

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

*Espectro de Fourier - uma possibilidade para a Infoestética*

Valdivan Ribeiro

São Paulo  
2014

Valdivan Ribeiro

ESPECTRO DE FOURIER - UMA POSSIBILIDADE PARA A INFOESTÉTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, como requisito para obtenção do título de bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional com habilitação em Comunicação Científica.

Orientador : Prof. Dr. Wagner Souza e Silva - ECA - USP  
Co-orientador : Prof. Dr. Pedro da Silva Peixoto - IME - USP

São Paulo  
2014

# Agradecimentos

A Deus, por permitir a realização deste sonho!

Aos meus pais, Maria Vitória Ribeiro e Antonio Artur Ribeiro, que me ensinaram todos os valores essenciais para que eu me tornasse o que sou, como a honestidade e o respeito, e que devemos sempre arregaçar as mangas e lutar pelo que queremos. Amo vocês!

Aos meus irmãos, Claudivan Ribeiro e Valdiana Ribeiro, pelo carinho e o constante apoio, aprendo muito com vocês.

A meu orientador Wagner Souza e Silva e co-orientador Pedro da Silva Peixoto, pela paciência e compreensão e por toda a atenção a mim dedicada durante a realização deste trabalho.

## Resumo

Nas últimas décadas, com a evolução da tecnologia digital e de uma nova expansão no campo da informação, geram-se novas aplicações na área de Processamento Digital de Imagens (PDI). Este trabalho apresenta um estudo sobre a imagem em seu campo de processamento digital. Serão abordados quatro temas principais: o primeiro vem da necessidade de mapear alguns aspectos da história da imagem em seu processo evolutivo; o segundo, parte do momento em que ela passa a ser processada por computadores, gerando-se aplicações importantes em diversas áreas; o terceiro, estuda a matemática de Fourier, mais especificamente a Transformada Discreta de Fourier, que, quando aplicado à imagem, gera um novo plano espectral de visualização; por fim, tentaremos conciliar tal espectro de Fourier à teoria da Infoestética, de Lev Manovich, que opera sob a mesma lógica de busca de novos planos de visualização de dados imagéticos.

**Palavras-chave:** Infoestética; Lev Manovich, Transformada de Fourier; Processamento Digital de Imagens;

## Abstract

In recent decades, with the evolution of digital technology and a new expansion in the field of information are generated new applications in the area of Digital Image Processing (DIP). This paper presents a study of the image in its field of digital processing. Four main topics will be discussed: the first is the need to map some aspects of the history of the image in its evolutionary process; the second part of the time when it is being processed by computers, generating important applications in different areas; the third, studies Fourier mathematics, more specifically the Discrete Fourier Transform, which when applied to the image generates a new spectral plan view; Finally, try to reconcile ta Fourier spectrum of the theory of infosthetics, Lev Manovich, which operates under the same logic of seeking new plans visualization of imagery data.

**Key-words:** Infosthetics; Lev Manovich, Fourier Transform; Digital Image Processing;

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fundamentos de Imagens Digitais</b>	<b>2</b>
1.1 História da fotografia . . . . .	2
1.1.1 A Heliografia de Niépce . . . . .	3
1.1.2 Fotografia Colorida . . . . .	3
1.1.3 Primeira Imagem Digital . . . . .	4
1.2 A Imagem Digital . . . . .	5
1.2.1 Aquisição . . . . .	5
1.2.2 Representação . . . . .	6
1.2.3 Amostragem . . . . .	7
1.2.4 Quantização . . . . .	8
1.2.5 Imagem PGM . . . . .	9
<b>2 Processamento de Imagens Digitais</b>	<b>11</b>
2.1 Operações com Imagens . . . . .	11
2.1.1 Filtros . . . . .	11
2.1.2 Histograma . . . . .	15
2.2 Softwares . . . . .	15
2.3 Aplicações . . . . .	16
<b>3 Espectro de Fourier</b>	<b>18</b>
3.1 Séries de Fourier . . . . .	18
3.1.1 Série Trigonométrica de Fourier . . . . .	18
3.1.2 Série Exponencial de Fourier . . . . .	23
3.2 Transformada de Fourier . . . . .	25
3.2.1 Transformada Discreta de Fourier Unidimensional (TDF-1D) . . . . .	25
3.2.2 Transformada Discreta de Fourier Bidimensional (TDF-2D) . . . . .	32
3.3 Espectro: Um novo domínio, uma nova Imagem . . . . .	37
3.3.1 Transformação Log . . . . .	37
3.3.2 A Imagem e sua nova Reprodução Estética . . . . .	39
<b>4 Processamento das imagens na era da infoestética</b>	<b>42</b>
<b>Considerações finais</b>	<b>48</b>

## Lista de Figuras

1	Camara escura. . . . .	2
2	Heliografia de Niépce: Placa e a Primeira fotografia de 1826. . . . .	3
3	Primeira imagem colorida. . . . .	4
4	(a) Primeira imagem digital (b) Kirsch trabalhando no computador. . . . .	5
5	O Processo de aquisição e formação da Imagem Digital. . . . .	5
6	Exemplo de imagem no sistema de coordenadas $\mathbb{R}^2$ . . . . .	6
7	Processo de amostragem. . . . .	7
8	Processo de quantização. . . . .	8
9	Imagens da Lenna: (a) $L = 16$ , (b) $L = 8$ e (c) $L = 2$ (imagem binária). . . . .	9
10	Modelo de imagem pgm . . . . .	10
11	Modelo de aplicação da máscara na imagem. . . . .	11
12	Imagem com Ruído. . . . .	12
13	Aplicação do Filtro da Média com máscara (a) $3 \times 3$ , (b) $5 \times 5$ , (c) $7 \times 7$ . . . . .	13
14	Máscara Norte e Leste. . . . .	13
15	Máscara Sul e Oeste. . . . .	14
16	(a) Imagem original (b) Filtro Laplaciano. . . . .	14
17	Modelo de Histograma. . . . .	15
18	Histograma com informação de contraste. . . . .	15
19	Display do ImageJ. . . . .	16
20	Gráfico do sinal contínuo $f(t)$ . . . . .	28
21	Gráfico da Amostragem $f_k$ . . . . .	28
22	Gráfico do Ruído Aleatório. . . . .	29
23	Gráfico de $f_k$ somado do Ruído. . . . .	29
24	Espectro de Fourier $ \mathcal{F}\{f_k\}  =  F(n) $ . . . . .	30
25	Espectro de Fourier Filtrado $ \widehat{F}(n) $ . . . . .	31
26	Sinal $f_k$ corrigido e recuperado. . . . .	31
27	Representação de uma imagem periódica. . . . .	34
28	Curva da transformação log. . . . .	37
29	(a) Espectro de Fourier $ F(n, m) $ (b) $D(n, m)$ . . . . .	38
30	Plotagem da imagem (a) e do Espectro de Fourier (b) em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	41
31	Pablo Picasso, litografias da série “O touro” (1945). . . . .	43
32	Mosaico de Nova York. . . . .	44
33	Mosaico de Tóquio. . . . .	44
34	Imagens formando uma circunferência. . . . .	45
35	Imagens formando uma espiral. . . . .	46

# Introdução

Hoje em dia vivemos em uma sociedade que avança constantemente, buscando a modernização. Na era em que nos encontramos, com os computadores sendo cada vez mais controlados e dominados pelo homem e vice-versa, gera-se uma expansão convergente da tecnologia digital, que abre um campo cada vez maior na área de processamento de imagens digitais. A imagem passa a ser cada vez mais dependente desta tecnologia, nela é gerada, processada, armazenada, "transformada" e transmitida. O avanço das tecnologias digitais trouxeram junto a internet, que nos bombardeiam com excesso de informações. E é aqui que Lev Manovich, fundamenta a era da Infoestética, propondo uma nova forma de visualização de dados, buscando olhar a informação sob um novo ângulo afim de compreendê-la melhor. Com vários trabalhos feitos, ele aposta no processamento de imagens em larga escala.

Vamos estudar o processamento de imagens baseando-se na análise de Fourier, que hoje é muito usada para melhorar a qualidade visual das imagens através de filtros no domínio da frequência. Mas aqui estamos interessados em buscar uma nova estética visual, trazendo a imagem para um novo plano de visualização, no domínio da frequência.

O trabalho irá fundamentar-se na expansão das tecnologias digitais para o processamento da imagem, esta que pode ser usada como uma mensagem, uma informação ou um conjunto de informações. Será pensando por este ângulo, que a nossa proposta de produção estética poderá ser comparada com as que já estão sendo modeladas neste período. Primeiramente, há a necessidade de mapear os marcos importantes no processo evolutivo da imagem na fotografia, que buscaram sempre fidelizar a representação do objeto em cena. No segundo capítulo, apontaremos alguns fundamentos e técnicas matemáticas para tratar e com isso melhorar a informação visual da imagem. Já no terceiro capítulo, observando especificamente um desses modelos matemáticos, da "Transformada de Fourier", entraremos num esboço do que pode ser uma tendência estética, que carrega a lógica de transformar as imagens, a fim de produzir novos planos de visualização.

O objetivo do trabalho é mostrar a representação prática e teórica do Espectro de Fourier como um novo plano de visualização imagético, gerando uma possibilidade de infoestética sob a lógica fundamentada por Lev Manovich, que propõe novas formas de visualização de dados, afim de compreender melhor e dar sentido maior à informação.

# 1 Fundamentos de Imagens Digitais

## 1.1 História da fotografia

O início da fotografia se define numa síntese de várias observações e inventos em momentos distintos. Muitas experiências de alquimistas, físicos e químicos sobre a ação da luz, foram de extrema relevância no contexto da fixação de imagens. Por isso, não existe um único inventor: as descobertas se entrelaçam no mundo de domínio da fotoquímica.

Os princípios óticos da descoberta vieram dos conhecimentos físicos de Aristóteles, antes de Cristo, quando sentado sob uma árvore, observou a imagem do sol, durante um eclipse parcial, projetando-se no solo em forma de meia lua. Quando seus raios passaram por um pequeno orifício entre as folhas, observou também que quanto menor fosse o orifício, mais nítida era a imagem.

Este conhecimento ficou "esquecido" durante séculos, tendo sido, mais tarde, aproveitado por um erudito árabe Alhazem. Ele descobriu como se formavam as imagens no interior de sua tenda quando a luz do sol passavam pelas frestas do tecido e com isso veio a primeira descoberta importante para o princípio da fotografia, a "Câmara Escura".

