Temos portanto autovalores complexos puros, que nos asseguram infinitas órbitas circulares fechadas no plano xy, centradas no equilíbrio (x^*, y^*) com período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$, isto é:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\alpha + \gamma)\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)\right)}}$$

Em tese não podemos garantir órbitas fechadas do sistema original não linear, contudo, o sistema de Goodwin é exatamente integrável e, partindo das

equações originais de $\dot{x}$ e $\dot{y}$, dividindo-as e eliminado o tempo obtemos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[-(\alpha+\gamma)+\rho y]x}{\{[\frac{1}{k}-(\alpha+\beta)]-\frac{x}{k}\}y},$$

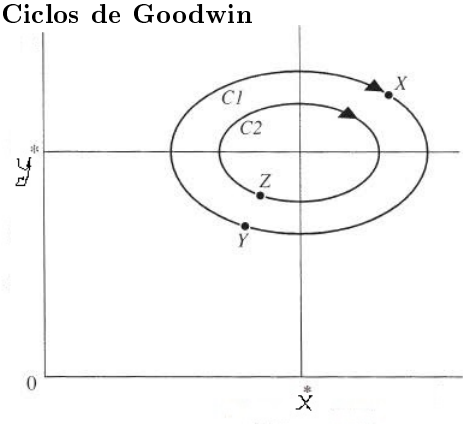
que é separável, logo:

$$\int \{[\frac{1}{k}-(\alpha+\beta)]-\frac{x}{k}\}\frac{dx}{x} = \int [-(\alpha+\gamma)+\rho y]\frac{dy}{y}$$

$$[\frac{1}{k}-(\alpha+\beta)]log(x)+(\alpha+\gamma)log(y)-\frac{x}{k}-\rho y] = cte$$

Pode-se mostrar que as curvas de nível da função F(x,y) definida pelo lado esquerdo da equação acima são curvas fechadas[3], dessa forma, cada condição inicial produz uma solução periódica com amplitude e período dados por tal estado inicial. O sistema é dito estruturalmente instável: modelos matemáticos que definem campos vetoriais "próximos" do modelo de Goodwin podem não ter órbitas fechadas, mas não estamos interessados em entrar nessa análise no presente trabalho.

Ciclos de Goodwin



No modelo de Goodwin, a participação dos trabalhadores no produto (x) é análoga à densidade populacional dos predadores, enquanto o nível de emprego desempenha o papel das presas no modelo Presa-Predador clássico. Isso pode ser percebido zerando as variáveis de estado do modelo. Quando fazemos $x = 0$ obtemos $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} > 0$, ou seja, x permanecerá zero e y crescerá exponencialmente. Quando zeramos y obtemos $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} = 0$, isto é, y continua zero e x diminui, portanto x é predador e y é presa no modelo referência de $Lotka - Volterra$. Solow, R. (1990) oferece duas interpretações alternativas. Primeira: trabalhadores, identificados com a taxa de emprego, são os predadores, capitalistas, identificados com com a parcela de lucros no produto, $1 - x$, são as presas.

[3] Gandolfo (1997)

A dinâmica do modelo descreveria o seguinte: Altos lucros a população "*Presa*" aumenta os investimentos o que "*alimenta*" o emprego - a população "*Predadora*" - *mutatis mutantis*, lucros baixos - a população "*Presa*" reduz o investimento contraindo o emprego - a população "*Predadora*". Numa segunda interpretação teríamos: o coração da dinâmica se dá entre trabalhadores empregados, identificados com x e trabalhadores desempregados identificados com y. Nessa segunda interpretação os capitalistas são meros expectadores passivos que observam os trabalhadores se acertarem enquanto presas e predadores. Aqui a parcela empregada da classe trabalhadora são os predadores e a galera desempregada representa as presas (Solow, 1990). Deixando de lado as preferências interpretativas, vejamos a dinâmica como se dá entre as variáveis endógenas x e y.

Quando $x > x^*$e $y > y^*$, sendo alto o nível de emprego, é baixo o desemprego, o trabalho (trabalhador empregado) está numa posição de força para pleitear aumento dos salários, causando um aumento na participação do trabalho na renda total, que por sua vez, fará diminuir o lucro levando a uma redução do investimento que, conjuntamente com o crescimento da produtividade e da força de trabalho, levará o nivel de emprego na direção de valores abaixo do nível de equilíbrio, fortalecendo o poder dos capitalistas de aumentar seus lucros, reduzindo a parcela dos trabalhadores na renda total, trazendo o retorno da propensão dos capitalistas a investir, levando novamente o nível de emprego para valores acima do nível de equilíbrio, pendendo novamente o poder na barganha para os trabalhadores empregados e recomeçando o ciclo.

Harvie caracteriza o modelo como possuindo *estabilidade neutra:* é estável mas não é assintoticamente estável. Dado o ponto de equilíbrio (x^*, y^*), a trajetória descrita dependerá unicamente da condição inicial. Se a trajetória for perturbada (por um choque estocástico, digamos), não há forças que conduzam à trajetória inicial, ou a outra qualquer, as variáveis seguirão o curso do novo ciclo como ilustrado na figura "**Ciclos de Goodwin**" acima.

Assumindo que a trajetória inicial é a descrita pelo ciclo C1, suponhamos que num determinado ponto Y, o sistema é submetido a um choque qualquer (externo ao modelo, que não prevê choques nas variáveis, por se tratar de um modelo determinístico) que move a economia para o ponto Z. A tal *estabilidade neutra* significa que a partir dai o sistema descreverá a órbita C2 até uma eventual nova perturbação. O modelo captura a dinâmica da interação entre participação dos trabalhadores na renda e nível de emprego, e identifica teoricamente seus níveis de equilíbrio x^*e y^*respectivamente, bem como o período do ciclo T, que varia, dependendo da condição inicial. Entretanto não dá pista para determinarmos a amplitude do ciclo e seu "ponto inicial". Essa *instabilidade estrutural* será analisada com mais detalhe em seção própria. Exibiremos a seguir os resultados numéricos de simulações efetuadas para alguns países, identificados por uma tabela de parâmetros, exibindo resultados para algumas opções de condições iniciais. As curvas de *Phillips* foram geradas a partir de suas estimativas lineares.

Tomarei a liberdade de construir uma tabela de parâmetros com base no trabalho de *Harvie, D.* (2000).

Capítulo 3

Resultados numéricos

A Tabela abaixo foi extraída do trabalho de Harvie, D. (2000) em estudo para 10 países da OECD dos quais selecionamos quatro para nosso trabalho.

	γ	α	β	ρ	k
Austrália	62.36	0.017	0.0226	67.10	2.5
França	54.85	0.0364	0.0076	62.01	1.8
Itália	71.24	.0460	0.005	81.97	3.4
Noruega	118.07	0.026	0.0134	122.43	3.7

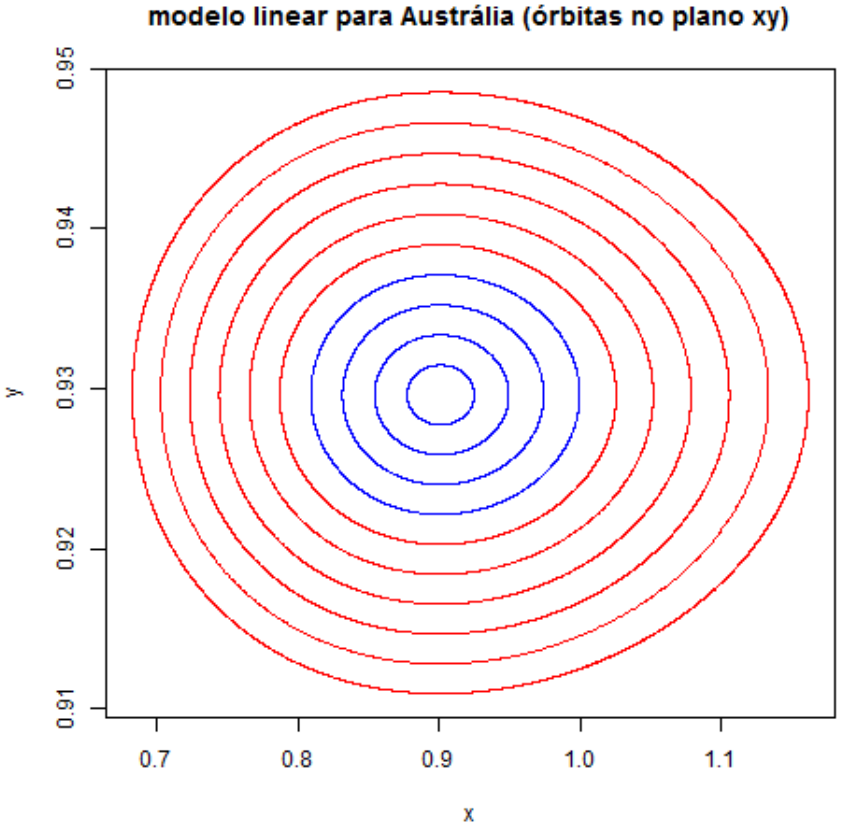
3.1 Gráficos por país

Foram simuladas as dinâmicas de x e y para os quatro países com perturbações do equilíbrio gerando as condições iniciais num total de 10, a saber: o = 1: 0.98 (x^*, y^*); o = 2: 0.982(x^*, y^*); o = 3: 0.984(x^*, y^*) . . . o = 10: 0.998(x^*, y^*). Exibimos as 10 órbitas no plano xy e a órbita de número 1, bem como a órbita de maior perturbação ainda com x e y circunscritos ao quadrado (0,1)x(0,1). Notemos que estamos lidando com uma vizinhança bem restrita do ponto de equilíbrio teórico (inferiores a 2 pontos percentuais), pois é o que tal modelo permite. Fora disso, o modelo, em seu formato original, simplesmente não funciona. Sua dinâmica leva as variáveis endógenas, da forma como as definimos, a valores sem sentido algum, como um nível de emprego maior do que 1 ou uma participação dos trabalhadores na renda total também superior à unidade. No modelo alternativo que apresentaremos em seguida eliminamos tais inconsistências.

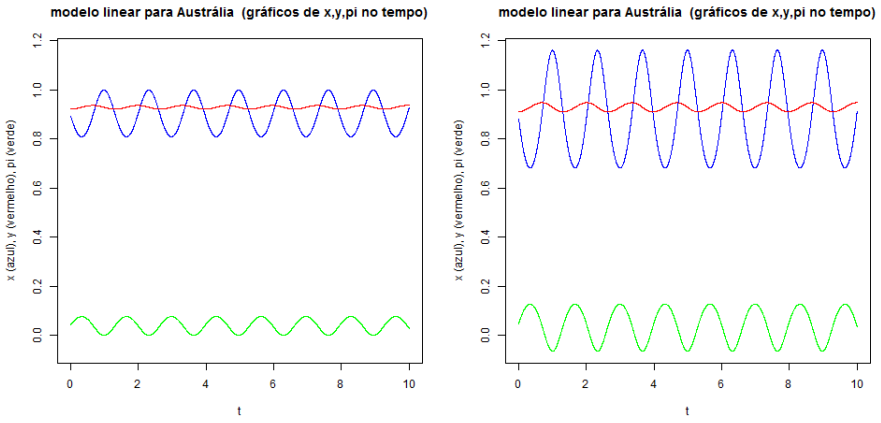
Austrália

Modelo com a curva de *Phillips* linear

Órbitas para 10 condições iniciais perturbando o ponto de equilíbrio. Além do próprio ponto de equilíbrio, apenas quatro das órbitas definidas pelas menores perturbações se situam no domínio de consistência do modelo, isto é, x e y em (0,1].



Evolução no tempo das variáveis endógenas $x, y\, e\, \pi$ - órbitas 7 e 1.

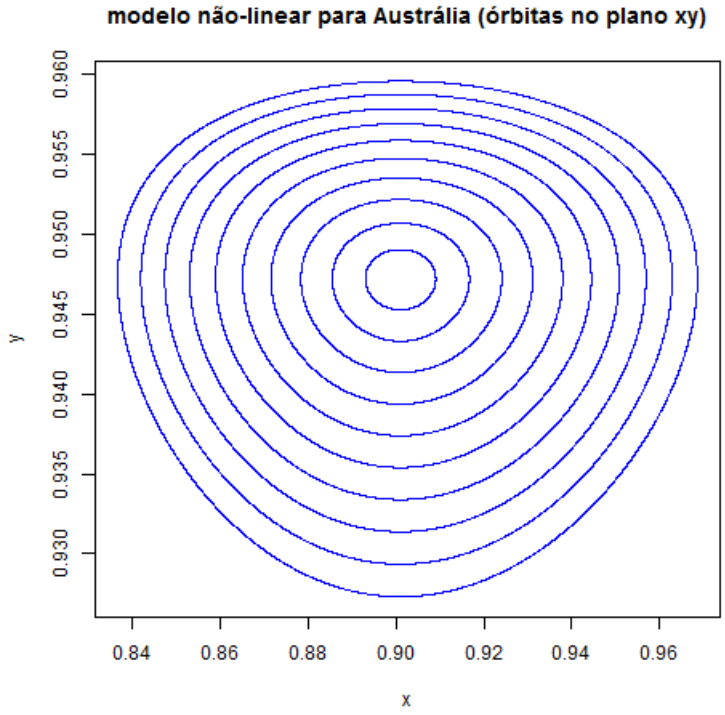


Note-se que a taxa de lucro $\frac{(1-x)}{k}$ fica negativa quando x ultrapassa a unidade. Com a hipótese de que todos os lucros são reinvestidos, esse fato gera investimentos negativos e é uma das inconsistências do modelo de Goodwin. O ponto aqui é o seguinte: Se a taxa de retorno é negativa, o Capitalista vai destruir uma parcela do seu Capital (investimento negativo) do mesmo ou zerará seu investimento?

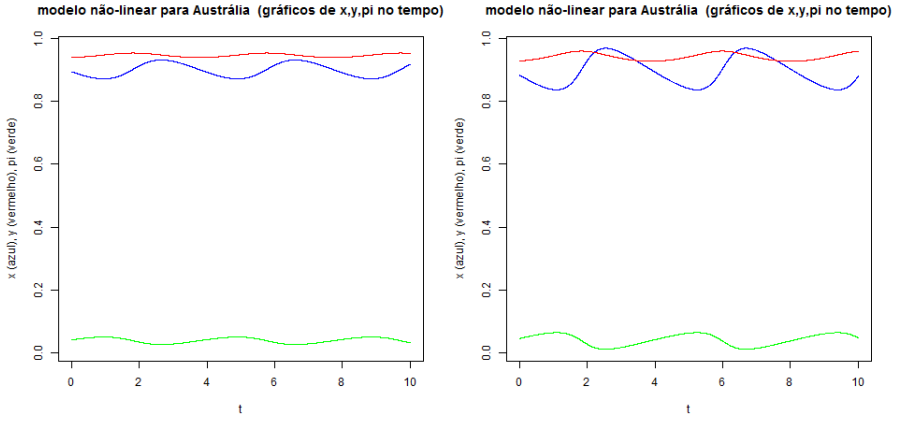
Cenas do próximo Capítulo são as seguintes: Dotados de um comportamento maximizador, os Capitalistas não mais sairão queimando seu estoque de Capital, por óbvio, na falta de opção melhor, zeram seus investimentos. Trataremos disso na seção seguinte, que trata da es(ins)tabilidade estrutural do modelo de Goddwin e também teremos uma seção onde um modelo alternativo será apresentado, introduzindo um comportamento maximizador de lucro nas decisões dos capitalistas, dando alguma racionalidade (há quem discorde) à ação dos mesmos. A adoção da curva de *Phillips* não linear melhorará o modelo, mas é remédio **apenas** para perturbações muito **próximas** ao **equilíbrio**. Ela freia a explosão de y, mas não impede que x ultrapasse a unidade.