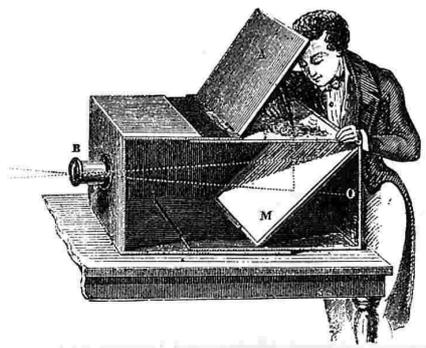


Figura 1: Camara escura.

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Câmera\\_escura](http://pt.wikipedia.org/wiki/Câmera_escura)

Alhazem descreveu a câmara escura em princípios do século XI. Trata-se de um fenômeno de natureza física, que consiste numa caixa como na figura (1), com um orifício indicado por (R), onde passam os raios luminosos vindos do objeto e são projetados no anteparo indicado por (M), esta projeção produz uma imagem real invertida do objeto na superfície.

Os pintores, de diferentes épocas, se utilizaram desse objeto para auxiliar na execução de desenhos e pinturas. Mais tarde foram acrescentadas outras invenções à camera escura, como a lente biconvexa junto ao orifício, introduzido pelo cientista Giralamo Cardano em 1550, com o intuito de aumentar a nitidez da imagem, sem perder a escuridão necessária para uma boa visualização

Nesta altura, a câmara escura já tinha se difundido entre os artistas e intelectuais da época, pois havia condições de formar uma imagem satisfatoriamente controlável, e gravar essa imagem diretamente sobre o papel sem intermédio do artista era a nova meta, só alcançada mais tarde com o desenvolvimento da química. (Kodak, 2014).

### 1.1.1 A Heliografia de Niépce

Joseph Nicéphore Niépce (1765-1833) começou seus experimentos fotográficos em 1793, junto com o seu irmão Claude, oficial da marinha francesa, durante uma temporada em Cagliari. Tentava obter imagens gravadas quimicamente com a câmara escura, mas as imagens desapareciam rapidamente gerando sua primeira curiosidade no assunto. Na época, a litografia era bastante popular na França, e como ele não tinha habilidades como desenhista, resolveu investir, estudando o aprimoramento de um novo método de reprodução de imagens permanentes através da câmara escura sobre o material litográfico utilizado na imprensa (1813).

Começando suas experiências, recobriu um papel com cloreto de prata e expôs durante várias horas na câmara escura, obtendo uma fraca imagem parcialmente fixadas com ácido nítrico. Como essas imagens eram em negativo, e Niépce, pelo contrário, queria imagens positivas que pudessem ser utilizadas como placa de impressão, determinou-se a realizar novas tentativas. Foi quando em 1826, Niépce recobriu uma placa de estanho com betume branco da Judéia que tinha a propriedade de se endurecer quando atingido pela luz. Nas partes não afetadas, o betume era retirado com uma solução de essência de alfazema. Expondo uma dessas placas durante 8 horas na sua câmara escura fabricada pelo ótico parisiense Chevalier, conseguiu uma imagem da vista da janela de seu estúdio. Onde todas as autoridades na matéria a consideraram como "a primeira fotografia permanente do mundo".



Figura 2: Heliografia de Niépce: Placa e a Primeira fotografia de 1826.  
<http://www.nyklewicz.com/273/hybrid/history.html>

Esse processo foi batizado por Niépce como Heliografia, gravura com a luz solar. A história da fotografia está, portanto, diretamente ligada ao estudo da luz e dos fenômenos óticos unidos à química.

### 1.1.2 Fotografia Colorida

Vimos que os anos de 1800 foram marcados pelos experimentos com resultados decisivos na fotografia, foi neste período que continuaram com a ideia de colocar mais “vida” nas imagens através das cores. Já existiam pessoas especializadas em colorir fotos pintando-as, mas nenhuma técnica conseguia fixar e nem impedir que as cores enfraquecessem.

Em 1861, 35 anos depois do primeiro registro da fotografia de Niépce, James Clerk Maxwell, físico, filósofo e matemático apresentou a primeira Fotografia em cores do mundo, exibindo numa palestra no Instituto Real de Londres, no Reino Unido.

Trata-se da imagem da fita tartã, que foi feita na verdade por Thomas Sutton, mas sob as instruções de Maxwell. A coloração era obtida por uma composição de três imagens monocromáticas tomadas através de filtros vermelhos, verdes e azuis. Ele projetou essas imagens a partir de três lanternas, cada uma com um filtro de cor diferente e uma contra as outras, com isso a imagem colorida foi produzida.



Figura 3: Primeira imagem colorida.

<http://focusfoto.com.br/primeira-fotografia-colorida-faz-150-anos/>

Como se descobriu muito mais tarde, o experimento não deveria ter funcionado. Sutton usou emulsões (o material sensível à luz para cobrir as lanternas) insensíveis à luz vermelha. Felizmente, porém, o tecido vermelho na fita tartã também refletia ultravioleta, e o experimento acabou dando certo mesmo com esse contratempo. (LEITE, 2011).

Maxwell deu o primeiro grande passo a caminho do mundo das fotos coloridas e merece o crédito por ter inventado o método das três cores que é a base para praticamente todos os processos atuais de coloração de imagens, sejam químicos ou digitais.

### 1.1.3 Primeira Imagem Digital

A primeira imagem considerada "digital" nasceu do interesse de um americano que teve a ideia, em 1957, de fazer com que os computadores pudessem "olhar para as imagens". Russell Kirsch, considerado um dos pioneiros da computação, juntamente com outros colegas, construiu um certo tipo de scanner com um tambor rotativo. A mesma equipe já tinha desenvolvido o Standards Eastern Automatic Computer (SEAC), considerado o primeiro computador programável.

Eles conseguiram fazer com que a máquina pudesse traduzir uma imagem em códigos numéricos e, assim, pudesse ser armazenada digitalmente num computador. A imagem capturada tinha baixíssima resolução, apenas 176x176 pixels (5 x 5 cm), devido a pouca capacidade de armazenamento do equipamento. A imagem foi gerada a partir de uma foto do filho de Kirsch de apenas 3 meses de idade, chamado Walden.

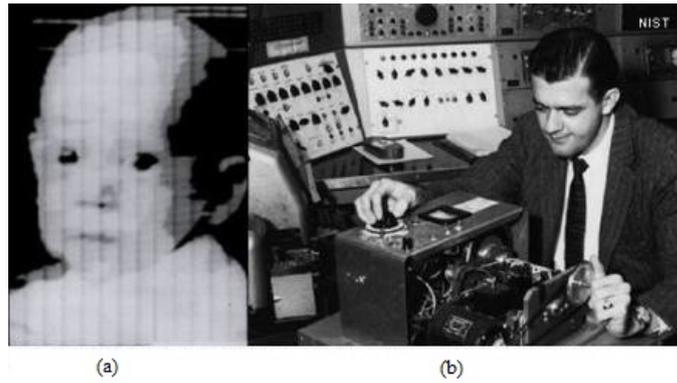


Figura 4: (a) Primeira imagem digital (b) Kirsch trabalhando no computador.  
<http://aconteceomundovirtual.blogspot.com.br/2008/04/um-mundo-de-imagens.html>

Apesar de a primeira câmera digital ter sido inventada em 1975, a primeira imagem digital da história foi obtida três décadas antes.

## 1.2 A Imagem Digital

### 1.2.1 Aquisição

O processo de formação de uma imagem digital consiste em fazer a discretização do ambiente do analógico tridimensional para o digital bidimensional. São dois os processos envolvidos, o de amostragem, onde a imagem é compactada e dividida em vários pontos nas dimensões da resolução da camera, chamados pixels, e o processo de quantização, onde cada pixel recebe um valor proporcional a intensidade de cor e iluminação. A figura abaixo ilustra um dos processos mais comuns de aquisição da imagem digital.

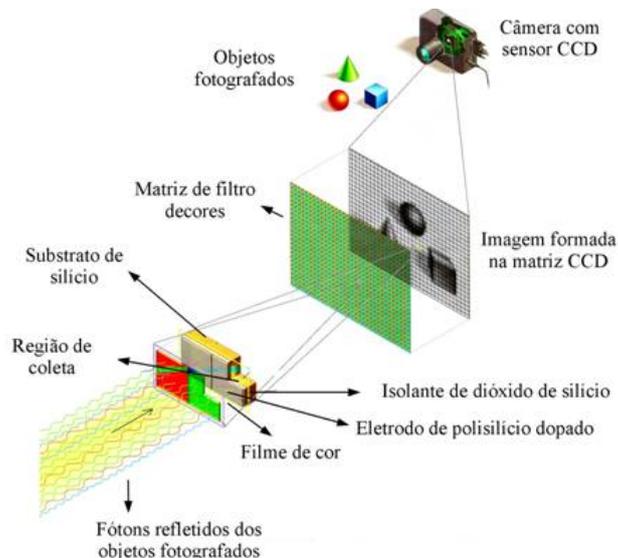


Figura 5: O Processo de aquisição e formação da Imagem Digital.  
 Fonte: <http://www.sm2000.coppe.ufrj.br/mirror/sarra/artigos/artigo10297>

### 1.2.2 Representação

Vamos definir a imagem como uma função bidimensional e será denotada por funções da forma  $f(x, y)$ . O valor ou amplitude de  $f$  em coordenadas espaciais  $(x, y)$  é uma quantidade escalar positiva, onde o significado físico é determinado pela fonte da imagem. As imagens em que estamos interessados em trabalhar são imagens monocromáticas por ser simples e facilitar a parte matemática. Onde seus valores são denominados escala de cinza. Quando uma imagem é gerada a partir de um processo físico, os seus valores são proporcionais à energia irradiada por uma fonte física (por exemplo, ondas electromagnéticas). Como consequência,  $f(x, y)$  tem que ser diferente de zero e finito; isto é,

$$0 < f(x, y) < \infty ;$$

A função  $f(x, y)$  pode ser caracterizado por dois componentes: (1) quantidade de fonte de iluminação incidente sobre a cena que está sendo vista, e (2) a quantidade de iluminação refletida pelos objetos na cena. Estes são chamados de componentes de iluminação e reflectância e são definidos por  $i(x, y)$  e  $r(x, y)$ , respectivamente. Combinamos as duas funções como um produto para formar  $f(x, y)$ : (GONZALEZ e WOODS, 2002).

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad \text{onde} \quad \begin{cases} 0 < i(x, y) < \infty \\ 0 < r(x, y) < 1 \end{cases} ;$$

Uma imagem monocromática é uma função de intensidade de luz bidimensional  $f(x, y)$ , onde  $x$  e  $y$  denotam coordenadas espaciais e o valor de  $f$  no ponto  $(x, y)$  é proporcional ao brilho (ou nível de cinza) da imagem neste ponto. Mais a frente detalharemos essas imagens no formato pgm (portable graymap). Observemos a imagem<sup>1</sup> a seguir.



Figura 6: Exemplo de imagem no sistema de coordenadas  $\mathbb{R}^2$ .  
[http://scien.stanford.edu/pages/labsite/scien\\_test\\_images\\_videos.php](http://scien.stanford.edu/pages/labsite/scien_test_images_videos.php)

---

<sup>1</sup>Imagem da 'Lena' ou 'Lenna' é uma página digitalizada da Playboy, de novembro de 1972. É sem dúvida, uma das mais usadas na área de processamento digital de imagens, é frequentemente usada em algoritmos de testes. Sua história em <http://www.ee.cityu.edu.hk/~lmpo/lenna/Lenna97.html>

### 1.2.3 Amostragem

Amostragem é a escolha de um ponto dentro de um espaço, ou melhor, a escolha de um conjunto de pontos dentro de um espaço real que irão compor a imagem digital. Definir a amostragem é conseguir selecionar uma quantidade finita de pontos de uma imagem com infinitos pontos, em outras palavras, é conseguir selecionar pequenos conjuntos de espaços de forma que, devidamente arranjados, estes conjuntos se tornem a imagem discretizada, que é uma aproximação da imagem.

A amostragem está diretamente ligada com a quantidade de informação que se deseja guardar. Quanto maior a amostragem, mais detalhes teremos e conseqüentemente maior será o espaço necessário para o armazenamento. Para execução da amostragem sobre uma imagem real, faz-se necessário definirmos uma grade, matriz de amostragem de tamanho  $N \times M$ . Essa grade é aplicada sobre a imagem de forma que cada elemento da grade, da matriz contenha uma sub-imagem.

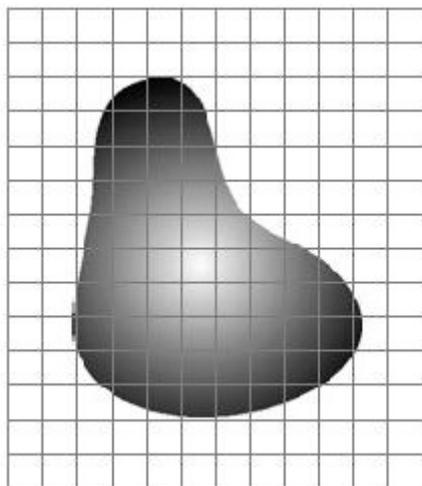


Figura 7: Processo de amostragem.  
(GONZALEZ e WOODS, 2002).

Assim cada sub-imagem será um novo elemento da imagem e podemos representar este conjunto em forma de matriz.

$$\mathbf{f}_{k,l} = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,M-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N-2,0) & f(N-2,1) & \dots & f(N-2,M-1) \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \dots & f(N-1,M-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde  $f_{k,l} = f(k,l)$ ,  $k,l \in \mathbb{N}$  e  $N$  é o número de linhas e  $M$  o número de colunas da imagem.

O conjunto de elementos  $f(x, y)$  é uma amostragem da imagem original. Para cada elemento da matriz, serão atribuídos um valor referente a sua cor, processo conhecido como quantização.

#### 1.2.4 Quantização

O processo de quantização leva em conta cada uma das cores dentro de uma sub-imagem e escolhe uma. Existem diversas técnicas de quantização de cor dentro de um espaço. Basicamente, o que estas técnicas fazem é buscar uma cor média que consiga representar bem as cores de um espaço delimitado. Segue abaixo uma ilustração de quantização:

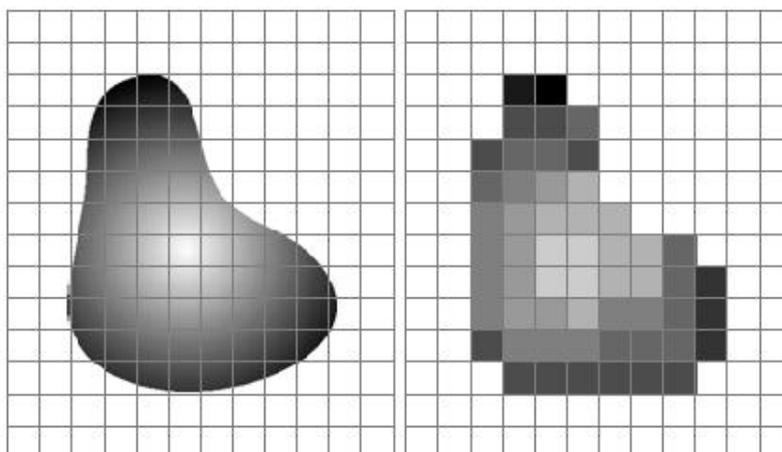


Figura 8: Processo de quantização.  
(GONZALEZ e WOODS, 2002).

Na primeira imagem temos a imagem original com a grade de amostragem aplicada, na segunda temos a imagem quantizada, e ainda com a grade de amostragem para ilustrar melhor. Conforme pode ser visualizado na figura (8), na transformada para o domínio digital é perdida informação devido a perda de continuidade do objeto, causado pela discretização (Amostragem e Quantização). Dessa forma, quanto maior a quantidade de pontos, maior será a fidelidade da imagem digital com a real. Por este motivo, câmeras digitais com maior quantidade de pixels comercialmente chamado de Megapixels ( $10^6$  pixels), são as melhores.

Mais a fundo, a quantização mapeia os valores reais dos pixels em números inteiros positivos,  $L$ , este denominado escala de cinza.

$$L = 2^b ;$$

onde  $b$  é o número de bits<sup>2</sup> necessários para representar cada pixel da imagem (profundidade da imagem).

Usando 8 bits gera-se uma imagem com representação  $L = 2^8 = 256$  escalas de cinza, que vão de 0 a 255 e a imagem será composta por  $N \times M \times 8$  bits ou  $N \times M$  bytes<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Os computadores "entendem" impulsos elétricos, positivos ou negativos, que são representados por 1 ou 0. A cada impulso elétrico damos o nome de bit (**B**inary **digi**T). <http://www.infowester.com/bit.php>

<sup>3</sup>Um conjunto de 8 bits reunidos como uma única unidade forma um byte.

Para melhor ilustrar, foi usado diferentes bits para uma mesma imagem e comparar a influência disso na representação e resolução.

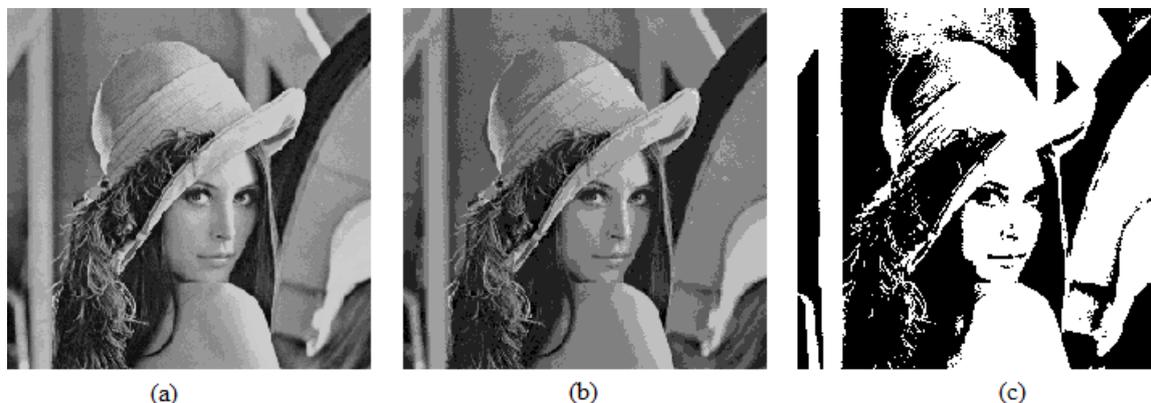


Figura 9: Imagens da Lenna: (a)  $L = 16$ , (b)  $L = 8$  e (c)  $L = 2$  (imagem binária).  
<http://www.ic.unicamp.br/cpg/material-didatico/mo815/9802/curso/node7.html>

### 1.2.5 Imagem PGM

O formato PGM (portable graymap) é um exemplo de imagens monocromáticas. Arquivos pgm tem duas variações, uma binária e outra textual. Em ambos os casos, este tipo de arquivo contém um cabeçalho e uma matriz correspondente à imagem.