Modelo com a curva de *Phillips* não linear

Perturbando o ponto de equilíbrio como combinamos acima, todas as órbitas se situam no domínio de consistência do modelo.

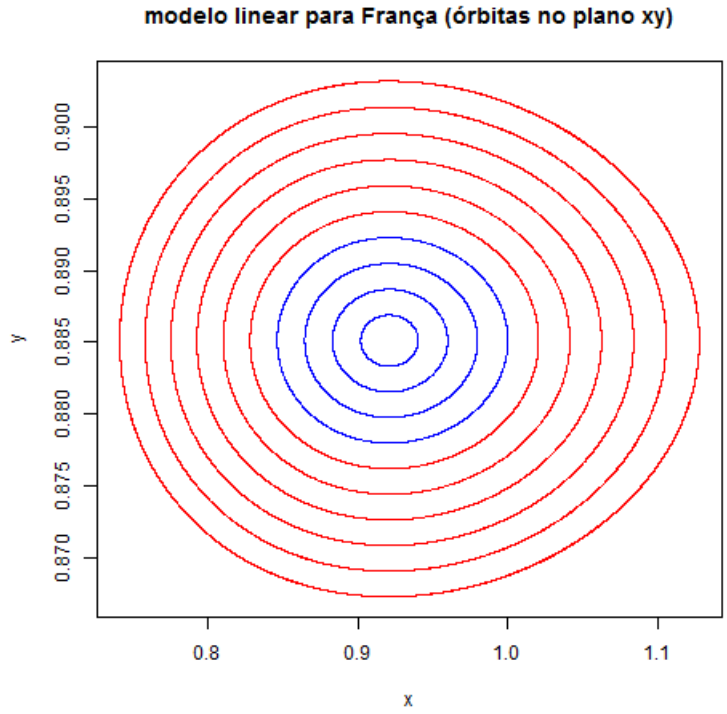


Evolução no tempo das variáveis endógenas x, y e π - órbitas 7 e 1.

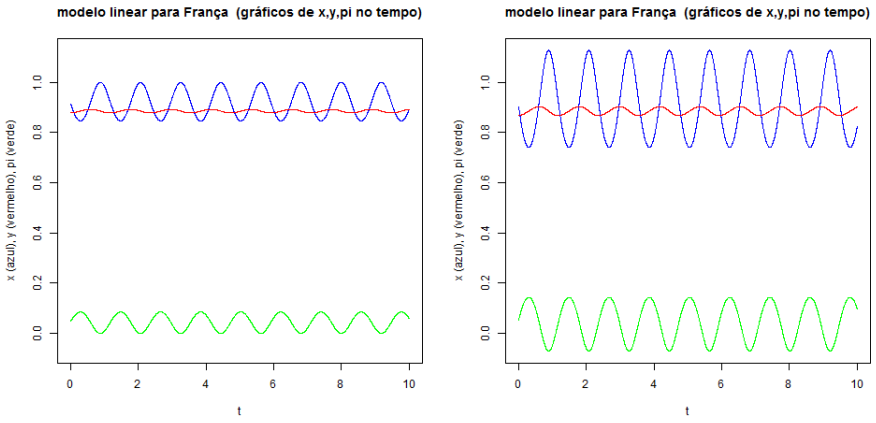


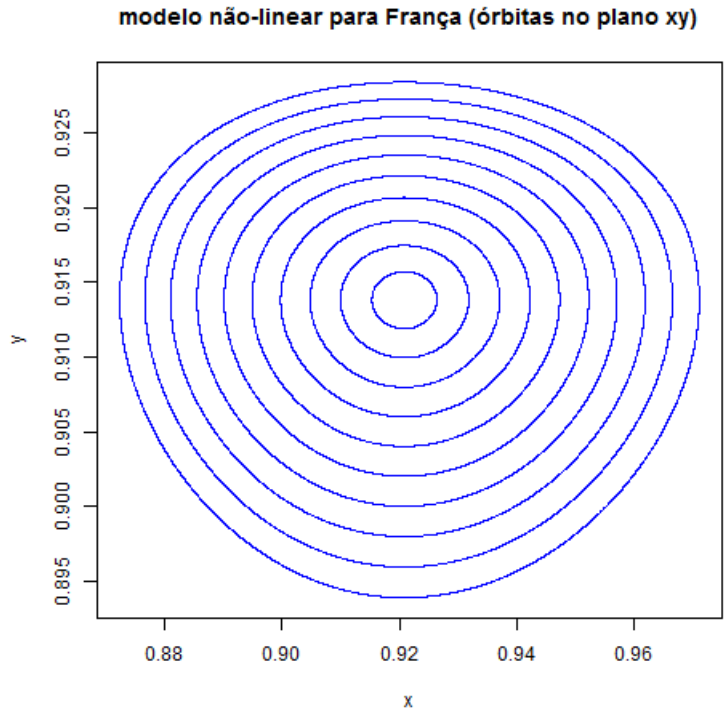
França

Órbitas para 10 condições iniciais perturbando o ponto de equilíbrio. Além do próprio ponto de equilíbrio, apenas quatro das órbitas definidas pelas menores perturbações se situa no domínio de consistência do modelo, isto é, x e y em (0,1].



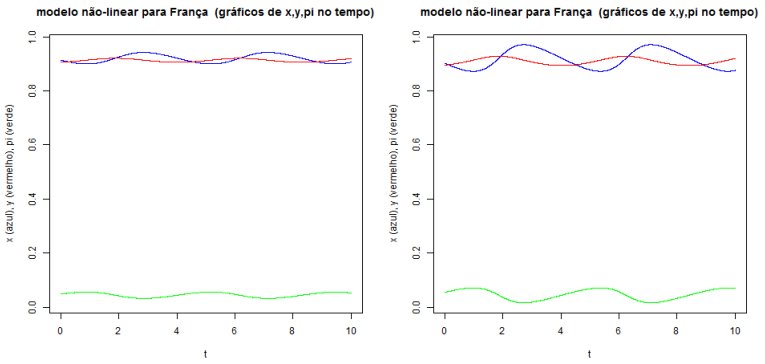
Órbitas 7 e 1:





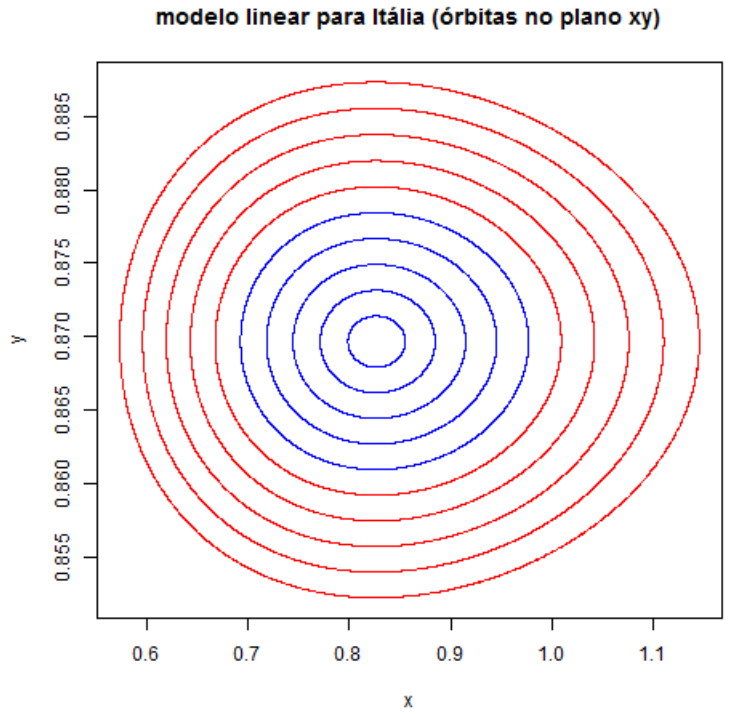
Perturbando o ponto de equilíbrio como combinado, todas as órbitas se situam no domínio de consistência do modelo.

Órbitas 7 e 1:



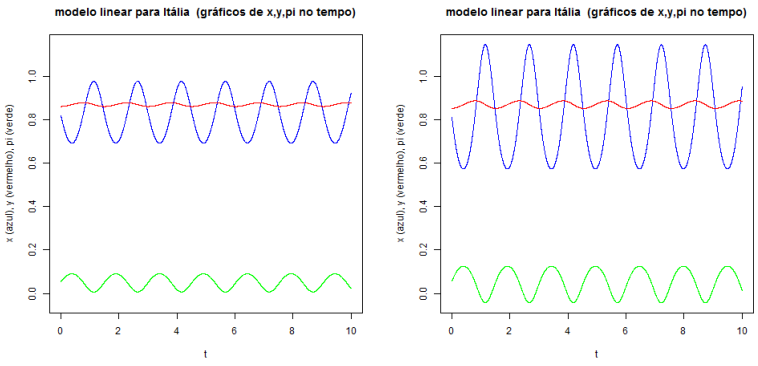
Itália

Órbitas para 10 condições iniciais perturbando o ponto de equilíbrio. Além do próprio ponto de equilíbrio, apenas cinco das órbitas definidas pelas menores perturbações se situam no domínio de consistência do modelo, isto é, x e y em (0,1].



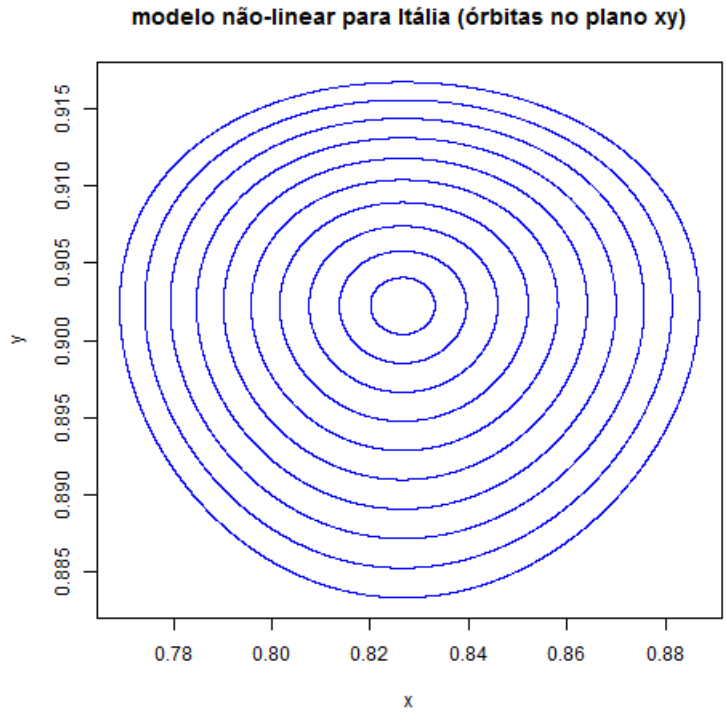
Órbitas 6 e 1:

.



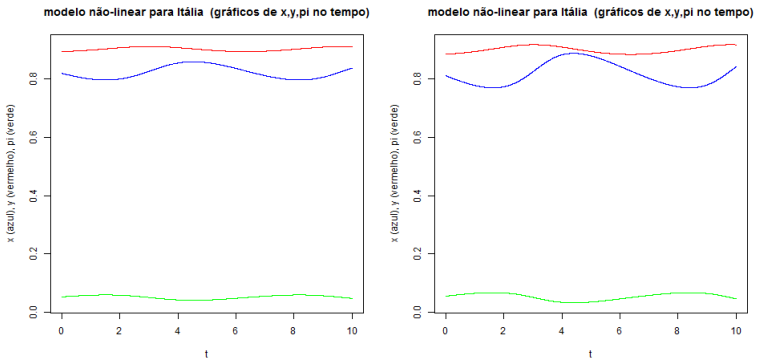
.

Novamente, vemos a taxa de juros ficar negativa e o modelo capturar um desinvestimento no sistema.



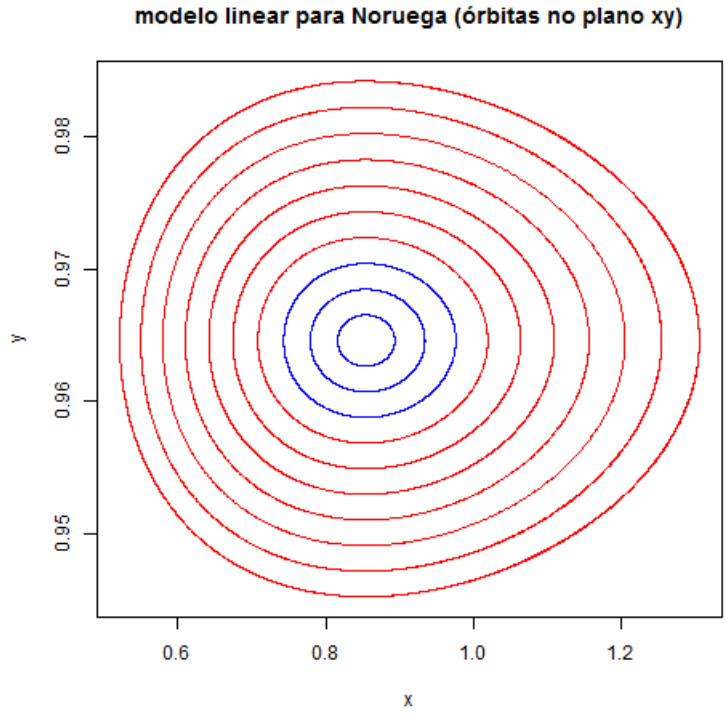
Perturbando o ponto de equilíbrio como combinado, todas as órbitas se situam no domínio de consistência do modelo.

Órbitas 6 e 1:

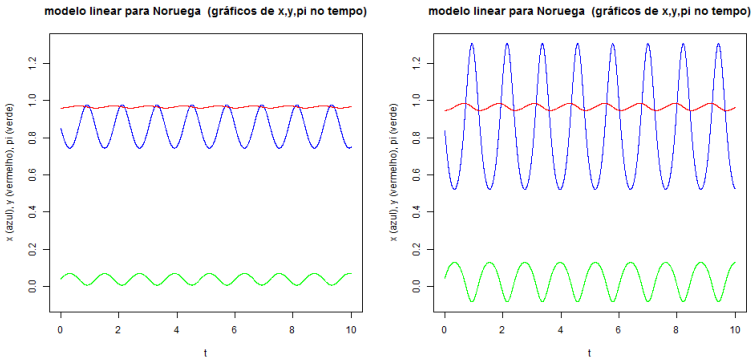


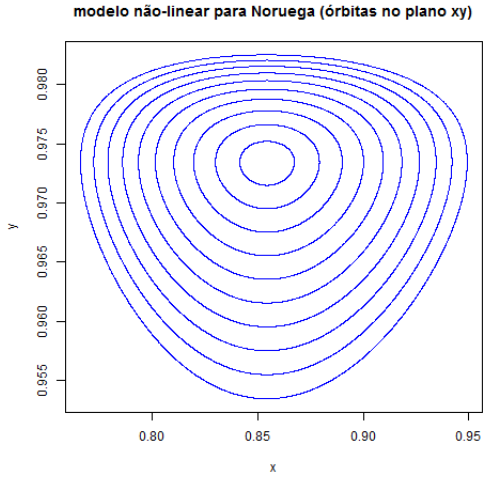
Noruega

Órbitas para 10 condições iniciais perturbando o ponto de equilíbrio. Além do próprio ponto de equilíbrio, apenas três das órbitas definidas pelas menores perturbações se situam no domínio de consistência do modelo, isto é, x e y em (0,1].