O exemplo a seguir mostra um arquivo PGM textual:

```
P2
# feep.pgm
24 7
15
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 3 3 3 3 0 0 7 7 7 7 0 0 11 11 11 11 0 0 15 15 15 15 0
0 3 0 0 0 0 0 7 0 0 0 0 0 11 0 0 0 0 0 15 0 0 15 0
0 3 3 3 0 0 0 7 7 7 0 0 0 11 11 11 0 0 0 15 15 15 15 0
0 3 0 0 0 0 0 7 0 0 0 0 0 11 0 0 0 0 0 15 0 0 0 0
0 3 0 0 0 0 0 7 7 7 7 0 0 11 11 11 11 0 0 15 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

A primeira linha indica o formato (P5 ou P2). A segunda linha por começar com # indica um comentário, a terceira linha indica o tamanho horizontal ( $M$ ) e vertical ( $N$ ) da imagem, e a quarta linha representa o número máximo de níveis de cinza ( $L - 1$ ). A partir da quinta linha seguem os brilhos dos pixels. Nas imagens P5, os brilhos estão no formato binário, e cada byte representa o brilho de um pixel. Nas imagens P2, os brilhos estão no formato texto, onde cada número inteiro representa o brilho de um pixel, e os brilhos estão separados por espaços em branco. (TORRES, 2006).

Os valores de brilho começam na posição  $(0, 0)$  no canto superior esquerdo e vão até a posição  $(N - 1, M - 1)$  no canto inferior direito como indicado na representação matricial

de (1).

A representação textual dos dados acima gera a imagem abaixo:



Figura 10: Modelo de imagem pgm

Trabalharemos com estas imagens pela fácil manipulação matemática, por ser entendível como uma matriz em  $\mathbb{C}^{N \times M}$ .

## 2 Processamento de Imagens Digitais

A área de Processamento Digital de Imagens, ao longo dos anos, tem se tornado cada vez mais abrangente por permitir viabilizar grande número de aplicações em diversas áreas.

Em 1964, com o advento dos primeiros computadores digitais de grande porte e o início do programa espacial norte-americano, as pesquisas em Processamento de Imagens Digitais tiveram um crescimento enorme dando um grande salto. Foi quando imagens da Lua, transmitidas pela Sonda Ranger 7, foram processadas por um computador com intuito de corrigir várias imperfeições e melhorar na visualização. Com isso, a área começou a ser reconhecida pelo seu potencial de otimização na qualidade da informação, melhorando os aspectos visuais para a interpretação humana. E desde então, os pesquisadores em PDI desenvolveram-se vários métodos matemáticos e técnicas computacionais para esta área de processamento de Imagens.

### 2.1 Operações com Imagens

#### 2.1.1 Filtros

São processos que tem por finalidade enfatizar alguns aspectos em imagens digitais ou corrigir imperfeições como ruídos. Estas imperfeições por exemplo, podem ter sido geradas nas imagens pelo processo de aquisição, durante a amostragem e quantização, ou muitos outros fatores.

As técnicas de filtragem são transformações da imagem pixel a pixel, que não dependem apenas do nível de cinza de um determinado pixel, mas também do valor dos níveis de cinza dos pixels vizinhos, na imagem original. O processo de filtragem é feito utilizando-se matrizes denominadas **máscaras**, as quais são aplicadas sobre a imagem.

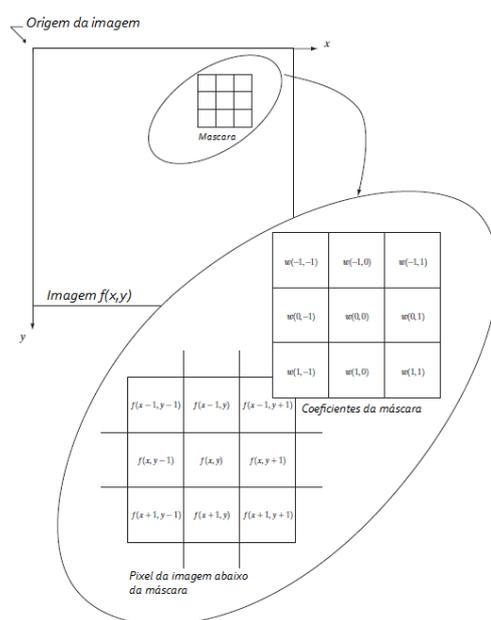


Figura 11: Modelo de aplicação da máscara na imagem.  
(GONZALEZ e WOODS, 2002).

Sua aplicação se dá através de uma convolução.

$$f_{k,l}(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f_{k,l}(x + s, y + t);$$

onde considerando uma vizinhança ímpar com  $n, m$  definimos  $a = \frac{n-1}{2}$  e  $b = \frac{m-1}{2}$ .

Os filtros são classificados como passa-baixa ou passa-alta, dependendo da frequência dos detalhes eliminados ou mantidos na imagem.

**Passa-Baixa** Um filtro do tipo passa-baixa, como o próprio nome já diz, permite que as baixas frequências passem, eliminando porém, os valores relacionados às altas frequências. Com isso, se obtém o efeito de suavização da imagem, uma vez que as altas frequências que correspondem às transições bruscas são atenuadas. A suavização tende pelo mesmo motivo, diminuir o ruído em imagens. O filtro da média é um exemplo clássico de uma filtragem passa-baixas.

Para as vizinhanças  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$ , por exemplo, as máscaras são:

$$\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{25} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{49} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

O exemplo abaixo mostra uma imagem com ruído figura (12) e em seguida temos, na figura (13), suas versões processadas com as 3 máscaras definidas logo acima.



Figura 12: Imagem com Ruído.  
(Método Salt and Pepper no ImageJ).



Figura 13: Aplicação do Filtro da Média com máscara (a)  $3 \times 3$ , (b)  $5 \times 5$ , (c)  $7 \times 7$ .

**Passa-Alta** Ao contrário do do filtro passa-baixa, um filtro passa-alta deixa passar as altas frequências, mas acaba eliminando os valores relacionados às baixas frequências e com isso se obtém o efeito visual mais nítido de regiões de forte gradiente, tornando as transições entre diferentes regiões da imagem mais nítidas. Se houver ruído na imagem, ao aplicar este tipo de filtro, o ruído será enfatizado ainda mais.

As máscaras abaixo são utilizadas para o realçamento de bordas em vários sentidos. O nome dado às máscaras indica a direção ortogonal preferencial em que será realçado o limite de borda. Assim, a máscara norte realça limites horizontais:

$$\begin{array}{cccc}
 \textit{Norte} & \textit{Leste} & \textit{Sul} & \textit{Oeste} \\
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right|;
 \end{array}$$

Aplicando as máscaras acima à figura da Lena original temos



Figura 14: Máscara Norte e Leste.



Figura 15: Máscara Sul e Oeste.

O Laplaciano<sup>4</sup> 2-D de uma função  $f$  é um operador diferencial dado por:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

Para o caso discreto, podemos mostrar que

$$\nabla^2 f(x, y) = [f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y - 1) + f(x, y + 1)] - 4f(x, y);$$

o que corresponde a uma convolução de  $f$  com a máscara  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ;



Figura 16: (a) Imagem original (b) Filtro Laplaciano.

A soma algébrica dos pesos das máscaras acima é igual a 0. Isso significando que, quando aplicadas em regiões homogêneas de uma imagem, resultará em um valor igual a 0 ou em um valor muito pequeno. Quando contrário, em uma região heterogênea, resultará em um valor muito maior ou menor do que o valor original.

<sup>4</sup>Nome dado em homenagem a Pierre-Simon Laplace, trata-se de um operador diferencial de segunda ordem.

### 2.1.2 Histograma

O histograma de uma imagem monocromática é uma função discreta  $h(L)$  (vetor) que produz o número de ocorrências de cada nível de cinza  $0 \leq L \leq 2^b - 1$  na imagem. Imagens claras (escuras) possuem histogramas com altas concentrações de pixels de alto (baixo) brilho.

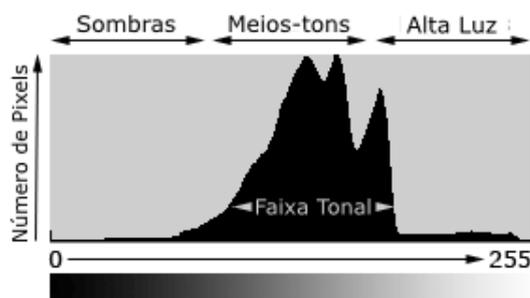


Figura 17: Modelo de Histograma.

<http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/histograms1.htm>

O histograma carrega a informação de luminosidade da imagem. Entender como eles são e como funcionam são passos muito importantes para se trabalhar com imagens digitais. Um histograma pode descrever também o quanto de contraste há numa imagem, observemos a imagem a seguir.

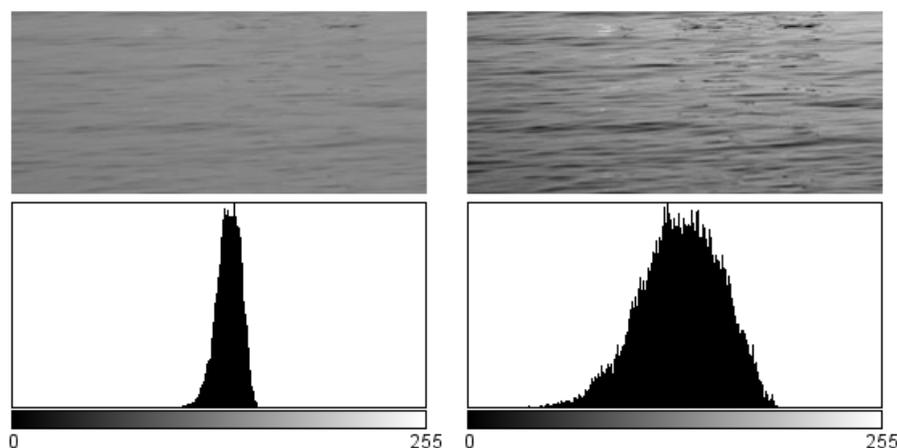


Figura 18: Histograma com informação de contraste.

<http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/histograms1.htm>

Histogramas com uma base mais larga são típicos de cenas com bastante contraste, enquanto histogramas estreitos são de imagens com menos contraste como fica claro na figura (18).

## 2.2 Softwares

As imagens digitais criaram diversas oportunidades para os pesquisadores. Softwares ajudam nas infinitas possibilidades para melhorar, sobrepor e exibir os resultados dos

experimentos. Com cada pixel representando as informações de intensidade de luz, as tarefas de manuseio de imagem e medições estão ficando cada vez mais simplificadas. Existem vários softwares disponíveis no mercado para processamento e análise dessas imagens, mas em geral, eles são muito caros e sua utilização às vezes não é tão fácil, necessitando de treinamento específico. Por isso, é interessante o uso de um software livre que acompanhe um manual de auxílio ao usuário e o estabelecimento de rotinas de análises que atendam às necessidades dos diversos grupos de pesquisa. Levando em conta todas essas ponderações, foi escolhido um software de análise e processamento de imagens, com código-fonte livre para a realização deste trabalho. Além do software possuir código-fonte livre, existe a possibilidade de desenvolvimento de plugins que se adequem às necessidades dos usuários. O software em questão foi o ImageJ<sup>5</sup>.

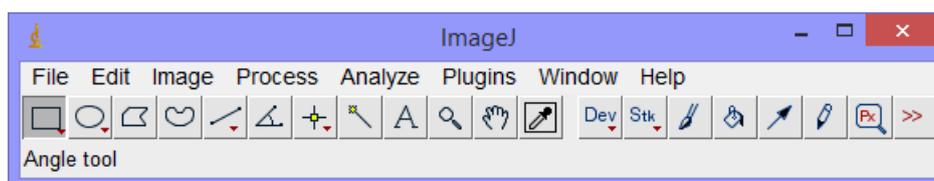


Figura 19: Display do ImageJ.  
<http://imagej.nih.gov/ij/features.html>

Dentre as muitas vantagens do software, podemos destacar algumas que justificam seu uso neste trabalho:

- Suporta extensão PGM (Portable Grey Map);
- Possui grande quantidade de filtros e operações para processamento e análise de imagens, permitindo a criação direta de máscaras específicas para o filtro, realce que desejar;
- Permite a criação de rotinas através de macros usando a linguagem de programação java;
- Tem a ferramenta principal deste trabalho, uma transformada que leva a imagem do domínio espacial ao domínio de frequência; (Tal como será explorado no Cap. 3)

## 2.3 Aplicações

A imagem carrega consigo um conjunto de informações e os pesquisadores, utilizando-se das tecnologias para processar e extrair, geram conhecimento. Vimos que foi a partir do programa espacial americano, que esta área começou a se desenvolver impulsionada pela necessidade de melhorar a visualização de imagens da lua, usando um conjunto de métodos e técnicas capazes de transformar as imagens de forma que estas tornem-se mais

<sup>5</sup>Desenvolvido por Wayne Rasband do Research Services Branch, National Institute of Mental Health, Bethesda, Maryland.

adequadas à visão humana ou à análise computacional. Após décadas de estudos constantes, podemos citar grandes resultados importantes e notáveis em vários campos:

- Medicina: O uso de imagens no diagnóstico médico tornou-se comum e os estudos em PDI vêm permitindo tanto o desenvolvimento de novos equipamentos quanto a maior facilidade de interpretação de imagens produzidas por equipamentos mais antigos, como por exemplo o de raio X e ultrassom;
- Biologia: A facilidade em processar automaticamente imagens obtidas de microscópios como por exemplo, contar o número de células de um certo tipo presentes em uma imagem, facilita nas tarefas laboratoriais com alto grau de precisão;
- Arqueologia: Técnicas de restauração de imagens auxiliam arqueologistas a recuperar fotos borradas de artefatos raros, já destruídos;
- Cartografia: Facilita o mapeamento da superfície terrestre;
- Segurança: É comum, em instituições de qualquer porte, estabelecerem-se restrições de acesso a locais e equipamentos de valor para as mesmas. Com avanço nas pesquisas em PDI, novas técnicas estão surgindo para automatizar o processo de verificação de acesso em tais instituições, como por exemplo: Impressão digital e Reconhecimento de retina, íris e facial. A vantagem de se utilizar tais técnicas é o fato de que elas se baseiam em características inerentes à pessoa avaliada por ela. Apesar de não ser impossível, uma impressão digital, por exemplo, é muito mais difícil de ser reproduzida do que um cartão com código de barras, que atualmente é mais utilizado em esquemas de segurança.

## 3 Espectro de Fourier

O espectro de Fourier é um objeto matemático apropriado para descrever, de uma forma bastante conveniente, um sinal a partir da variável que representa a frequência angular deste sinal e também informa a medida da frequência. Com grande aplicação em processamento de imagens digitais, essas frequências geram um novo plano de visualização, que será conseguido através do operador bidimensional da transformada de Fourier.

O nome é em homenagem ao matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830). Conhecido por estudar a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas *séries de Fourier* e a sua aplicação seguinte gerando a *transformada de Fourier*.

### 3.1 Séries de Fourier

#### 3.1.1 Série Trigonométrica de Fourier

Séries trigonométricas da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( \frac{2n\pi x}{T} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi x}{T} \right) \right]; \quad (2)$$

na qual observa-se que todas as infinitas parcelas são periódicas de período  $T$ , no conjunto de valores de  $x$  para os quais a série acima converge, ela define uma função periódica  $f$  de período  $T$ .

**Proposição 3.1 (Função Periódica)** *Uma função real de uma variável real  $f(x)$  definida para todos os valores de  $x$ , é dita periódica, se existe um número fixo  $T > 0$ , tal que para todo  $x$ ;*

$$f(x + T) = f(x)$$

*O menor valor de  $T > 0$  é chamado de período mínimo, ou fundamental, ou, simplesmente período de  $f$ .*

**Definição 3.1.1 (Periodicidade)** *Seja uma função  $f(x)$  definida no intervalo  $x \in [a, b]$ , definimos seu período  $T = b - a$  e para  $\forall n \in \mathbb{N}$  definimos a expansão periódica de  $f(x)$  na forma:*

$$f(x) = \begin{cases} f(x + nT), & \text{se } x < a; \\ f(x), & \text{se } a \leq x < b; \\ f(x - nT), & \text{se } b \leq x; \end{cases}$$

**Definição 3.1.2 (Função seccionalmente diferenciável)** *Uma função  $f$  é dita seccionalmente diferenciável em um intervalo  $[a, b]$ , se  $f$  e sua derivada  $f'$  são seccionalmente contínuas em  $[a, b]$ .*

(FIGUEIREDO, 1977) Define:

**Definição 3.1.3 (Teorema de Fourier)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $T$ , então a série  $f$ , dada pela Eq. (2), converge, em cada ponto  $x$  para  $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ , isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \right];$$

(STRAUSS, 2008) define a convergência pontual:

**Definição 3.1.4 (Convergência pontual)** *Dizemos que uma série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge pontualmente para  $f(x)$  em  $(a, b)$ , se ela converge para  $f(x)$  para qualquer  $x \in (a, b)$ . Isto é, para  $a < x < b$  temos*

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^N f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \right];$$

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0, \text{ quando } N \rightarrow \infty;$$

Consideraremos a convergência pontual para a  $f$ , dado que a imagem é gerada de um plano, uma superfície contínua. Obedecendo as regularidades de convergência e periodicidade, podemos representá-la como uma série trigonométrica, a **Série Trigonométrica de Fourier**<sup>6</sup> dada por:

$$f(x) \stackrel{\text{Def 3.1.4}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \right]; \quad (3)$$

Os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_*^+$ ) são chamados de Coeficientes de Fourier. Como a função  $f(x)$  possui período fundamental  $T$ , sua frequência angular é  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Assim reescrevemos a Eq.(3) na forma mais conveniente.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \text{sen}(n\omega_0 x)]; \quad (4)$$

**Determinação dos coeficientes de Fourier** : Dada uma função  $f$  representável por série de Fourier, o objetivo é determinar os coeficientes de Fourier da representação da série para esta função. Para isso, usaremos de apoio as proposições a seguir.

**Proposição 3.2 (Integração Transladada)** *O valor da integral de uma função é igual a integral de qualquer translação na reta  $\mathbb{R}$ , então consideraremos:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{b-a} f(x-a)dx = \int_0^T f(x-a)dx;$$

---

<sup>6</sup>Fourier utilizou séries da forma Eq. (3) em seu famoso trabalho *Théorie Analytique de la Chaleur*, onde estudou os fenômenos de condução de calor.

**Proposição 3.3 (Adição e Subtração de Arcos Trigonométricos)** *Considerados dois arcos quaisquer de medidas  $A$  e  $B$ , as operações da soma e da diferença entre esses arcos será dada pelas seguintes identidades:*

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen}A.\text{cos}B \pm \text{cos}A.\text{sen}B;$$

$$\text{cos}(A \pm B) = \text{cos}A.\text{cos}B \mp \text{sen}A.\text{sen}B;$$