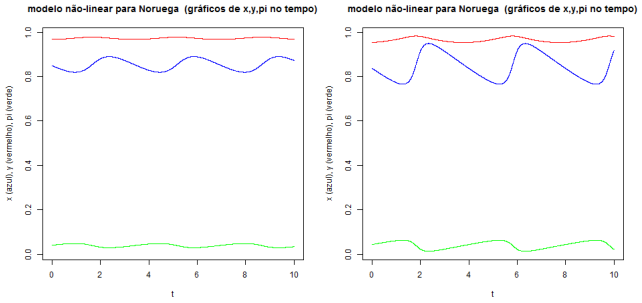
Órbitas 8 e 1:





Perturbando o ponto de equilíbrio como combinado, todas as órbitas se situam no domínio de consistência do modelo.

Órbitas 8 e 1:



3.2 Análise dos resultados

Há uma melhora na adequação do modelo com a adoção da curva de *Phillips* não linear e, efetivamente, não consigo ver vantagem alguma na adoção da aproximação linear. Em qualquer hipótese, o modelo é adequado apenas para pequenas perturbações do ponto de equilíbrio, quando, aparentemente, captura uma dinâmica que os dados empíricos podem, qualitativamente, perfeitamente sancionar, supondo perturbações oriundas de choques externos, que nosso modelo não contempla. Uma mudança mais substancial ficará para a próxima seção, quando abandonaremos algumas hipóteses do modelo original que será analisado sob *Framework* mais geral.

Capítulo 4

Instabilidade - Bases para um modelo alternativo

4.1 Uma nota sobre a representação da tecnologia

Funções de produção

Há diversas formas de representar uma tecnologia, a mais simples e comum sendo representá-la por meio de uma função de produção.

Uma firma gera produtos a partir de diversas combinações de insumos ou fatores de produção. Para estudar as escolhas de uma firma precisamos sumarizar suas possibilidades de produção, isto é, as combinações de fatores e produtos tecnologicamente factíveis. Nem sempre uma função de produção é a forma mais adequada de fazer isso. No nosso contexto, estamos trabalhando com uma firma fictícia, isto é, uma economia. Na ótica macroeconomica, um modelo típico de crescimento parte de uma função de produção agregada da forma $Y = f(K, L, t)$, onde Y indica o produto real, K o estoque de capital, L a força de trabalho e t o tempo. Esta última variável descreve a evolução da função de produção pelo progresso tecnológico. Presume-se que Y seja função crescente, ou pelo menos não decrescente de suas três variáveis, já que o capital e o trabalho contribuem para a produção, e já que objetivo da engenharia é melhorar a produtividade dos fatores existentes. Os recursos naturais consideram-se embutidos no estoque de capital, admitindo-se que a função $f(K, L, t)$ seja homogênea de grau 1 em K e L, isto é:

$$f(\lambda K, \lambda L, t) = \lambda f(K, L, t) \qquad \forall \lambda \geq 0$$

Até que ponto é adequado tratar de problemas de crescimento apelando para a ficção de uma economia com um só produto (na macro esse produto é o PIB, em si, também uma ficção), eis uma objeção digna de nota, mas que não tentaremos responder, nos curvando à tradição macroeconômica de olhar a floresta sem

querer identificar cada uma de suas árvores e o modelo que este trabalho tem por objetivo estudar não foge a tal metodologia o que, sem dúvida alguma, limita o universo ao qual tal tipo de modelagem é aplicável e, por consequência, o tipo de conclusões que se pode tirar dos resultados obtidos. Voltemos às funções de produção.

Podemos definir uma função de produção como:

$$f(x) = \{Y \in \mathbb{R} : \quad Y \textit{ é o produto máximo associado ao vetor de fatores } x\}$$

onde o vetor de fatores x pertence ao conjunto das combinações factíveis de fatores.

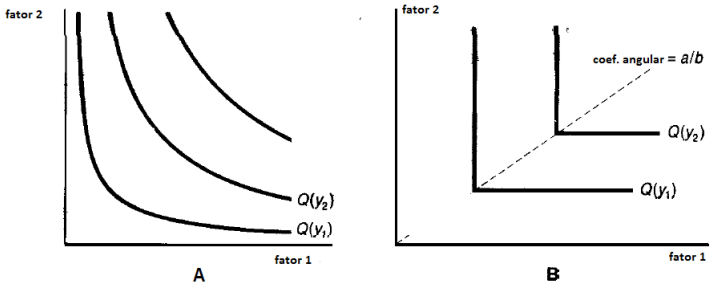
Sendo a um parâmetro tal que $0 < a < 1$ uma tecnologia ***Cobb-Douglas*** é representada pela função de produção:

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{(1-a)}$$

Sendo $a > 0$ e $b > 0$ parâmetros, uma tecnologia ***Leontief*** é representada pela função de produção

$$f(x_1, x_2) = min(ax_1,\, bx_2)$$

Sendo $Q(y_1)$ e $Q(y_2)$ as curvas de nível da função f associadas aos níveis de produção y_1 e y_2 (isoquantas) o formato geral representativo das tecnologias *Cobb-Douglas* e *Leontief* é dado pelos esquemas A e B abaixo:



A taxa técnica de substituição (TTS)

Suponha que temos uma tecnologia sumarizada por uma função de produção diferenciável e que estejamos produzindo em determinado nível $y^* = f(x_1^*, x_2^*)$

Suponha ainda que desejemos aumentar a quantidade do fator 1 e diminuir a quantidade do fator 2 mantendo constante o nível de produção. Como determinamos tal taxa técnica de substituição? No caso bidimensional a Taxa Técnica de Substituição (TTS) é exatamente a inclinação da isoquanta: quanto devemos ajustar x_2 para manter o nível de produção constante quando x_1 varia por um pequeno valor? No caso n-dimensional a TTS é a inclinação de uma superfície isoquanta numa direção particular.

Seja $x_2(x_1)$ a função (implícita) que nos diz o quanto é necessário de x_2 para produzir y usando x_1 unidades do primeiro fator. Por definição:

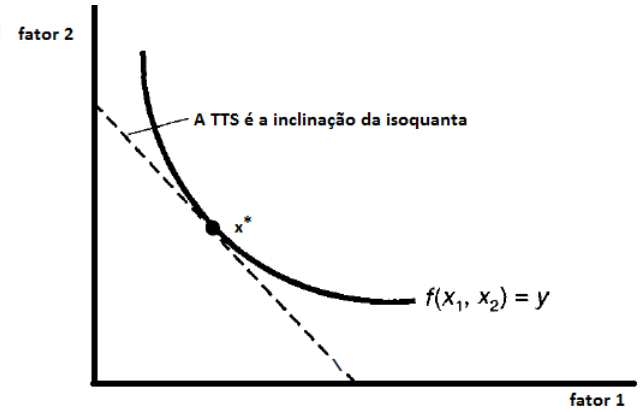
$$f(x_1,\, x_2(x_1)) \equiv y$$

Estamos querendo uma expressão para $\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1}$. Diferenciando a identidade acima temos:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}}$$

que nos dá uma expressão explícita para a Taxa Técnica de Substituição.



TTS da tecnologia *Cobb-Douglas*

Temos $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{(1-a)}$, portanto:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} x_2^{(1-a)} = a\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-a}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = (1-a)\, x_1^a x_2^{-a} = (1-a)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a}$$

$$\mathbf{TTS_{Cobb-Douglas}} = \frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}$$

Tal como a definimos, a tecnologia ***Leontief*** não possui TTS.

A elasticidade de substituição

Como vimos, a taxa técnica de substituição mede a inclinação de uma isoquanta. A elasticidade de substituição mede sua curvatura. Mais especificamente, a elasticidade de substituição mede a variação percentual na razão entre os fatores de produção dividida pela variação percentual na TTS, mantendo o produto num nível fixo. Esta é uma medida de curvatura: de quanto varia a razão entre os fatores de produção quando a inclinação da isoquanta varia. É usual, por conveniência, calcular derivadas logarítimicas para calcular elasticidades. Se y é uma função de x, y = g(x), por exemplo, a elasticidade de y com relação a x é definida como a variação percentual em y induzida por dada variação percentual em x, isto é:

$$\varepsilon = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\frac{\triangle y}{y}}{\frac{\triangle x}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{dln\,(y)}{dln\,(x)}$$

Nossa elasticidade de substituição é:

$$\varepsilon = \frac{dln(\frac{x_2}{x_1})}{dln(|TTS|)}$$

A elasticidade de substituição da tecnologia *Cobb-Douglas*

Como vimos:

$$TTS = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{1-a}{a}TTS = \frac{1-a}{a}|TTS|$$

$$ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + ln\,(|TTS|)$$

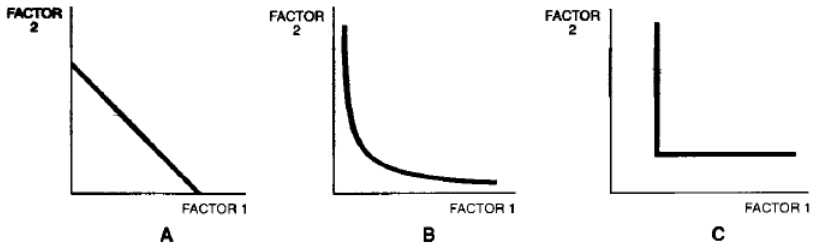
$$\varepsilon_{Cobb-Douglas} = \frac{dln(\frac{x_2}{x_1})}{dln(|TTS|)} = 1$$

Dizemos que a elasticidade de substituição da tecnologia ***Leontief*** é 0.

A função de produção *CES* (*Contant Elasticity of Substitution*)

$$Y = F(x_1, x_2) = \left[a x_1^{-\delta} + (1-a)\, x_2^{-\delta}\right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

Trata-se de uma função que exibe retornos constantes de escala (homogênea de grau 1) e que inclui diversas funções conhecidas como casos especiais, sendo bastante adequada para representação paramétrica da tecnologia, por permitir a modelagem de uma gama variada de perfis tecnológicos, dependendo, fundamentalmente, do parâmetro δ.



Caso A

Para $\delta = -1$ temos o caso da função de produção linear com $y = ax_1 + (1-a)\,x_2$.

Caso B

Para $\delta = 0$ temos a função de produção *Cobb-Douglas*. Quando $\delta = 0$ a função de produção CES não está definida, em função da divisão por zero. Entretanto, quando δ se aproxima de zero, as isoquantas da função CES vão se assemelhando às da função *Cobb-Douglas*. Isto pode ser visto pela TTS. A TTS da *CES* é:

$$TTS_{CES} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-(\delta+1)}$$

$$\lim_{\delta\to 0} TTS_{CES} = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1} = TTS_{Cobb-Douglas}$$

Se lembrarmos da regra de *L'Hôpital* também podemos ver isso:

$$y^{-\delta} = \left[ax_1^{-\delta} + (1-a)\,x_2^{-\delta}\right]$$

$$\lim_{\delta\to 0} ln(y) = \lim_{\delta\to 0} -\frac{ln\left[ax_1^{-\delta} + (1-a)\,x_2^{-\delta}\right]}{\delta} \qquad (indeterminação\ tipo\ \frac{0}{0})$$

$$\lim_{\delta\to 0} ln(y) = \lim_{\delta\to 0} -\frac{\left(ln\left[ax_1^{-\delta} + (1-a)\,x_2^{-\delta}\right]\right)'}{(\delta)'}$$

$$\lim_{\delta\to 0} ln(y) = \lim_{\delta\to 0} +\frac{ax_1^{-\delta} ln\,(x_1) + (1-a)\,x_2^{-\delta} ln\,(x_2)}{ax_1^{-\delta} + (1-a)\,x_2^{-\delta}} = \frac{aln\,(x_1) + (1-a)\,ln\,(x_2)}{1}$$

$$\lim_{\delta\to 0} ln(y) = aln\,(x_1) + (1-a)\,ln\,(x_2) \Rightarrow \lim_{\delta\to 0} y = x_1^a x_2^{(1-a)} \blacksquare$$

Caso C

Para $\delta = \infty$ temos a função de produção Leontief. Vimos que:

$$TTS_{CES} = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-(\delta+1)} = -\frac{a}{1-a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{(\delta+1)}$$

Se $x_2 > x_1 \Rightarrow TTS_{CES} \to -\infty$. Se $x_2 < x_1 \Rightarrow TTS_{CES} \to 0$. Ou seja, quando $\delta \to \infty$ a isoquanta da CES se aproxima da isoquanta da tecnologia Leontief.

4.2 Considerações gerais para um modelo alternativo.

O Modelo de Goodwin original, análogo ao modelo Predador-Presa é estruturalmente instável (Veneziani (2001)), com um equilíbrio que não é nem estável nem instável. De fato, pequenas modificações causam significativas mudanças no comportamento do modelo.

Procuraremos agora analisar o modelo de Goodwin como um caso limite dentro de um contexto mais geral, de forma a permitir a avaliação dos efeitos do relaxamento de algumas hipóteses. Relaxando a hipótese de proporções fixas adotada, isto é, sua assunção de uma função de produção *Leontief*, pode-se obter um equilíbrio estável.

Por outro lado, Goodwin mostrou que o equilíbrio torna-se instável, quando se assume um crescimento endógeno da produtividade. É possível mostrar, e o faremos, considerando os dois efeitos, que, aquele oriundo da flexibilização da tecnologia, isto é, abandonando a hipótese de proporções fixas da função de produção *Leontief* é dominante sobre a questão da estabilidade vis-à-vis o efeito da endogenização da produtividade do trabalho.

Não me parecem razoáveis as opções presentes nos modelos tradicionais, com vocação para os extremos, que, ou optam por absoluta flexibilidade tecnológica (Solow, por exemplo, entre outros) ou optam pela rigidez tecnológica (que pode ser razoável numa particular firma, nunca numa função de produção agregada, abstrata, que representa uma economia reduzida aos fatores de produção capital e trabalho) como fazem Goodwin e Harrod-Domar, entre outros, ao postular uma razão capital-produto constante. Cuidaremos disso estabelecendo uma diferente escolha para representar a tecnologia e a candidata que emerge naturalmente para essa missão é a função de produção *CES*.

Goodwin fez cinco assunções por conveniência e duas assunções com natureza diversa. As cinco primeiras são:

1. *produtividade do trabalho crescendo exogenamente à taxa* α
2. *crescimento para o estado estacionário da força de trabalho.* A economia de estado *estacionário* é uma economia de tamanho relativamente estável. Possui população estável e consumo estável que permaneça igual ou inferior à capacidade de carga. O termo refere-se normalmente a uma economia nacional, mas também pode ser aplicado para o sistema económico de uma cidade, uma região, ou a todo o planeta. *Nossa hipótese aqui é que a população ativa em condição de trabalhar converge para um nível de equilíbrio.*
3. *dois fatores de produção , ambos homogêneos, Capital e Trabalho.*
4. *todas as quantidades são reais e líquidas.*
5. *os trabalhadores gastam tudo que ganham (salários) e todo lucro é reinvestido.*

Visando tornar certas manipulações algébricas mais fáceis, consideraremos o crescimento exógeno da força de trabalho como sendo zero, trata-se apenas de uma mudança de escala, que não altera qualitativamente os resultados finais, mas economiza notação e trabalho algébrico. Consideraremos a força de trabalho total estabilizada como sendo 1, sendo (L) o nível de emprego.

Vamos considerar uma função de progresso técnico de forma a permitir que a eficiência da força de trabalho seja influenciada pelo nível do estoque de capital $K(t)$. O tratamento do progresso tecnológico como variável exógena, inteiramente dissociada da acumulação de capital é uma debilidade presente na maioria dos modelos macroeconômicos de crescimento, visto que as novas técnicas costumam ser acompanhadas de novos investimentos.

A força de trabalho efetiva é:

$$L_{ef} = Le^{\alpha t}K^{\eta}$$

Goodwin (1991) usou extensão similar ao modelo original de 1967. Mais precisamente, Goodwin assume que a produtividade do trabalho crescerá de acordo com a relação $\frac{\dot{a}}{a} = \alpha + \eta\frac{\dot{K}}{K}$. Tal extensão torna o modelo instável, isto é, produz oscilações explosivas. Para restringir o sistema a um conjunto compacto, Goodwin introduziu uma equação diferencial com uma variável de controle. Esse sistema com três equações diferenciais possibilita a ocorrência de movimentos caóticos (Sordi (1999)).

No intuito de estabelecer condições para ocorrência de crescimento econômico, Goodwin acrescentou uma equação logística para o investimento tornando seu modelo substancialmente mais complexo e *ad hoc*.

Tomaremos outro caminho, pois queremos manter o modelo suficientemente simples na captura da essência da dinâmica capitalista, restrita a uma economia com apenas trabalhadores e capitalistas e sem Governo.

Nosso ponto é que, com alterações mais plausíveis nas hipóteses, essa dinâmica tem propriedades distintas das apresentadas pelo modelo original de Goodwin, em especial no que diz respeito à convergência para o equilíbrio, como teremos a oportunidade de observar mais adiante, sendo o modelo resultante, no nosso entender, mais adequado a ser levado como núcleo já testado, para a elaboração de modelos mais complexos, multisetoriais, com governo, mercado de crédito e expectativas, entre outros aspectos necessários à modelagem de uma economia real.

Esse modelo está basicamente calcado nas hipóteses da curva de *Phillips* do salário real e na endogenização da razão capital-produto assumindo uma função de produção *CES* e um comportamento maximizador dos lucros por parte dos capitalistas.

As duas assunções de natureza diversa feitas por Goodwin são:

1. *relação capital produto constante.*

2. *taxa de variação do salário real aumenta na vizinhança do pleno emprego (uma curva de Phillips do salário real, não necessariamente linearizada).*

Como já vimos, essa segunda assunção, em nosso atual mundo normalizado (y virou L) significa:

$$\frac{\dot{w}}{w} = f(L)$$

Permitiremos, como fizeram o próprio Goodwin e Desai et al. (2006), que a função da taxa de crescimento do salário real se torne infinitamente grande quando L se aproxime de 1. A função f tem um limite inferior negativo aplicável para valores baixos de L. Como já vimos, na literatura econômica é usual considerar dois tipos de modelo para explicar a existência do comportamento dessa função que nas seções anteriores obtivemos a partir das aproximações lineares que possuíamos para alguns países: modelos de barganha e de eficiência.

Num modelo de barganha, um nível de emprego baixo (alto) enfraquece (fortalece) os trabalhadores, reduzindo (aumentando) sua capacidade para reivindicar uma fatia maior da renda da economia. Se recorrermos a um modelo de eficiência (Shapiro and Stiglitz 1984), aceitaremos que os salários têm uma influência positiva na produtividade.

Em equilíbrio, as empresas maximizam lucros e os trabalhadores escolhem seu esforço. A taxa de desemprego tem um papel crucial: afeta a probabilidade de um trabalhador demitido encontrar outro emprego que será determinante no formato de uma curva de *Phillips* do salário real para tal economia. Para nós, esse formato é *input*, isto é, hipótese comportamental do jogo entre trabalhadores e capitalistas.

A *relação capital produto constante* será substituída pela assunção de uma função de produção CES, que, como vimos, permite a modelagem de um espectro razoável de tecnologias em modelos de dois fatores, inclusive as proporções fixas assumidas por Goodwin como caso limite:

$$Y = F(L_{ef}, K) = \left[\theta K^{-\delta} + (1-\theta) L_{ef}^{-\delta}\right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

Com $0 < \theta < 1$, $\delta > 0$ A função CES tem elasticidade de substituição constante dada por $\varepsilon = \frac{dlog(K/L_{ef})}{dlog(\Phi)} = \frac{1}{1+\delta}$, onde $\Phi = \frac{F_{L_{ef}}}{F_K}$. Quando δ se aproxima de zero, ($\varepsilon \to 1$), a função se transforma numa $Cobb-Douglas$: ($Y = K^{\theta} L_{ef}^{(1-\theta)}$) e quando δ se aproxima do infinito ($\varepsilon \to 0$) a função se transforma numa função de produção *Leontief* (a assunção de Goodwin - $Y = min\{\theta K, (1-\theta) L_{ef}\}$). O primeiro caso é o de perfeita flexibilidade tecnológica entre capital e trabalho, o segundo é o de fatores complementares em proporções fixas. O parâmetro θ é uma medida relativa à inclinação das isoquantas na função de produção. Seguiremos na linha de Ploeg (1985) e vamos assumir maximização dos lucros.

Dessa forma, as empresas contratam trabalhadores até que sua produtividade marginal iguale o salário (como, para nós, Y e w são reais, temos $\pi = Y - wL$, logo a condição de primeira ordem para maximização do lucro leva a $\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0$:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = w$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L_{ef}} = we^{-\alpha t}K^{-\eta}$$

Com a hipótese de maximização dos lucros ficamos capazes de encontrar a razão ótima da demanda por fatores de produção (em termos efetivos), a razão capital produto ótima $\left(k = \frac{K}{Y}\right)$ e a produtividade do trabalho (a):

Temos $a = \frac{Y}{L} \Rightarrow \frac{Y}{L_{ef}} = \frac{a}{e^{\alpha t}K^{\eta}}$, como $\frac{\partial Y}{\partial L_{ef}} = \frac{Y}{L_{ef}}\frac{(1-\theta)L_{ef}^{-\delta}}{\left[\theta K^{-\delta}+(1-\theta)L_{ef}^{-\delta}\right]} = we^{-\alpha t}K^{-\eta}$ e como $x = \frac{w}{a}$ obtemos $x = \frac{(1-\theta)L_{ef}^{-\delta}}{\left[\theta K^{-\delta}+(1-\theta)L_{ef}^{-\delta}\right]}$ e, portanto:

$$\left(\frac{K}{L_{ef}}\right)(x) = \left(\frac{(1-\theta)(1-x)}{\theta x}\right)^{\frac{-1}{\delta}}$$

$$\frac{K}{Y} = k(x) = \left(\frac{\theta}{(1-x)}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$\frac{Y}{L} = a(x) = \left(\frac{x}{(1-\theta)}\right)^{\frac{1}{\delta}} e^{\alpha t}K^{\eta}$$

onde $x = \frac{w}{a}$ é nossa já conhecida participação dos trabalhadores na renda da economia sob análise. É possível descrever o modelo acima com duas equações representando a evolução da participação dos trabalhadores na renda (x) e do nível de emprego, nessa seção: L:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$$

onde $\sigma = \frac{K}{L}$. Usando as equações já obtidas e adotando a hipótese de maximização dos lucros, bem como considerando que todo o lucro dos capitalistas é reinvestido, ou seja:$\dot{K} = (1-x)Y$ teremos o sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}}{x} &= \left(f(L) - \alpha - \eta\theta^{\frac{-1}{\delta}}(1-x)^{\frac{1+\delta}{\delta}}\right)\frac{\delta}{1+\delta} \\
\frac{\dot{L}}{L} &= (1-\eta)\,\theta^{\frac{-1}{\delta}}(1-x)^{\frac{1+\delta}{\delta}} - \frac{1}{\delta(1-x)}\frac{\dot{x}}{x} - \alpha
\end{aligned}$$

$$Sistema \tag{4.1}$$

Para fins de simulação, para a solução das EDOs com o método de *Runge-Kutta 44*, a expressão $\frac{\dot{x}}{x}$ na segunda equação é substituída pela sua expressão na primeira equação.

4.3 As Propriedades

O modelo original Predador-Presa é tão somente um caso especial do sistema (4.1). Fazendo $\eta = 0$ e tomando limites para $\delta \to \infty$, bem como fazendo a aproximação linear da curva de *Phillips* do salário real ($f(L) = -\gamma + \rho L$), o modelo resultante é formalmente equivalente ao modelo de $Lotka - Volterra$ Predador-Presa:

$$\dot{x} = (-(\alpha + \gamma) + \rho L)\, x$$
$$\dot{L} = ((1 - x) - \alpha)\, L$$

Já analisamos as propriedades desse caso especial com notação um pouco diferente dessa versão normalizada. Há um equilíbrio que não é nem estável nem instável; se o sistema está perto do equilíbrio não há qualquer força que o atraia para fora, portanto tal equilíbrio não é instável. Igualmente não há qualquer força de atração para o equilíbrio que, portanto, também não é estável. Não é difícil perceber que a premissa fundamental desse modelo é a curva de *Phillips* do salário real. É a evolução do salário real que determina a evolução da participação dos trabalhadores na renda e é a evolução dessa participação que determina o investimento dos capitalistas. Note-se que se a taxa de crescimento exógeno do progresso técnico α for nula, as propriedades dinâmicas do sistema não se alteram.

Se considerarmos a função de produção $CES\,(\delta < \infty)$, mantendo $\eta = 0$, estaremos permitindo alguma substitutibilidade entre capital e trabalho. O sistema econômico torna-se mais flexível. Ploeg (1985) mostrou que o equilíbrio do sistema torna-se estável. Trata-se de uma reedição do debate entre *Solow* e *Harrod-Domar*: quando se considera uma função de produção com elasticidade de substituição zero, o sistema não converge para o ponto de equilíbrio, exatamente como ocorre no modelo de *Harrod-Domar*. Com alguma substitutibilidade, o equilíbrio deixa de ser instável e o sistema converge para o estado de equilíbrio (*steady state*), como no modelo de *crescimento de Solow*.

Por outro lado, se mantivermos $\delta \to \infty$, porém, permitindo um η positivo, observaremos o efeito oposto. Como no modelo original de *Goodwin*, numa situação de aumento dos lucros, o investimento aumenta e mais trabalhadores são contratados. Esse aumento no investimento também tem um efeito positivo na produtividade do trabalho, que volta a aumentar os lucros e novamente o investimento. Todavia, quando a acumulação de capital enfraquece, a produtividade do trabalho é afetada negativamente reduzindo os lucros e em consequencia o investimento.

Do ponto de vista matemático, o ponto de equilibrio torna-se localmente instável e o sistema passa a produzir ciclos explosivos (tal equilíbrio também é globalmente instável, e a explosão dos ciclos só pode ser evitada estabelecendo limites às variáveis endógenas, como no modelo de *Goodwin*).

Consideraremos o caso geral com uma função de produção CES e com a produtividade do trabalho sendo influenciada positivamente pelo aumento do estoque de capital. Como vimos acima o sistema fica descrito pelas equações do

sistema(1). O ponto de equilíbrio é dado por:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\alpha}{(1-\eta)}\right)^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left(\theta^{\frac{1}{1+\delta}}\right) \\ f^{-1}\left(\frac{\alpha}{1-\eta}\right) \end{pmatrix}$$

Linearizando o sistema (1)em torno do ponto de equilíbrio temos:

$$\dot{x} = \eta \left(\frac{1-x^*}{\theta}\right)^{\frac{1}{\delta}} x^* (x - x^*) + \frac{f^{'}(L^*) x^* \delta}{1+\delta} (L - L^*)$$

$$\dot{L} = \left((1+\delta)(\eta - 1) - \frac{\eta}{1-x^*}\right) \left(\frac{1-x^*}{\theta}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{L^*}{\delta} (x - x^*) - \frac{f^{'}(L^*) L^*}{(1+\delta)(1-x^*)} (L - L^*)$$

A equação característica do sistema acima é:

$$\lambda^2 + \left[\frac{f^{'}(L^*) L^*}{(1+\delta)(1-x^*)} - \eta \left(\frac{1-x^*}{\theta}\right)^{\frac{1}{\delta}} x^*\right] \lambda + (1-\eta) \left(\frac{1-x^*}{\theta}\right)^{\frac{1}{\delta}} x^* L^* f^{'}(L^*) = 0$$

O termo constante é positivo, então é o sinal do termo em colchetes que determinará a estabilidade do sistema. A consideração de um crescimento da produtividade prócíclico($0 < \eta < 1$) tem um efeito desestabilizador, enquanto a adoção de substitutibilidade entre os fatores tem um efeito estabilizador. Qual prevalecerá dependerá de suas magnitudes.

Se $\eta > \frac{f^{'}(L^*)L^*}{x^*(1+\delta)(1-x^*)} \left(\frac{\theta}{1-x^*}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ o sistema será localmente instável. Se menor, o modelo produzirá oscilações amortecidas para o equilíbrio. No caso de igualdade, em princípio, não podemos inferir qualquer conclusão sobre a dinâmica local do sistema não linear a partir do sistema linearizado (Aggarwal, 1972, p. 26).

A elasticidade de substituição da CES é $\frac{1}{1+\delta}$, sendo δ o parâmetro crítico para garantir a estabilidade do sistema e determinar seu comportamento qualitativo. A ideia é que se δ cresce a elasticidade de substituição cai, diminuindo o efeito estabilizador do sistema, para cada adoção de η.

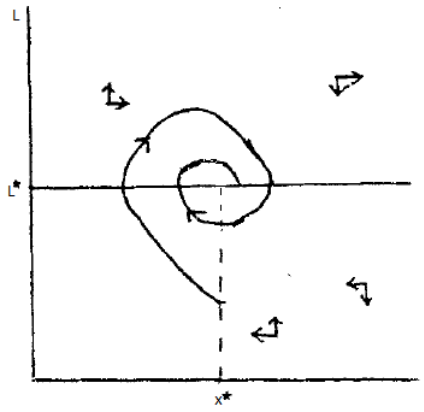
Fixados os demais parâmetros, haverá um $\delta(\eta)$ máximo que mantém o sistema estável. O que verificamos em nossas simulações é que, para valores razoáveis de δ , digamos $\delta \in [0, \delta_{max}]$,e, portanto, de ε, $\varepsilon \in [\varepsilon_{min}, 1]$, isto é, elasticidades de substituição entre capital e trabalho em niveis compatíveis com o que se observa empiricamente nas economias reais, o sistema será estável num amplo espectro de variação dos demais parâmetros. Variar α e θ não é muito relevante entre 0.01 e 0.08 para α e 0.1 e 0.8 para θ.

O estudo do modelo na região onde o mesmo perde sua propriedade de estabilidade não é nosso interesse nesse trabalho. Na verdade, fixados η e demais parâmetros, o valor de δ máximo que mantém o sistema estável é muito superior a qualquer valor que se possa esperar para uma economia real. Esse fato é o ponto central que destacamos, como elemento robusto para levar tal estrutura

de modelagem para a elaboração de modelos mais complexos. O razoável é trabalhar com δ não superior a 5 e isso é mais do que suficiente para garantir convergência no universo possível dos demais parâmetros.

Pensando em termos de ε, o valor da elasticidade de substituição entre capital e trabalho mínimo necessário para garantir a estabilidade do sistema é muito inferior às elasticidades que se obtém empiricamente em estudos econométricos para economias reais. Para todas as economias reais em que simulamos o modelo alternativo, com parâmetros heuristicamente arbitrados a partir do já comentado estudo econométrico de *Harvie* para países da OECD (com o modelo de Goodwin em mente), o retrato de fase (x,L) que reflete a dinâmica do sistema descrito por nosso modelo alternativo segue o padrão da figura abaixo, para $0 < \delta < \delta_{max}$, isto é, $\varepsilon_{min} < \varepsilon < 1$. Quando $\delta \to 0$, a função de produção se aproxima de uma *Cobb-Douglas* (certamente, a campeã de utilização nos modelos macroeconômicos em geral), a elasticidade de substituição entre os fatores se aproxima de 1, fazendo com que o sistema perca sua natureza oscilatória e a convergência para o equilíbrio se dê de forma monótona. Por outro lado, se $\delta \geq \delta_{max}$, e, consequentemente, $\varepsilon \leq \varepsilon_{min}$, o sistema deixa de ser convergente.