**Teorema 3.1.1 (Relações de Ortogonalidade)** *Se  $m$  e  $n \in \mathbb{Z}_*^+$  (inteiros positivos) e  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Então:*

$$\int_0^T \cos(m\omega_0(x-a)) \cos(n\omega_0(x-a)) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n; \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n; \end{cases}$$

$$\int_0^T \text{sen}(m\omega_0(x-a)) \text{sen}(n\omega_0(x-a)) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n; \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n; \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(m\omega_0(x-a)) \text{sen}(n\omega_0(x-a)) dx = 0, \forall m, n.$$

- **Determinação de  $a_0$ :** integrando ambos os termos da Eq. (4) em  $[0, T]$ , transladada.

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x-a) dx &= \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0(x-a)) + b_n \text{sen}(n\omega_0(x-a)) \right] dx \\ &= \int_0^T \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^T a_n \cos(n\omega_0(x-a)) dx + \int_0^T b_n \text{sen}(n\omega_0(x-a)) dx \right] \\ &= \left[ \frac{a_0}{2} x \right]_0^T + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{a_n}{n\omega_0} \text{sen}(n\omega_0(x-a)) \right]_0^T - \left[ \frac{b_n}{n\omega_0} \cos(n\omega_0(x-a)) \right]_0^T \right\} \\ &= \left[ \frac{a_0}{2} T \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{n\omega_0} \overbrace{\left[ \text{sen}(n\omega_0(T-a)) - \text{sen}(-n\omega_0 a) \right]}^{=0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_n}{n\omega_0} \overbrace{\left[ \cos(n\omega_0(T-a)) - \cos(-n\omega_0 a) \right]}^{=0} \right\} \end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos da somatória através da adição e subtração de arcos trigonométricos e sabendo que  $\text{sen}(n\omega_0 T) = \text{sen}(2n\pi) = 0$  e  $\cos(n\omega_0 T) = \cos(2n\pi) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ , os termos se anularam. Assim o coeficiente  $a_0$  é dado por:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x-a) dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx;$$

- **Determinação de  $a_n$ :** multiplicando ambos os termos da Eq. (4) transladada por  $\cos(m\omega_0(x - a))$  e integrando em  $[0, T]$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x - a) \cos(m\omega_0(x - a)) dx &= \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} \cos(m\omega_0(x - a)) \right] dx + \\
&+ \int_0^T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0(x - a)) \cos(m\omega_0(x - a)) + \right. \\
&\quad \left. + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0(x - a)) \cos(m\omega_0(x - a)) \right] dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^T \cos(m\omega_0(x - a)) dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \overbrace{a_n \int_0^T \cos(n\omega_0(x - a)) \cos(m\omega_0(x - a)) dx}^{=\frac{T}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \overbrace{b_n \int_0^T \operatorname{sen}(n\omega_0(x - a)) \cos(m\omega_0(x - a)) dx}^{=0} \right]
\end{aligned}$$

Pela relação de ortogonalidade temos que a primeira integral do somatório é nula para  $m \neq n$  e vale  $\frac{T}{2}$  para  $m = n$ , já a segunda integral do somatório é nula para  $\forall m, n$ . Assim temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x - a) \cos(m\omega_0(x - a)) dx &= \frac{a_0}{2n\omega_0} \left[ \operatorname{sen}(n\omega_0(x - a)) \right]_0^T + a_n \frac{T}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0} \overbrace{\left[ \operatorname{sen}(n\omega_0(T - a)) - \operatorname{sen}(-a) \right]}^{=0} + a_n \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

Mais uma vez temos que  $\operatorname{sen}(n\omega_0 T) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Assim o coeficiente  $a_n$  é dado por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x - a) \cos(n\omega_0(x - a)) dx = \frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) \cos(n\omega_0 x) dx;$$

- **Determinação de  $b_n$ :** Novamente transladando a Eq. (4) e o multiplicando ambos os termos por  $\operatorname{sen}(m\omega_0(x - a))$  e integrando em  $[0, T]$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x-a) \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) dx &= \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) \right] dx + \\
&+ \int_0^T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0(x-a)) \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) + \right. \\
&\quad \left. + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0(x-a)) \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) \right] dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^T \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \overbrace{\int_0^T \cos(n\omega_0(x-a)) \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) dx}^{=0} + \right. \\
&\quad \left. + b_n \overbrace{\int_0^T \operatorname{sen}(n\omega_0(x-a)) \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) dx}^{\frac{T}{2}} \right]
\end{aligned}$$

Usando novamente a relação de ortogonalidade, temos que a primeira integral do somatório é nula para  $\forall m, n$ , já a segunda integral do somatório é nula para  $m \neq n$  e vale  $\frac{T}{2}$  para  $m = n$ . Assim temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x-a) \operatorname{sen}(m\omega_0(x-a)) dx &= \frac{a_0}{2n\omega_0} \left[ -\cos(n\omega_0(x-a)) \right]_0^T + b_n \frac{T}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0} \overbrace{\left[ -\cos(n\omega_0(T-a)) + \cos(-a) \right]}^{=0} + b_n \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

Mais uma vez usando a adição de arcos trigonométricos e demembrando temos que  $\cos(n\omega_0 T) = \cos(2n\pi) = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  zeramos o primeiro termo e por fim temos que o coeficiente  $b_n$  é dado por:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x-a) \operatorname{sen}(n\omega_0(x-a)) dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx;$$

E com isso fica definido todos os coeficientes de Fourier, que são dados pelas Fórmulas de Euler-Fourier abaixo integrando sobre um período de  $f$ .

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx; \tag{5a}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \tag{5b}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \tag{5c}$$

Vamos passar a considerar  $f(x)$  já assumindo valores transladado e as provas a seguir serão consideradas no período da função  $[0, T]$ ;

### 3.1.2 Série Exponencial de Fourier

A forma mais compacta de representar a série trigonométrica de Fourier com a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x}; \quad (6)$$

Com  $j = \sqrt{-1}$  e

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx; \quad (7)$$

**Provando a relação (6)-(7)**

Usando os resultados da seção anterior temos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \text{sen}(n\omega_0 x)]; \quad (8)$$

Com  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  e os coeficientes de fourier  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  definidos por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx; \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \text{sen}(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

Para seguirmos com a prova, usaremos a fórmula de Euler:

$$e^{\pm jn\omega_0 x} = \cos(n\omega_0 x) \pm j \text{sen}(n\omega_0 x); \quad (9)$$

Com isso obtivemos as relações abaixo:

$$\cos(n\omega_0 x) = \frac{1}{2} [e^{jn\omega_0 x} + e^{-jn\omega_0 x}] \quad \text{e} \quad \text{sen}(n\omega_0 x) = \frac{1}{2j} [e^{jn\omega_0 x} - e^{-jn\omega_0 x}]; \quad (10)$$

Agora substituindo (10) em (8) temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} [e^{jn\omega_0 x} + e^{-jn\omega_0 x}] + \frac{b_n}{2j} [e^{jn\omega_0 x} - e^{-jn\omega_0 x}] \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{jn\omega_0 x} \left[ \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right] + e^{-jn\omega_0 x} \left[ \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right] \right\} \\ \left( \frac{1}{j} = -j \right) \implies &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{jn\omega_0 x} \underbrace{\left[ \frac{a_n - jb_n}{2} \right]}_{c_n} + e^{-jn\omega_0 x} \underbrace{\left[ \frac{a_n + jb_n}{2} \right]}_{\bar{c}_n} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{jn\omega_0 x} + \bar{c}_n e^{-jn\omega_0 x}] \quad (11) \end{aligned}$$