Retrato de fase típico do sistema dinâmico obtido com o modelo alterado



4.4 Resultados numéricos

4.4.1 Testando o modelo

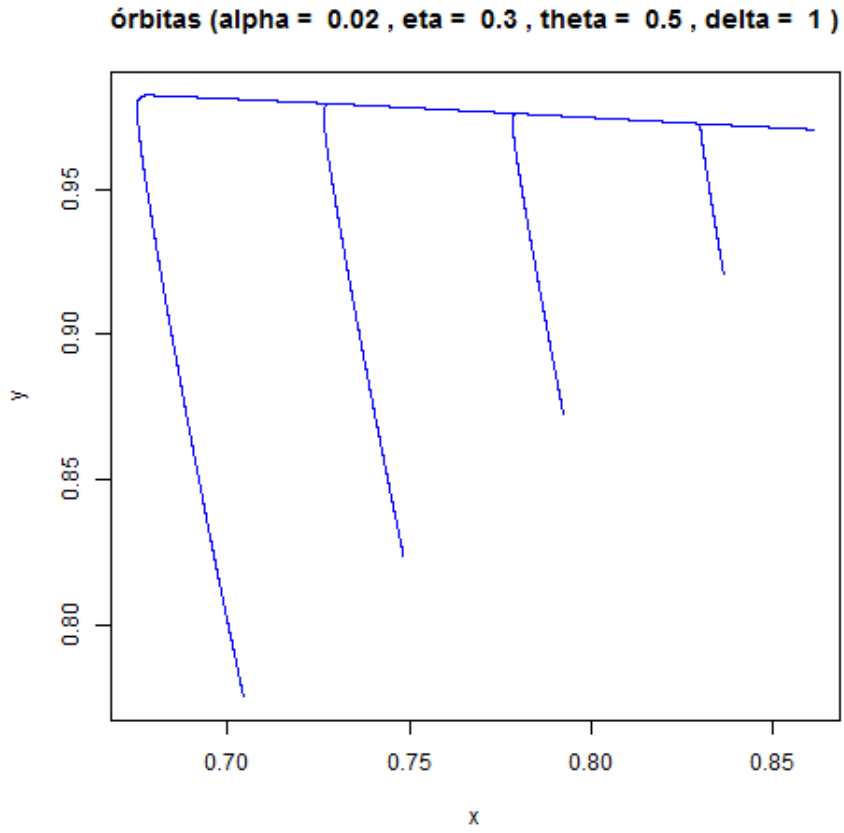
Para ilustrar as propriedades do modelo, vamos fazer simulações, variando os parâmetros de acordo com critérios que passamos a descrever. Faremos $\alpha = 0.02$ e $\theta = 0.5$, variaremos η em $\{0.3,\ 0.5\,0.6,\ 0.8\,\}$ e arbitraremos $f(L) = -0.040064 + \frac{0.000064}{(1-L)^2}$. Com isso, limitamos inferiormente a taxa de variação dos salários em-4% e e forçamos um zero em 0,96, assegurando, como já vimos,

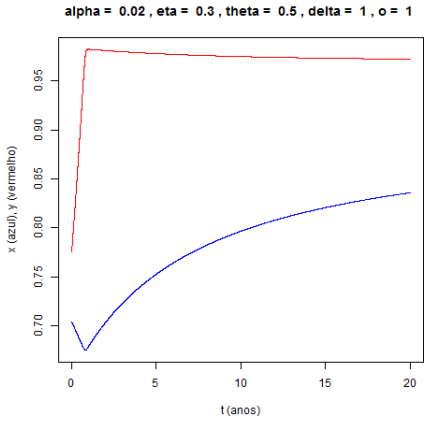
um crescimento ilimitado da taxa de crescimento dos salários quando o sistema se aproxima do pleno emprego. Toda a modelagem foi pensada para garantir que as variáveis endógenas, definidas como participações de uma parte no todo, fiquem restritas ao domínio no qual o modelo faz sentido, isto é: $(0,1]^2$.

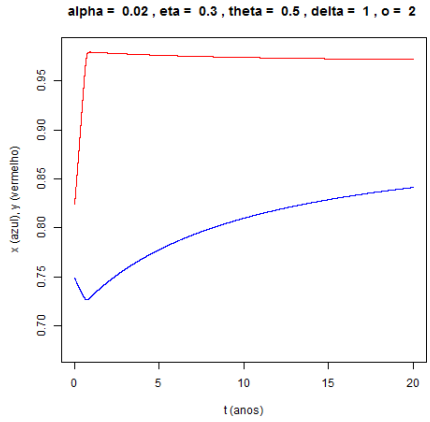
A elasticidade de substituição da CES é $\frac{1}{1+\delta}$, sendo δ o parâmetro crítico para garantir a estabilidade do sistema e determinar seu comportamento qualitativo. Variaremos δ em {1, 10, 20, 50, 250} garantindo com isso, para quaisquer combinações dos demais parâmetros, no domínio que especificamos, a estabilidade do sistema. Notemos que $\delta = 250$ implica uma elasticidade de substituição de 0,004, abaixo de qualquer expectativa empírica para uma elasticidade de substituição entre Capital e Trabalho em qualquer lugar onde ambos os fatores existem. A ideia é que se δ cresce a elasticidade de substituição cai, diminuindo o efeito estabilizador do sistema, para cada adoção de η. Fixados os demais parâmetros, haverá um $\delta(\eta)$ máximo que mantém o sistema estável. Variar α e θ não é muito relevante entre 0.01 e 0.08 para α e 0.1 e 0.8 para θ. O estudo do modelo na região onde o mesmo perde sua propriedade de estabilidade não é nosso interesse nesse trabalho.

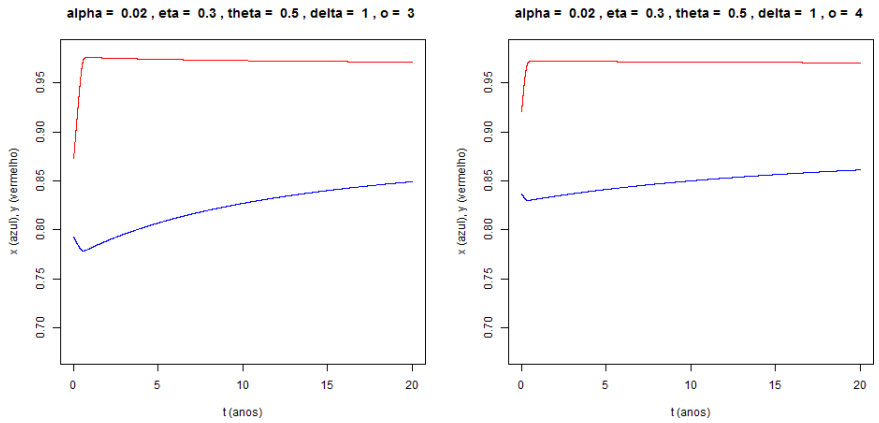
By the way, abandonamos L e voltamos a usar y para denominar o nível de emprego.

Para uma economia dada pelos parâmetros (α, η, , θ, δ) =(0.02, 0.3, 0.5, 1) obtemos um equilíbrio (x^*, y^*)= (0.88, 0.97). estabelecendo condições iniciais dadas por perturbações do equilíbrio obtidas multiplicando o mesmo por .8, .85, .9 e .95 simulamos a dinâmica do sistema ilustrada pelas 4 órbitas (o = órbita nos gráficos onde aparece) dadas pelas condições iniciais obtidas e gráficos da evolução de x e y no tempo que arbitramos num intervalo de 0 a 20 anos. Nosso modelo não é bem calibrado para descrever o comportamento de x e y quando y é baixo, apresentando uma convergência aparentemente acelarada para um nível de emprego mais alto, com excessiva "entrega" de renda por parte dos trabalhadores, produzindo uma exagerada perda de renda dos trabalhadores paralelamente ao áumento do nível de emprego. Tal calibragem demandaria um estudo específico dos parâmetros para a economia a ser modelada, não sendo esse o foco do presente trabalho. Com uma curva de *Phillips* mais achatada como fizemos em seção anterior esse descalibramento ficaria mais acentuado. Quanto maior o $\boldsymbol{m}$ da equação lá proposta para a curva de *Phillips*, menor a natureza oscilatória da convergência para o equilíbrio, Coeteris paribus.


órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 1)
y
0.80
0.85
0.90
0.95
0.70
0.75
0.80
0.85
x

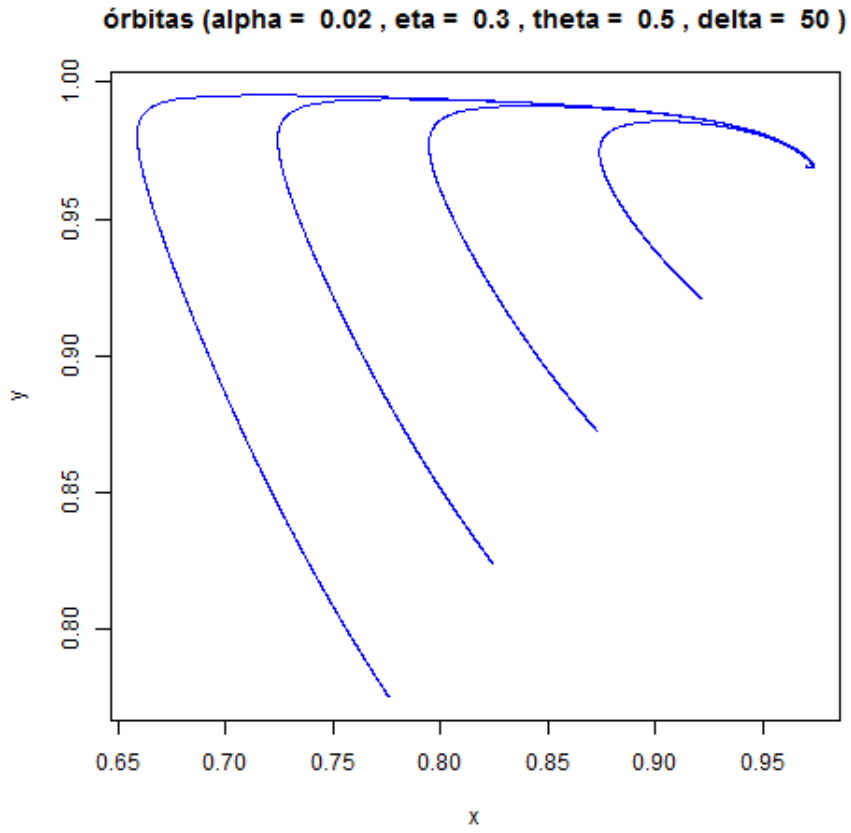

alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 1 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
0
5
10
15
20
t (anos)

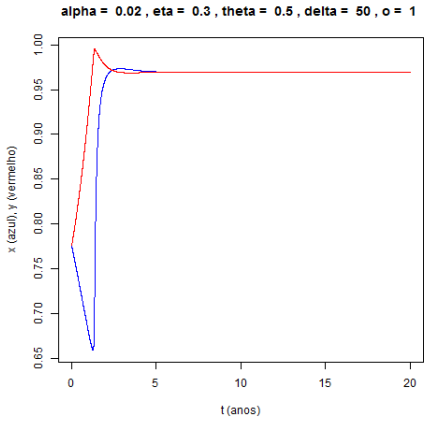

alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 1 , o = 2
x (azul), y (vermelho)
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
0
5
10
15
20
t (anos)

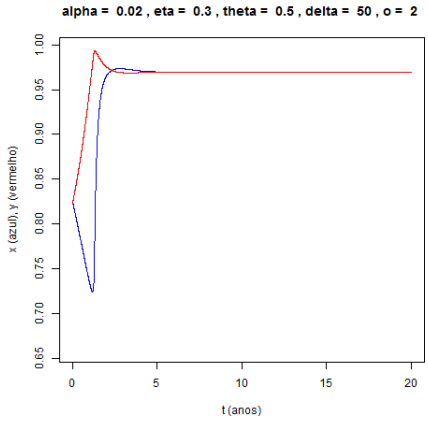


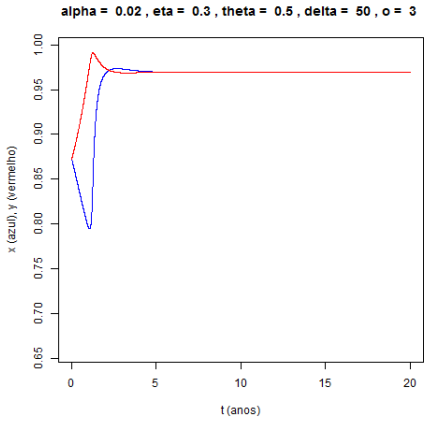
A dinâmica é clara. Estamos numa situação em que o efeito estabilizador da substitutibilidade entre os fatores de produção é muito forte e domina o efeito desestabilizador da endogenização da produtividade do trabalho e o sistema converge para o equilíbrio. Numa primeira etapa, os trabalhadores, enfraquecidos pelo alto desemprego, "entregam" participação na renda e ganham um aumento do nível de emprego, aumentando seu poder de barganha quando y se aproxima do pleno emprego e vão aumentando sua participação na renda ao custo de uma redução no nível de emprego provocada pela queda do investimento que decorre da redução da taxa de lucro dos capitalistas. A evolução se dá de forma relativamente suave e monótona, mas adquire uma natureza cíclica conforme reduzimos a magnitude do efeito substituição.

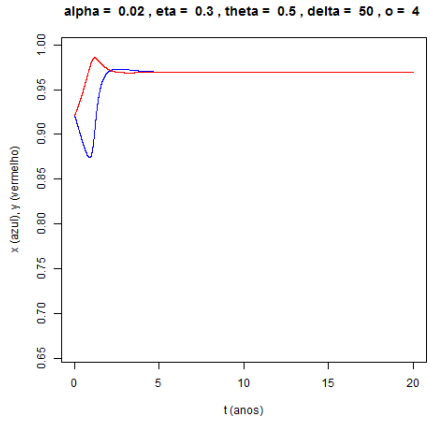
Em seguida exibo diversas situações semelhantes (mesmo critério para obtenção das condições iniciais como proporções do ponto de equilibrio) com o objetivo de ilustrar a mudança na dinâmica quando diminuímos o efeito substituição aumentando δ e, consequentemente, reduzindo a elasticidade de substituição da função de produção CES em direção à função de produção $Leontief$ quando essa elasticidade é zero (a assunção de Goodwin de uma tecnologia de proporções fixas dos fatores). Para não ocupar muito espaço com gráficos em demasia, exibo variações dos parâmetros fundamentais, δ e η mantendo α e θ fixos.

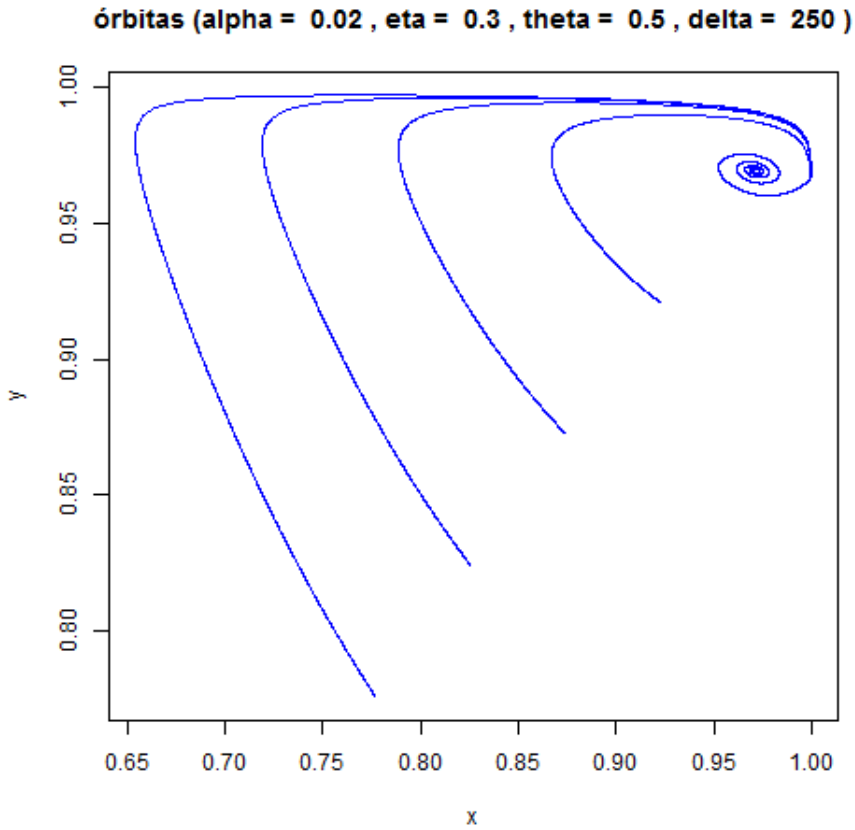

órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 50)
y
x
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95

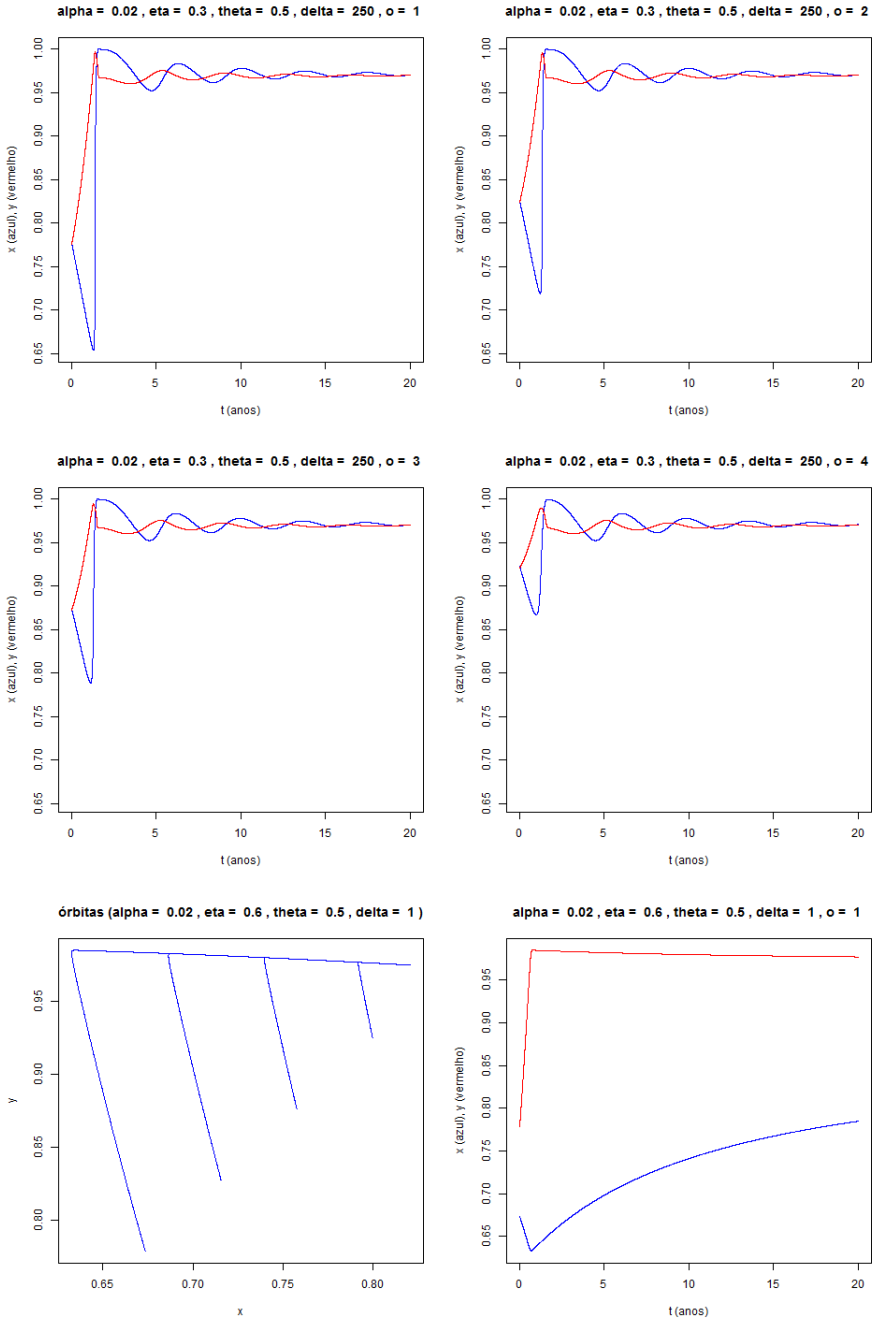

alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 50 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)

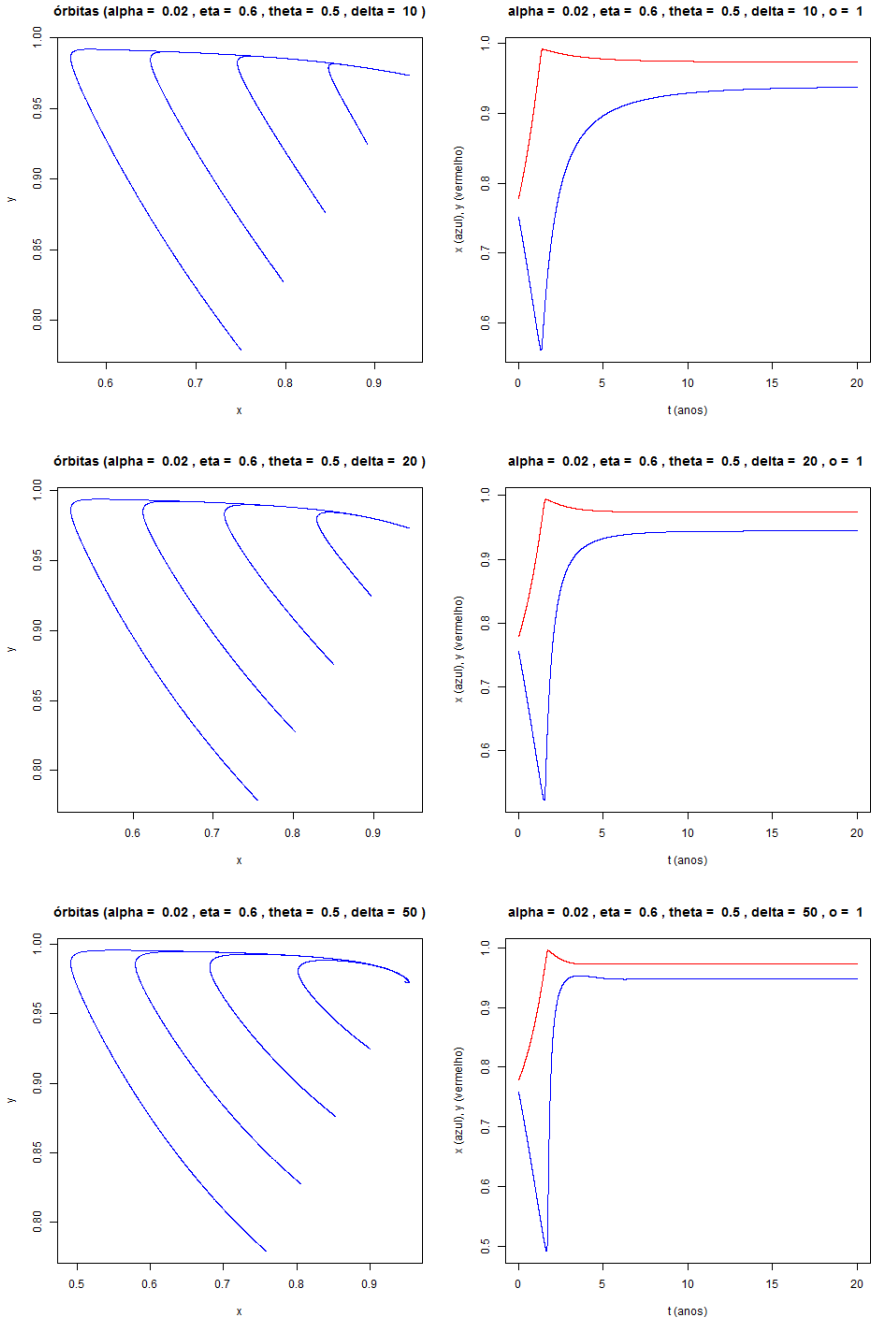

alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 50 , o = 2
x (azul), y (vermelho)
t (anos)

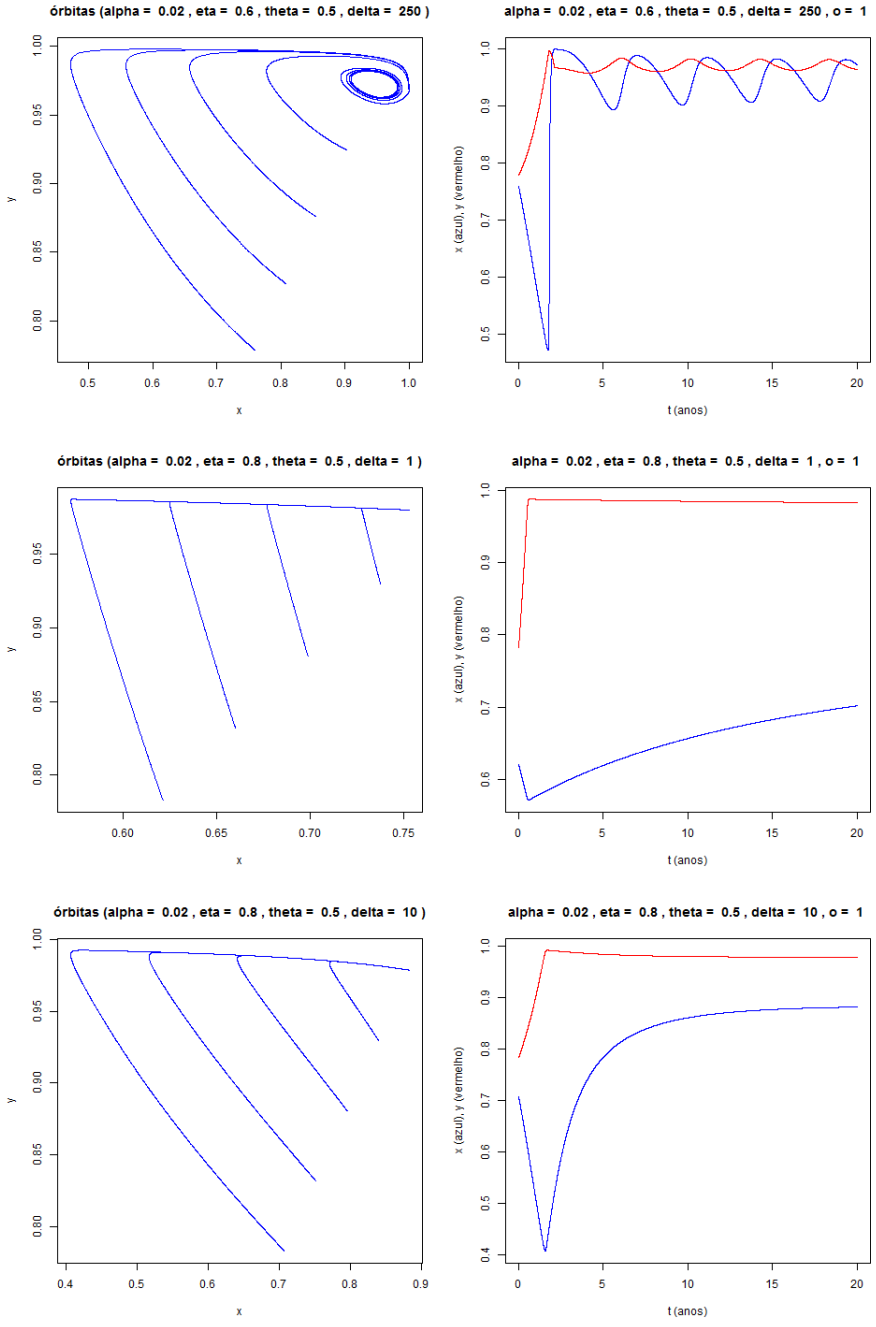

alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 50 , o = 3
x (azul), y (vermelho)
t (anos)

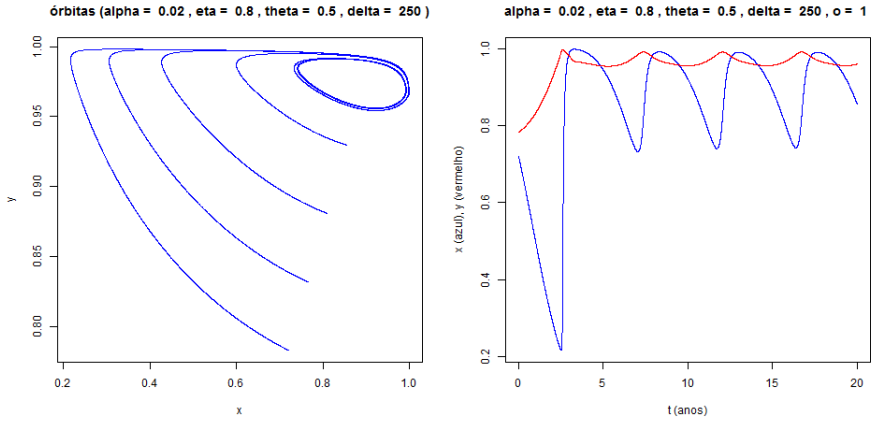

alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 50 , o = 4
x (azul), y (vermelho)
t (anos)


órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 250)
y
x


alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 250 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 250 , o = 2
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 250 , o = 3
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
alpha = 0.02 , eta = 0.3 , theta = 0.5 , delta = 250 , o = 4
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 1)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 1 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)


órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 10)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 10 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 20)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 20 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 50)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 50 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)


órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 250)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.6 , theta = 0.5 , delta = 250 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.8 , theta = 0.5 , delta = 1)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.8 , theta = 0.5 , delta = 1 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)
órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.8 , theta = 0.5 , delta = 10)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.8 , theta = 0.5 , delta = 10 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)


órbitas (alpha = 0.02 , eta = 0.8 , theta = 0.5 , delta = 250)
y
x
alpha = 0.02 , eta = 0.8 , theta = 0.5 , delta = 250 , o = 1
x (azul), y (vermelho)
t (anos)

4.4.2 Análise dos países da OECD selecionados

Sem maiores compromissos que o de ilustrar a dinâmica do modelo para perturbações não demasiadamente estravagantes do ponto de equilíbrio numa situação hipotética, porém obtida com base nas estimativas econométricas de que dispomos para os quatro países selecionados do trabalho de *Harvie* (2000), procederei uma adaptação desses dados para a parametrização necessária ao nosso modelo.