Com isso definimos  $c_n$  e seu conjugado  $\bar{c}_n$  como sendo:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{e} \quad \bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + jb_n);$$

Para definição de  $c_n$ , usaremos as definições dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  e assim temos:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx - j \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \text{sen}(n\omega_0 x) dx \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) [\cos(n\omega_0 x) - j \text{sen}(n\omega_0 x)] dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \end{aligned} \quad (12)$$

Como queríamos demonstrar na Eq. (7). Com isso definimos  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ , isto é:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx;$$

Reescrevendo a Eq (11) temos:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{jn\omega_0 x} + \bar{c}_n e^{-jn\omega_0 x}]; \quad (13)$$

Usando a relação de função (par e ímpar)<sup>7</sup> definiremos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(-n\omega_0 x) dx = a_{-n}; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \text{sen}(n\omega_0 x) dx = -\frac{2}{T} \int_0^T f(x) \text{sen}(-n\omega_0 x) dx = -b_{-n}; \end{aligned}$$

Assim

$$\bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}(a_{-n} - jb_{-n}) = c_{-n};$$

A Eq. (13) rearranjada fica

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{jn\omega_0 x} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 x}] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 x}; \quad (14)$$

Desta última equação podemos notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 x} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 x};$$

---

<sup>7</sup>Uma função  $f$  é considerada par quando  $f(-x) = f(x)$ , e ímpar quando  $f(-x) = -f(x)$ .  $\forall x \in D(f)$ .

E por fim concluímos que

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 x} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 x} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x}
 \end{aligned} \tag{15}$$

## 3.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta matemática que faz a transição entre as variáveis tempo e frequência de sinais. Nesta seção teremos como o objetivo principal entender esta transformada no processamento de imagens e resumir as principais propriedades.

### 3.2.1 Transformada Discreta de Fourier Unidimensional (TDF-1D)

Dando continuidade ao estudo da Série Exponencial de Fourier até agora, sabemos que funções periódicas podem ser sintetizadas como uma combinação linear de exponenciais complexas cujas frequências são múltiplas (ou harmônicas) da frequência fundamental. Vamos definir uma base  $b_k^n \in \mathbb{C}^N$  com  $\{W^{nk}\}_{n=0}^{N-1}$ , onde  $W^{nk} = e^{j\omega_0 nk}$

$$b_k^n = [1, W^k, W^{2k}, W^{3k}, \dots, W^{(N-1)k}]^T;$$

Usando a definição de produto interno de vetores complexos, podemos escrever:

$$\langle f, g \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_k^*;$$

Onde  $g_k^*$  representa o complexo conjugado de  $g_k$ .

**Teorema 3.2.1 (Ortogonalidade em  $\mathbb{C}^N$ )** Se  $m$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Então:

$$\langle b_k^m, b_k^n \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{mk} (W^{nk})^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{k(m-n)} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n; \\ 1, & \text{se } m = n; \end{cases}$$

Para a obtenção da DFT usaremos as definições acima e aplicaremos o produto interno na Eq. (6), para isso usaremos uma amostragem  $f_k$ .

Assim temos:

$$\begin{aligned}
f_k &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{j\omega_0 nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\
\langle f, b_k^u \rangle_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k (b_k^u)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{j\omega_0 nk} \right] e^{-j\omega_0 uk}, \quad u = 0, 1, \dots, N-1 \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{j\omega_0 nk} e^{-j\omega_0 uk} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{j\omega_0 k(n-u)} \right]}_{= \begin{cases} Nc_n, & \text{se } n = u \\ 0, & \text{se } n \neq u \end{cases}} \quad (16)
\end{aligned}$$

E por fim temos que a Transformada Discreta de Fourier unidimensional, definida como  $c_n = \mathcal{F}\{f_k\} = F(n)$  é dada por:

$$F(n) = \langle f, b_k^n \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j\omega_0 nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad (17)$$

Para conseguir a transformada inversa, aplicamos o caminho contrário, ou seja:

$$\begin{aligned}
\langle F(n), (b_k^m)^* \rangle_N &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m ((b_k^m)^*)^* \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j\omega_0 nk} \right] e^{j\omega_0 mk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j\omega_0 nk} e^{j\omega_0 mk} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{j\omega_0 k(m-n)} \right]}_{= \begin{cases} f_k, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}} \quad (18)
\end{aligned}$$

E com isso temos a Inversa da Transformada Discreta de Fourier que é denotada por  $\mathcal{F}^{-1}\{F(n)\} = f_k$  como sendo:

$$f_k = N \langle F(n), (b_k^n)^* \rangle_N = \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{j\omega_0 nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (19)$$

Onde  $\omega_0$  é frequência angular e é definida com o período da função, neste caso  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ . Os valores  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  na transformada discreta de Fourier Eq. (17) correspondem a amostras dos valores da transformada do sinal contínuo nos pontos  $0, \Delta_n, 2\Delta_n, \dots, (N-$

1) $\Delta_n$  Em outras palavras,  $F(n)$  representa  $F(n\Delta_n)$ . Portanto, os intervalos de espaçamento entre as amostras do sinal e de sua transformada estão relacionados através da expressão:

$$\Delta_n = \frac{1}{N\Delta_x};$$

**Exemplo do uso da TDF 1-D** Geralmente as aplicações da transformada de fourier utilizam funções reais, mas a transformada de uma função real é, via de regra, complexa. Assim a TDF 1-D pode ser expressa pela soma de componentes real e imaginário, representados por  $R(n)$  e  $I(n)$ , respectivamente, o que nos leva a considerar. (GONAZALEZ e WOODS, 2002):

$$F(n) = R(n) + jI(n);$$

Podemos também expressar a função de valores complexos na exponencial:

$$F(n) = |F(n)| e^{j\varphi(n)};$$

onde

$$|F(n)| = \sqrt{R^2(n) + I^2(n)};$$

e

$$\varphi(n) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(n)}{R(n)} \right];$$

O termo  $|F(n)|$  é chamado Espectro de Fourier ou Espectro de Amplitude da função unidimensional  $f_k$ ,  $\varphi(n)$  é chamado ângulo de fase.  $|F(n)|^2 = R^2 + I^2$  é denominado densidade espectral.

Exemplo:

Vamos ilustrar a situação de um problema que é trabalhar com um sinal ruidoso, com uma espécie de ruído que impossibilita avaliar seu comportamento. A ideia é entender o processo do operador da transformada que leva do domínio espacial ao domínio de frequências, onde neste exemplo será melhor o tratamento neste espaço como veremos.

Seja um sinal contínuo  $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  com  $t \in \mathbb{R}$  definida por:

$$f(t) = \sin(4\pi t);$$

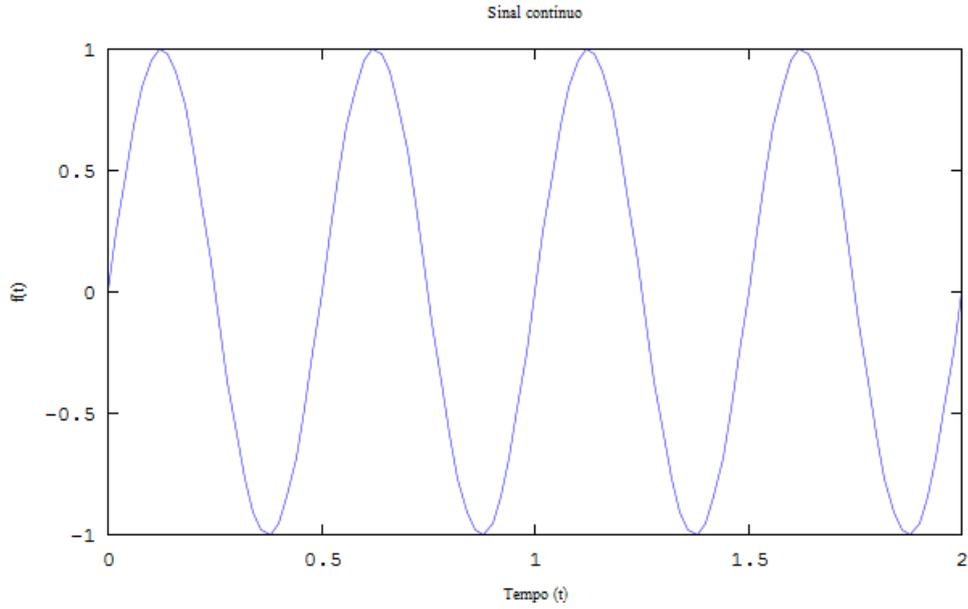


Figura 20: Gráfico do sinal contínuo  $f(t)$ .

A ideia é definir uma amostra  $f_k$  com tamanho  $N = 100$  do sinal contínuo  $f(t)$  acima e gerar um ruído para em seguida somar na função  $f_k$ . Assim geramos  $f_k$  e o ruído aleatório:

$$f(t) \xrightarrow{\text{Amostragem}} f_k;$$

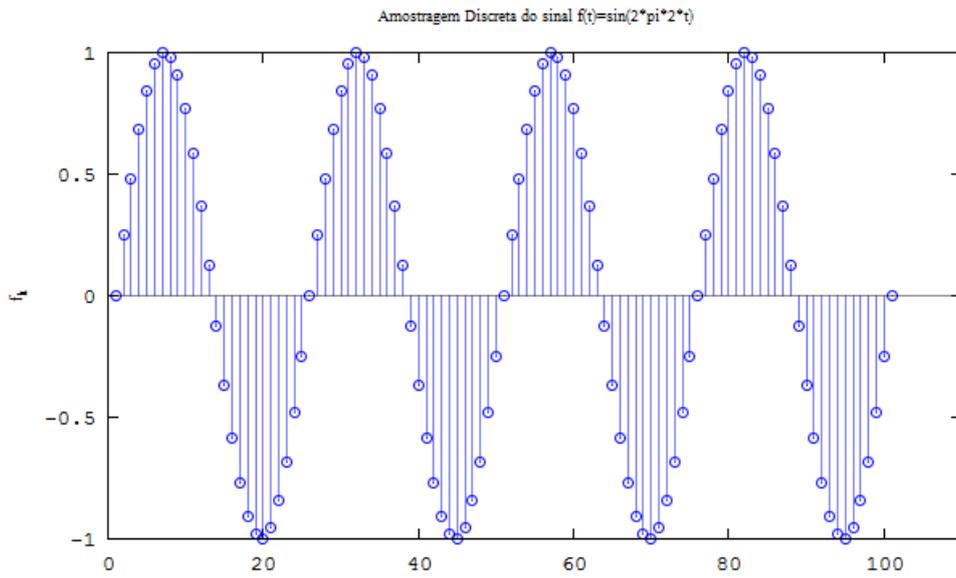


Figura 21: Gráfico da Amostragem  $f_k$ .

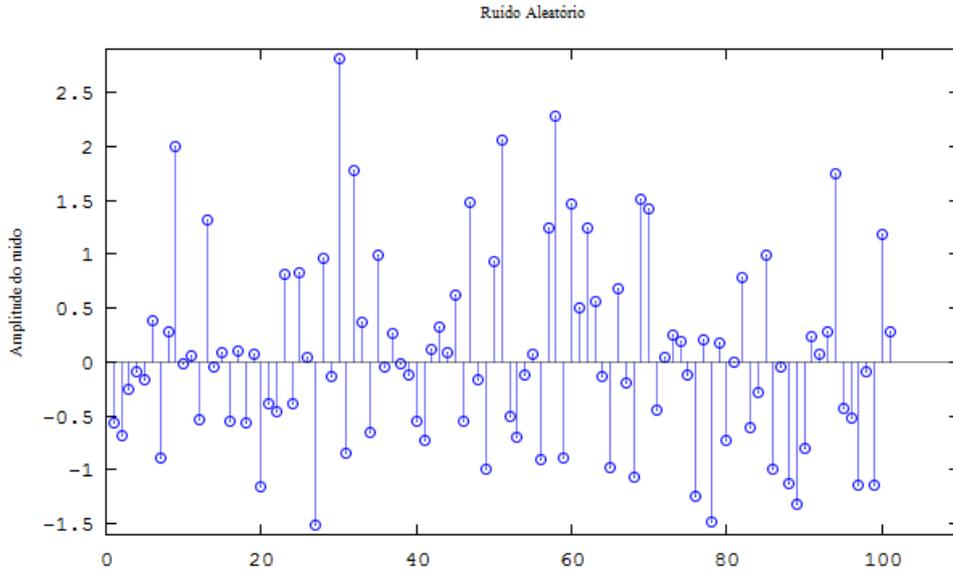


Figura 22: Gráfico do Ruído Aleatório.

Agora vamos montar o verdadeiro problema que é somar o ruído ao sinal  $f_k$ :

$$f_k \xrightarrow{\text{Ruído}} \hat{f}_k;$$

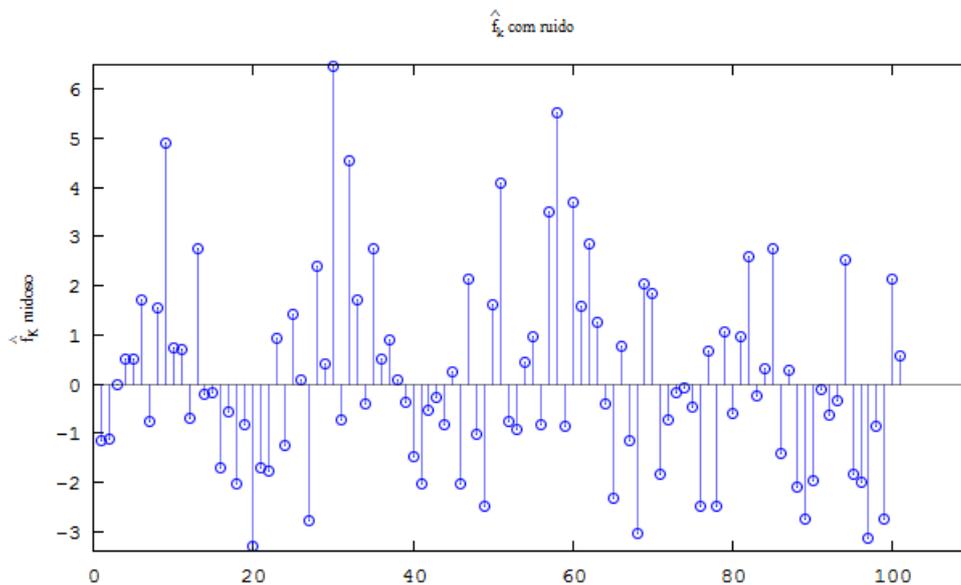


Figura 23: Gráfico de  $f_k$  somado do Ruído.