Um estudo com pretensões mais sérias demandaria estimativas voltadas para esse fim. Aqui faço apenas um exercicio de heurística.

Temos o parâmetro α dos países em nossa tabela. Usei uma f quadrática como na seção acima do tipo $f(y) = -c_1 + \frac{c_2}{(1-y)^2}$. Arbitrei $c_1 = 0.04 + c_2$ como fiz na referida seção de testes do modelo alternativo.

Arbitrando η e θ, bem como fazendo L^*ser o valor do equilíbrio obtido para o modelo com a *Phillips* linear que dispomos para cada país, da equação $L^* = f^{-1}(\frac{\alpha}{1-\eta})$ podemos calcular o c_2 implícito de cada país.

Usando os x^* que dispomos em cada caso, pela equação $x^* = 1 - \left(\frac{\alpha}{(1-\eta)}\right)^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left(\theta^{\frac{1}{1+\delta}}\right)$ podemos calcular o δ implícito de cada país.

O parâmetro θ foi arbitrado em 0.5 para Austrália, 0.4 para a França, 0.7 para Italia e 0.8 para Noruega.

O parâmetro η foi arbitrado em 0.82 para a Austrália, 0.53 para a França, 0.72 para a Itália e 0.81 para a Noruega.

Procurei obter os δ maiores do que seus prováveis valores nesses países para obter uma dinâmica mais oscilatória nos resultados. Insisto: o exercicío realizado foi de matemática e não um trabalho econométrico.

Guardam correspondência com os dados estimados econometricamente por Harvie apenas os equilíbrios adotados, a constante c_2 de cada f e a intuição de quem modela. Novamente, qualquer semelhança com a natureza mais oscilatória dos países de sangue latino ou uma maior vocação para convergir para o *steady state* da gelada Noruega ou das terras da Rainha no Reino dos Cangurús é mera coincidência (provavelmente não é).

O mesmo vale para qualquer semelhança com os dados reais obtidos por *Harvie, D.* (2000). Novamente, lembro que rodei exatamente os mesmo dados com uma função para a curva de *Phillips* como especifiquei nos testes do modelo de Goodwin, com $\boldsymbol{m} = 4$. Como ja havia comentado, isso provocou um efeito redutor da natureza oscilatória da convergência.

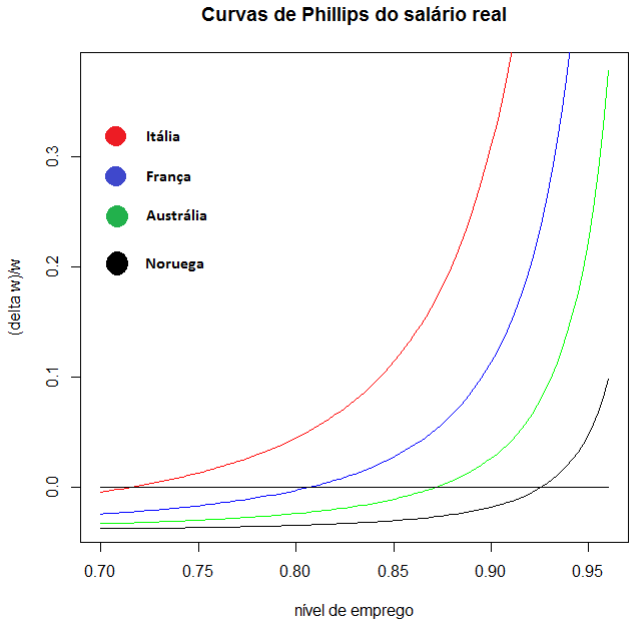
Usei uma função quadrática para ilustrar de forma mais acentuada a natureza oscilatória da convergência. Registrarei esse fato para nosso caso onde a oscilação é mais acentuada, a Itália.

Em seguida apresento o gráfico com a cara da função quadrática utilizada no exercício.

Dessa forma, estaremos exibindo simulações para uma curva de *Phillips* quadrática, exceto no caso da Itália onde apresento as simulações, para as mesmas perturbações com o modelo customizado para uma curva de *Phillips* mais achatada, com $\boldsymbol{m} = 4$.

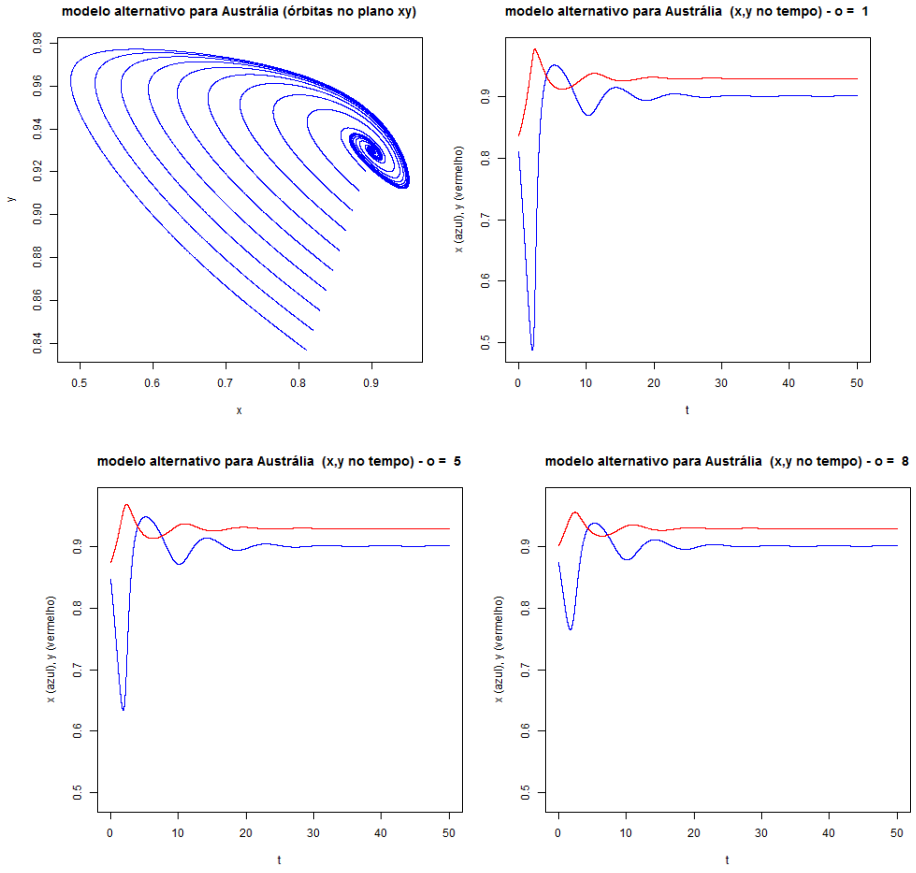
Novamente, registro que nosso modelo não parece estar bem calibrado quando

se trata da convergência das variáveis x e y quando afastamos y para um nível muito abaixo do nível de equilíbrio. Parece-me exagerada a trajetória da variável x, participação dos trabalhadores na renda, quando deslocamos via perturbação exógena o nível de emprego para valores significativamente abaixo do nível de emprego de equilíbrio. Os trabalhadores entregam renda de forma rápida, com vistas ao aumento do nível de emprego, significando que a queda dos salários é muito acentuada, fazendo com que a participação dos trabalhadores na renda caia de forma muito acentuada apesar do aumento de trabalhadores empregados, até o nível de emprego ficar alto. Também no modelo alterado o sistema parece ter mais aderência quando próximo do equilíbrio. Para efetuar tal calibragem seria necessário um estudo econométrico voltado para uma economia específica, de forma a encontrar a melhor expressão de sua curva de *Phillips* e da parametrização adequada da tecnologia que melhor representa sua função de produção agregada, bem como a evolução do progresso técnico. Esse não é o objetivo desse trabalho, onde estamos analisando de forma qualitativa o sistema dinâmico subjacente.

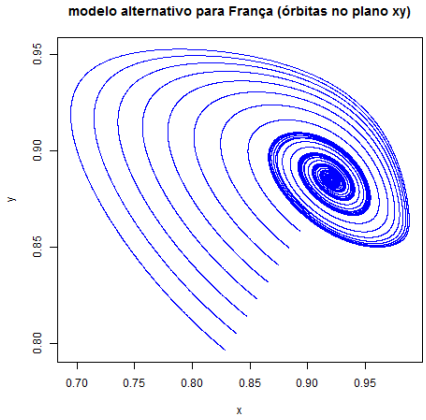


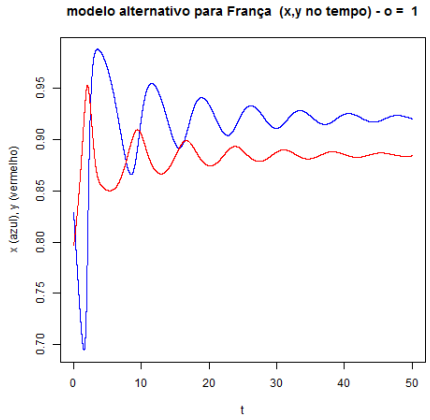
As 10 condições iniciais arbitradas foram obtidas multiplicando o equilíbrio de cada país por 0.90, 0.91, 0.92, 0.93, 0.94, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98 e 0.99. Os gráficos de x, y no tempo são relativos às órbitas associadas às perturbações associadas às condições iniciais 1 - 0.90 (x^*, y^*), 5 - 0.94 (x^*, y^*) e 8 - 0.97 (x^*, y^*) que correspondem respectivamente a: o = 1; o = 5 e o = 8.

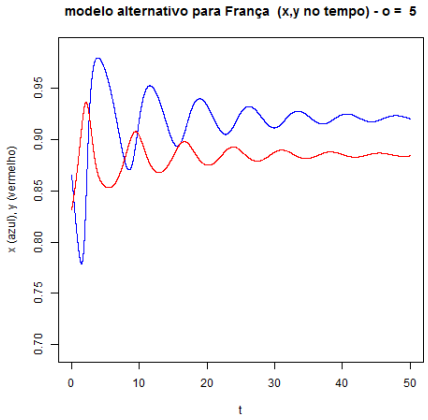
Austrália

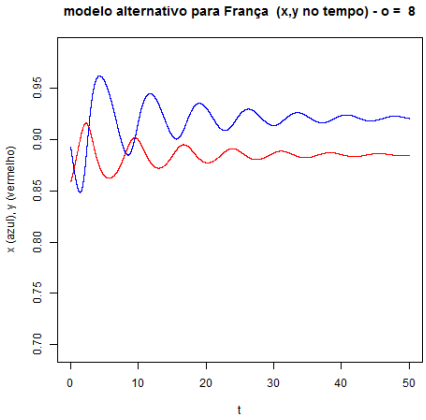


França

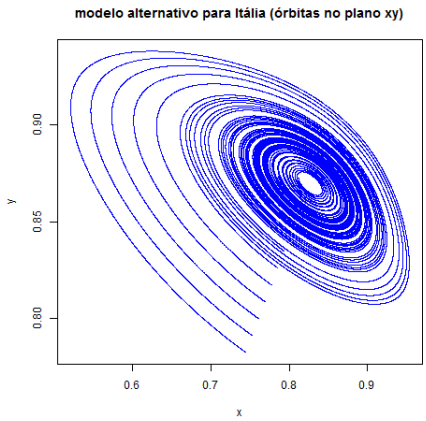

modelo alternativo para França (órbitas no plano xy)
y
x
0.80
0.85
0.90
0.95
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95

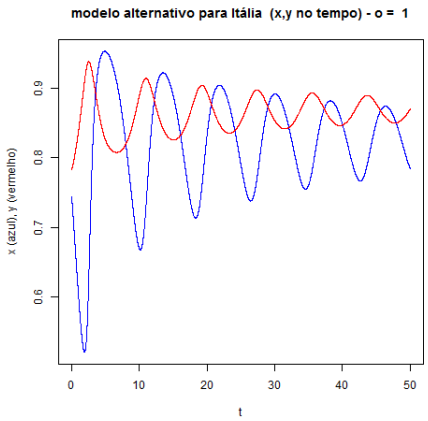

modelo alternativo para França (x,y no tempo) - o = 1
x (azul), y (vermelho)
t
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
0
10
20
30
40
50

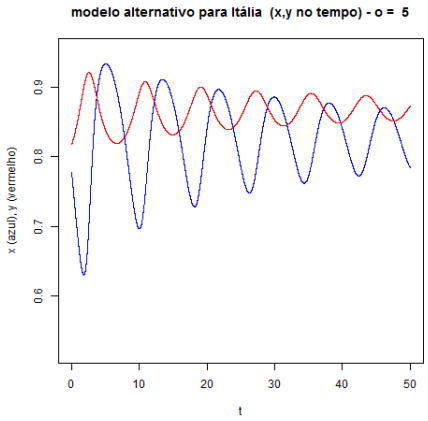

modelo alternativo para França (x,y no tempo) - o = 5
x (azul), y (vermelho)
t
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
0
10
20
30
40
50

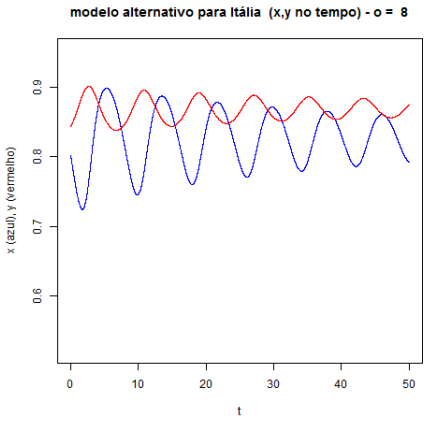

modelo alternativo para França (x,y no tempo) - o = 8
x (azul), y (vermelho)
t
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
0
10
20
30
40
50

Itália

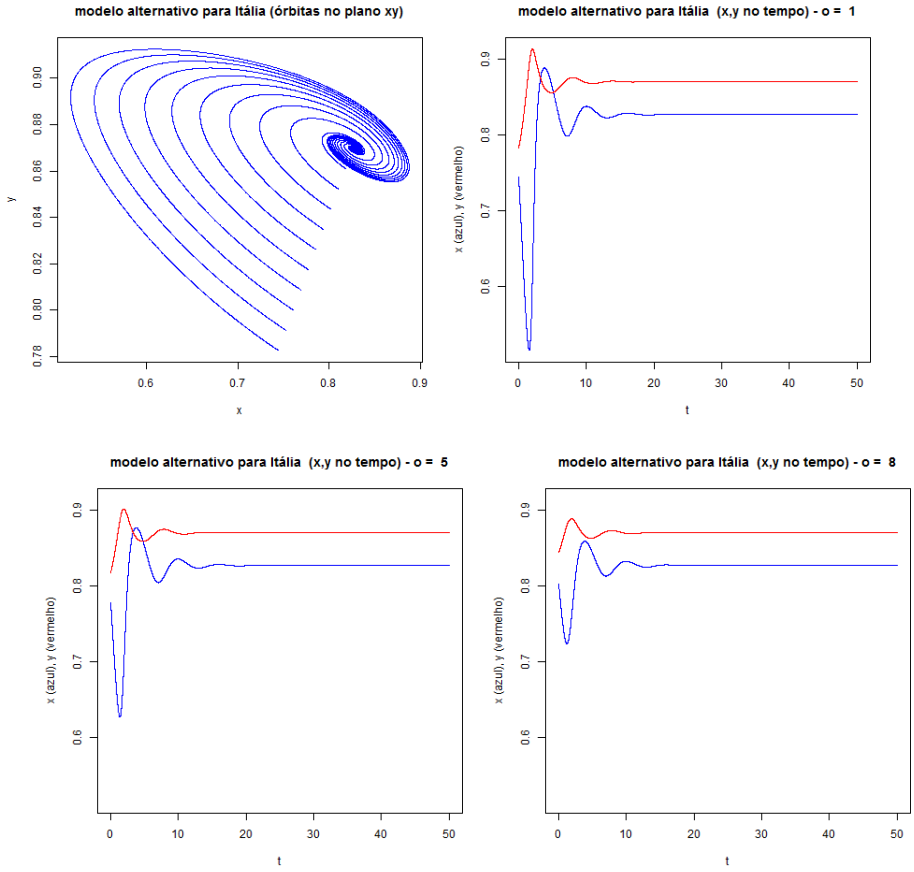

modelo alternativo para Itália (órbitas no plano xy)
y
x
0.80
0.85
0.90
0.6
0.7
0.8
0.9


modelo alternativo para Itália (x,y no tempo) - o = 1
x (azul), y (vermelho)
t
0.6
0.7
0.8
0.9
0
10
20
30
40
50

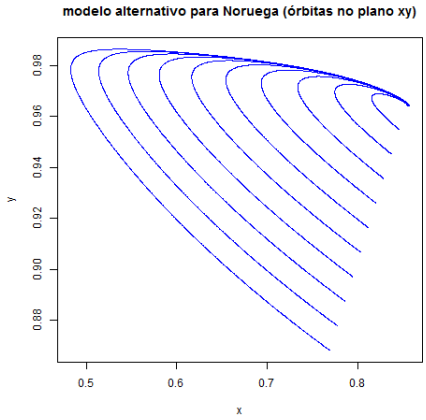

modelo alternativo para Itália (x,y no tempo) - o = 5
x (azul), y (vermelho)
t
0.6
0.7
0.8
0.9
0
10
20
30
40
50

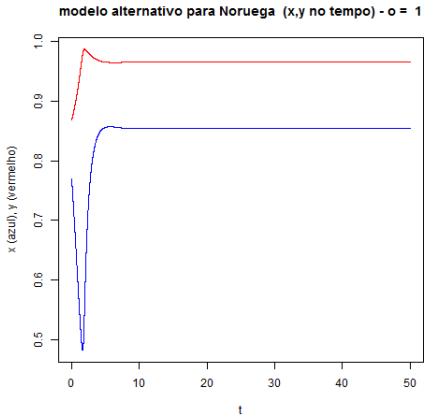

modelo alternativo para Itália (x,y no tempo) - o = 8
x (azul), y (vermelho)
t
0.6
0.7
0.8
0.9
0
10
20
30
40
50

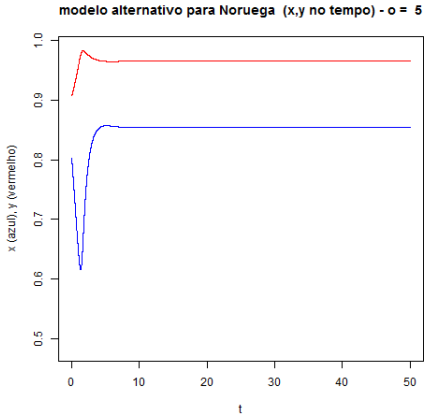
Itália com curva de *Phillips* com $m = 4$

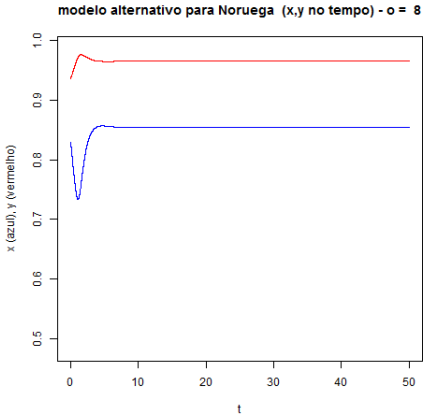


Noruega


modelo alternativo para Noruega (órbitas no plano xy)
y
x
0.88
0.90
0.92
0.94
0.96
0.98
0.5
0.6
0.7
0.8

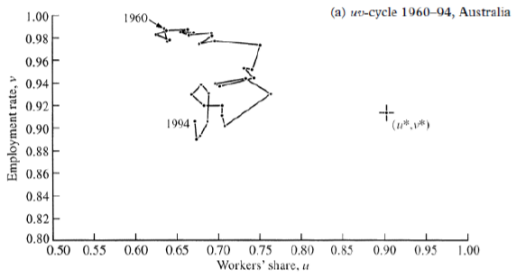

modelo alternativo para Noruega (x,y no tempo) - o = 1
x (azul), y (vermelho)
t
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0
10
20
30
40
50

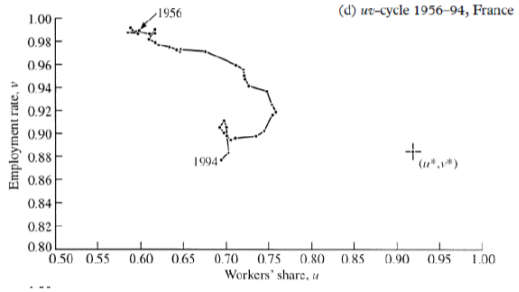

modelo alternativo para Noruega (x,y no tempo) - o = 5
x (azul), y (vermelho)
t
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0
10
20
30
40
50


modelo alternativo para Noruega (x,y no tempo) - o = 8
x (azul), y (vermelho)
t
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0
10
20
30
40
50

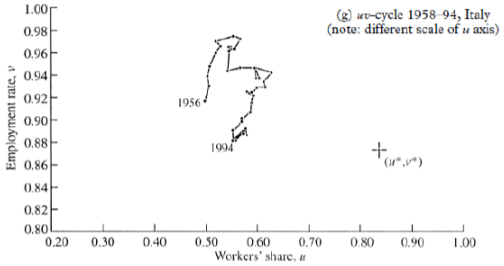
Dados empíricos para os quatro países selecionados exibidos por Harvie, D. (2000)

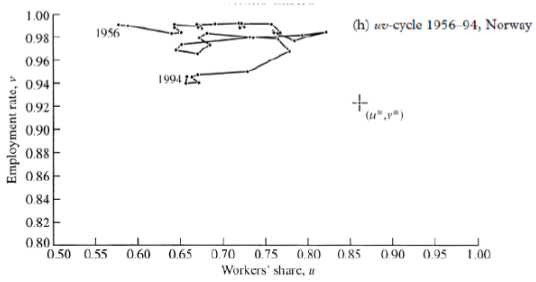
Austrália e França





Itália e Noruega





Capítulo 5

Comentários finais

Quando a assunção de uma razão capital produto constante é trocada pela hipótese de que as empresas maximizam lucro sujeitas a uma função de produção *CES*, ainda que endogeinizando a produtividade (usamos uma função de progresso técnico de forma a permitir que a produtividade do trabalho dependa do estoque de capital acumulado (K)), o mecanismo dos ciclos perpétuos de luta de classes desse modelo (*Goodwin* 1967) é substituído por ciclos amortecidos ou convergência monótona (função *CES* muito próxima à *Coob-Douglas*) para um equilíbrio de *Steady-State*. A lucratividade crescente ainda carrega a "semente de sua própria destruição" pelo ciclo - estímulo ao investimento, maior produto, maior nível de emprego, aumento do poder de barganha dos trabalhadores - e, em consequência, aumento do salário real, e consequente queda dos lucros que realimenta um ciclo a partir da queda do investimento, mas, em adição, as firmas substituem a contratação de novos trabalhadores pela instalação de mais capital ao longo do ciclo. É este fator adicional de "competição entre as espécies" que destrói a natureza conservativa do sistema de Goodwin, dando lugar às trajetórias assintoticamente estáveis que observamos em nosso modelo alternativo. Uma elasticidade de substituição entre fatores pequena, um efeito relativamente pequeno do "exército de reserva" no processo de barganha ou uma incompleta compensação dos aumentos de produtividade do trabalho aumentam a probabilidade de obtermos ciclos de conflito entre capital e trabalho do que uma convergência monótona para o equilíbrio nas trajetórias das soluções do sistema estudado.

O caso especial de não substitutibilidade entre fatores, isto é, uma função de produção *Leontief* leva ao nosso já conhecido modelo de *Goodwin* dos ciclos de conflito perpétuos, cujo período aumenta com a participação de equilíbrio dos lucros na renda (que cresce com a relação capital-produto e com a taxa natural de crescimento econômico) e diminuem com a incompleta compensação dos aumentos de produtividade oriundos do progresso técnico.

Os ciclos de crescimento obtidos com nosso modelo são clássicos no sentido em que impomos a "Lei de Say - a oferta cria sua própria demanda". A introdução de uma função de investimento independente cria alternativas ao

relaxamento da hipótese de relação capital produto constante permitindo variações na taxa de crescimento. Uma tal função dependerá das expectativas futuras da demanda efetiva e da taxa de lucro além dos fatores já assumidos em nossa modelagem. A vantagem desses relaxamentos em suas hipóteses é permitir uma maior capacidade do modelo para lidar com aspectos da economia real, tais como excesso de capacidade ou desemprego Keynesiano (assim como o neoclássico).

Outras possibilidades são a introdução de mecanismos modeladores das expectativas bem como da inflação e a existência ou não de ilusão monetária entre outros aspectos existentes numa economia real. Nosso objetivo aqui foi apenas fornecer uma maior fundamentação das escolhas efetuadas na modelagem alternativa que usamos para as simulações que fizemos, superando limitações do modelo original de *Goodwin*, mas mantendo a modelagem suficintemente simples para focar nos aspectos desejados. Os resultados são animadores no sentido de incorporarmos tais modificações em modelos mais complexos da economia, capturando a natureza cíclica endógena da economia capitalista que *Goodwin* quis enfatizar.

Capítulo 6

Conclusão

O modelo de Goodwin Predador-Presa é estruturalmente instável. Em sua forma pura, o modelo representa uma economia movendo-se em órbitas fechadas. Ploeg (1985) mostrou que relaxando a hipótese de uma tecnologia de proporções fixas chega-se a um equilíbrio estável. *Goodwin* (1991) mostrou que endogenizando-se o crescimento da produtividade obtem-se o efeito oposto. Segui de perto Aguiar-Conraria (2007) na análise dos dois efeitos sob um enfoque mais geral e concluí que o efeito estabilizador de introduzir substitutibilidade entre os fatores na função de produção é consideravelmente mais forte do que o efeito desestabilizador da endogenização do crescimento da produtividade. Apenas com a função de produção extremamente próxima de uma tecnologia *Leontief* o sistema gera oscilações explosivas. Devidamente alterado, o modelo de Goodwin não se afasta muito dos modelos do *main stream* que, em regra, trabalham com sistemas dinâmicos que convergem para o equilíbrio, embora estejam, via de regra, em desequilíbrio pela ocorrência de choques estocástícos. O Modelo obtido nos parece extremamente adequado a ser incorporado em modelos mais elaborados, com múltiplos setores, Governo e moeda, expectativas e mercado de crédito, entre outros aspectos de uma economia real, mantendo a simplicidade essencial da dinâmica capitalista construída por um mercado de trabalho modelado por uma curva de *Phillips* associado a uma função de produção agregada para esse mercado (setor) com as assunções clássicas de maximização de lucros por parte das firmas entre outras.

Referências Bibliográficas

[1] Aguiar, L.- Conraria. (2007). A Note on the Stability Properties of Goodwin's Predator-Prey Model. Review of Radical Political Economics

[2] Desai, M., A. Mosley and M.Pemberton (2006) A clarification of the Goodwin Model of the Growth cycle, Jounal of Economics Dynamics and Control

[3] Goodwin R. (1967) A Growth Cycle. In Socialism, Capitalism and Economics Growth ed. C. H. Feinstein Cambridge: Cambridge University Press

[4] Goodwin R. (1989) Essays in Nonlinear Economic Dynamics: Collected Papers 1980 - 1987: Frankfurt am Main: Verlag Petre Lang.

[5] ———— (1991) Economic evolution, chaotic dynamics and the Marx-Keynes-Schumpeter System

[6] Phillips, A. W. The relation between unemployment and the rate of change of money-wage rates in the United Kingdom, 1861-1957. Economica, v. 25, p. 283-99, Nov. 1958.

[7] Harvie, D. (2000) Testing Goodwin Growth Cycles in ten OECD countries. Cambridge Journal of Economics

[8] Ploeg, F. Van der. (1985) Classical Growth Cycles. Metroeconomica

[9] Aggarwal,J. K.: Notes on Nonlinear Systems Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972

[10] Gandolfo, G. Economic Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[11] Carvalho José Luis. Uma nota sobre a curva de Phillips. RBE, Rio de Janeiro, FGV, v. 29, set 1975.

[12] Shapiro, C. and Stiglitz, J. (1984) Equilibrium unemployment as a worker discipline device. American Economic Review 74 (3): 433-44

[13] Solow, R. M., (1990) Goodwin's growth cycle Reminiscence and rumination In Nonlinear and multisectoral macrodynamics: Essays in honour of Richard Goodwin.

[14] —– A Contribution to the Theory of Economic Growth, The Quartely Journal of Economics, 1956, pp. 65-94

[15] ——— The Labor market as a Social Institution. Blackwell (1990).

[16] Domar, E.D., Essays in the Theory of Economic Growth, Oxford University Press, 1957

[17] Harrod, R. F. Towards a Dynamic Economics, Macmillan, 1948.

[18] Sordi, S. (1999) Economic models and the relevance of chaotic regions: An application to Goodwin's growth cycle model. Annals of Operations Research 89 3-19

[19] Veneziani, R. (2001) Structural stability and Goodwin's " A Growth Cycle" A survey. London: London School of Economics and Political Sciences.

[20] Velupillai K. (Vela) "Richard M. Goodwin 1913–1996", The Economic Journal, Volume 108, Issue 450, pages 1436–1449, September 1998

[21] Acemoglu, Daron. Introduction to Modern economic Growth (2009). Princeton University Press.

[22] Simonsen, M. H. - Dinâmica Macroeconômica. McGraw - Hill (1983)

[23] Varian, H. R.- Microeconomics Analysis. Norton & Company, Inc. (1992)

Apêndice A

- Uma nota sobre a resolução das EDOs - Método Numérico RK44

Resolução de EDOs via Runge-Kutta 44

Considere o problema de valor inicial

$$u'(t) = f(t, u(t)) \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

$$u(t_0) = u_0$$

Seja n um número natural. Denotando o espaçamento uniforme por $h = \frac{t_f - t_0}{n}$ e a aproximação da funçãou no ponto $t_i = t_0 + ih$ por $u_i = (x_i, y_i)$, o método de Runge-Kutta de 4 estágios e de quarta ordem consiste no seguinte algoritmo iterativo (a ser realizado para $i = 1, \ldots, n$):

- $\kappa_1 \leftarrow f(t_i, u_i)$
- $\kappa_2 \leftarrow f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}\kappa_1)$
- $\kappa_3 \leftarrow f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}\kappa_2)$
- $\kappa_4 \leftarrow f(t_i + h, u_i + h\kappa_3)$
- $u_{i+1} \leftarrow u_i + \frac{h}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)$
- $t_{i+1} \leftarrow t_i + h$

Considerando a seguinte medida de erro na malha de espaçamento h (n subintervalos):

$$e(h) = \max_{i=0}^{n} ||u_i - u(t_i)||$$

onde $u(t_i)$ é a solução exata (conhecida) no ponto t_i, u_i é a aproximação obtida pelo método numérico e a norma utilizada é a norma infinito, isto é:

$$||(x, y)|| = \max\{|x|, |y|\}$$

dizemos que o método RK44 é de quarta ordem pois $e(h) = O(h^4)$, ou seja, para alguma constante C positiva e para valores pequenos de h, vale que:

$$e(h) \approx Ch^4$$