Como podemos ver, o ruído alterou visivelmente o comportamento harmônico do sinal original  $f_k$ . Mas se supormos que começamos já daqui e quizessemos obter o sinal original, encontraríamos um grande problema, pois o ruído é dominante o que implica na dificuldade de encontrar um comportamento representativo do sinal periódico. Este problema é resolvido quando usamos a Eq. (17), Transformada de Fourier, como operador

para levar no domínio de frequências e apresentar o Espectro de Fourier  $|F(n)|$ :

$$\hat{f}_k \xrightarrow{TDF} F(n);$$

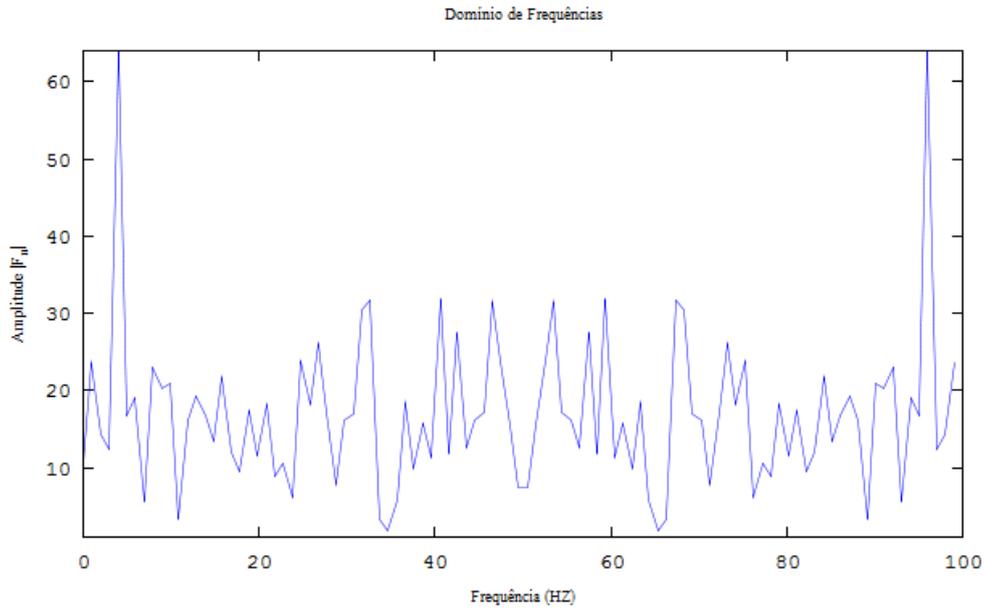


Figura 24: Espectro de Fourier  $|\mathcal{F}\{f_k\}| = |F(n)|$ .

Podemos perceber que neste domínio existe a predominância de um sinal de baixa frequência com amplitude alta. Com esta percepção podemos filtrar neste domínio. Vamos aplicar um corte e considerar as altas amplitudes:

$$\hat{F}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } |F(n)| \leq 50 \\ F(n), & \text{se } |F(n)| > 50 \end{cases};$$

com isso produzimos um novo Espectro:

$$F(n) \xrightarrow{Filtro} \hat{F}(n);$$

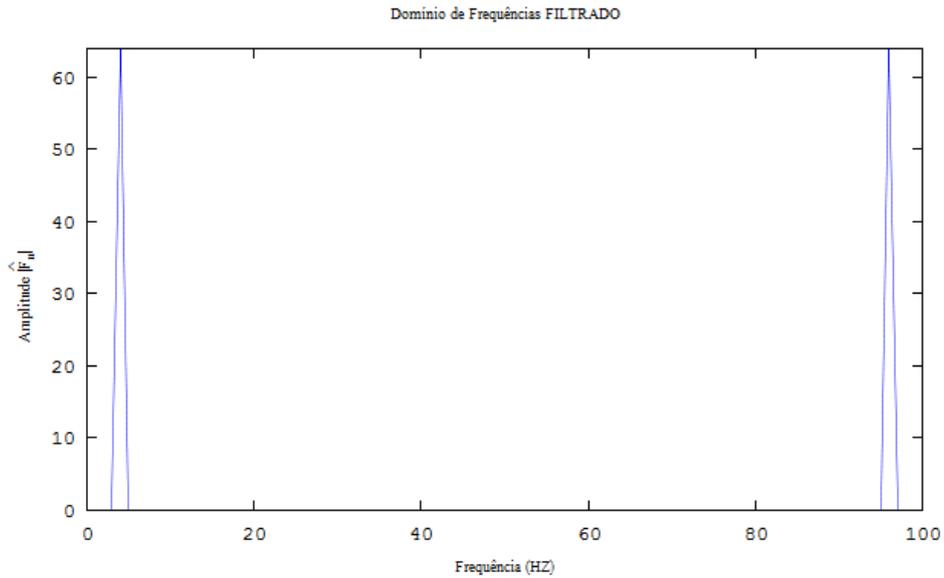


Figura 25: Espectro de Fourier Filtrado  $|\widehat{F}(n)|$ .

Sabemos que o operador da transformada é inversível, ou seja:

$$f_k \rightleftharpoons F(n);$$

Agora com o novo espectro aplicamos a Eq. (19) e voltamos ao domínio do tempo:

$$\widehat{F}(n) \xrightarrow{ITDF} f_k$$

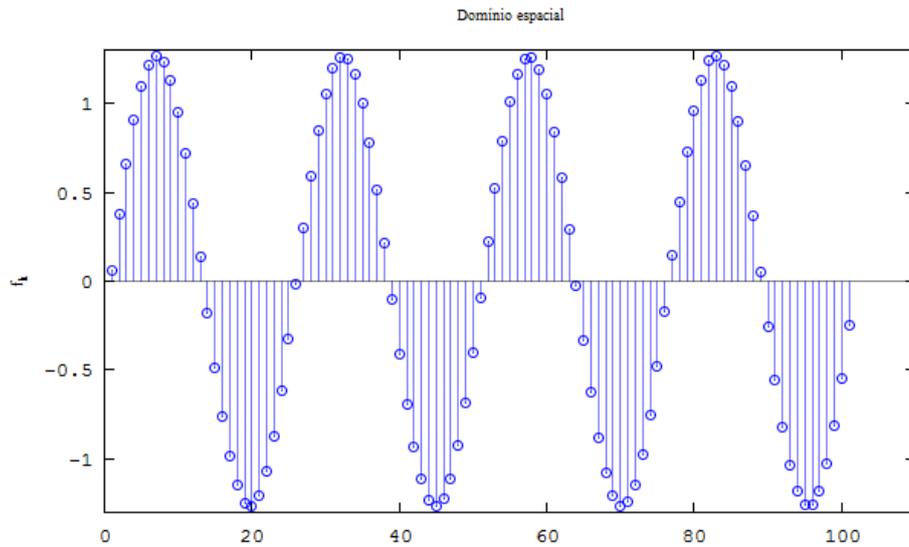


Figura 26: Sinal  $f_k$  corrigido e recuperado.

O problema foi proposto e resolvido pela sequência lógica abaixo:

$$f_k \xrightarrow{\text{Ruido}} \widehat{f}_k \xrightarrow{TDF} F(n) \xrightarrow{\text{Filtro}} \widehat{F}(n) \xrightarrow{ITDF} f_k;$$

### 3.2.2 Transformada Discreta de Fourier Bidimensional (TDF-2D)

Agora o nosso interesse é expandir o estudo obtido para uma função bidimensional  $f_{k,l}$  que é o processo para aplicação em imagens digitais (uma função bidimensional discreta). A Série Complexa de Fourier bidimensional para o sinal  $f_{k,l}$  em  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $l = 0, 1, \dots, M - 1$  com frequências fundamentais (na vertical e na horizontal)  $\omega_x = \frac{2\pi}{N}$  e  $\omega_y = \frac{2\pi}{M}$ , é expressa por:

$$f_{k,l} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{n,m} e^{j(\omega_x nk + \omega_y ml)}; \quad (20)$$

Onde  $C_{n,m}$  é o coeficiente de Fourier dado por:

$$C_{n,m} = \frac{1}{NM} \iint f_{k,l} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)} dk dl;$$

Vamos começar por definir uma base  $b_{k,l}^{u,v} \in \mathbb{C}^{M \times N}$  com  $\{W_{vl}^{uk}\}_{u,v=0}^{N-1, M-1}$ , onde  $W_{vl}^{uk} = e^{j(\omega_x uk + \omega_y vl)}$ .

$$b_{k,l}^{u,v} = W_{vl}^{uk} = e^{j(\omega_x uk + \omega_y vl)};$$

Usando a definição de produto interno de vetores complexos, podemos escrever:

$$\langle f, g \rangle_{NM} = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} g_{k,l}^*;$$

Onde  $g_{k,l}^*$  representa o complexo conjugado de  $g_{k,l}$ .

**Teorema 3.2.2 (Ortogonalidade em  $\mathbb{C}^{N \times M}$ )** Se  $m, n, u, v \in \mathbb{Z}$ . Então:

$$\begin{aligned} \langle b_{k,l}^{n,m}, b_{k,l}^{u,v} \rangle_{NM} &= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} W_{ml}^{nk} (W_{vl}^{uk})^* \\ &= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} W_{l(m-v)}^{k(n-u)} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq u \text{ e } m \neq v; \\ 1, & \text{se } n = u \text{ e } m = v; \end{cases} \end{aligned}$$

A Transformada Discreta de Fourier de uma função bidimensional é conseguida através do produto interno:

$$f_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} e^{j(\omega_x nk + \omega_y ml)}$$

$$\begin{aligned}
\langle f_{k,l}, b_{k,l}^{u,v} \rangle_{NM} &= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} (b_{k,l}^{u,v})^* \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} e^{j(\omega_x nk + \omega_y ml)} \right] e^{-j(\omega_x uk + \omega_y vl)} \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} e^{j(\omega_x nk + \omega_y ml)} e^{-j(\omega_x uk + \omega_y vl)} \right] \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} \underbrace{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} e^{j(\omega_x k(n-u) + \omega_y l(m-v))} \right]}_{= \begin{cases} NMC_{n,m}, & \text{se } n = u \text{ e } m = v \\ 0, & \text{se } n \neq u \text{ e } m \neq v \end{cases}}
\end{aligned}$$

E por fim, temos que a transformada discreta de fourier em 2-D é definida como  $C_{n,m} = \mathcal{F}\{f_{k,l}\} = F(n, m)$  e é dada por:

$$F(n, m) = \langle f_{k,l}, b_{k,l}^{n,m} \rangle_{NM} = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)}; \quad (21)$$

Esta por sua vez, também possui uma Transformada Inversa que é obtida fazendo o caminho contrário:

$$\begin{aligned}
\langle F(n, m), (b_{k,l}^{u,v})^* \rangle_{NM} &= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} F(n, m) ((b_{k,l}^{u,v})^*)^* \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)} \right] e^{j(\omega_x uk + \omega_y vl)} \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)} e^{j(\omega_x uk + \omega_y vl)} \right] \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \underbrace{\left[ \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{j(\omega_x (u-n)k + \omega_y (v-m)l)} \right]}_{= \begin{cases} f_{k,l}, & \text{se } n = u \text{ e } m = v \\ 0, & \text{se } n \neq u \text{ e } m \neq v \end{cases}}
\end{aligned}$$

E por fim temos que a transformada inversa discreta de fourier em 2-D é definida por  $\mathcal{F}^{-1}\{F(n, m)\} = f_{k,l}$ :

$$f_{k,l} = NM \langle F(n, m), (b_{k,l}^{n,m})^* \rangle_{NM} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} F(n, m) e^{j(\omega_x nk + \omega_y ml)}; \quad (22)$$

Onde  $\omega_x = \frac{2\pi}{N}$  e  $\omega_y = \frac{2\pi}{M}$  são as frequências na vertical e na horizontal, respectivamente.

O processo de amostragem da função bidimensional contínua  $f(x, y)$  pode ser visto como uma grade 2-D, gerando a função  $f_{k,l}$  discretizada (utilizada nas Eqs. 21 e 22) onde

as amostras são pontos espaçados entre si de  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ , nos respectivos eixos. Os intervalos de amostragem no domínio espacial e frequencial estão relacionados entre si por:

$$\Delta_n = \frac{1}{N\Delta_x} \quad \text{e} \quad \Delta_m = \frac{1}{M\Delta_y};$$

Definimos um par de Transformada de Fourier bidimensional, dois operadores

$$f_{k,l} \Leftrightarrow F(n,m);$$

$$f_{k,l} \xrightarrow{TDF} F(n,m) \xrightarrow{ITDF} f_{k,l};$$

A Transformada Discreta de Fourier Bidimensional (TDF-2D) de uma imagem, é essencialmente uma representação em série exponencial de Fourier de uma função bidimensional. Assim, para ser válida esta função precisa ser periódica. Essa periodicidade é obtida considerando que a imagem se repete em um plano, aplicando este método garantimos a periodicidade conforme figura abaixo:



Figura 27: Representação de uma imagem periódica.  
(BURGUER, BURGE. 2008).

A TDF-2D possui algumas propriedades que facilitam a sua utilização em aplicações computacionais, tais como: separabilidade, translação, periodicidade e simetria conjugada e convolução. Dentre essas, a propriedade da convolução é de fundamental importância para a compreensão das técnicas de processamento de imagens baseadas na transformada de Fourier.

## Propriedades

- **Periodicidade**

Supondo uma imagem disposta numa matriz  $N \times M$

$$\begin{aligned}
 F(n + N, m + M) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j(\omega_x(n+N)k + \omega_y(m+M)l)} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)} \underbrace{e^{-j2\pi(k+l)}}_{=1} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)} \\
 &= F(n, m)
 \end{aligned}$$

- **Teorema da Convolução.**

A convolução discreta de duas funções  $f_{k,l}$  e  $h_{k,l}$  de tamanhos  $N \times M$  é indicada por  $f_{k,l} * h_{k,l}$  e é definido pela expressão:(GONZALEZ e WOODS, 2002).

$$f_{k,l} * h_{k,l} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{k,l}(n, m) * h_{k,l}(x - n, y - m)$$

Que gera um resultado importante nos domínios de tempo e de frequência.

$$f_{k,l} * h_{k,l} \Rightarrow F(n, m) H(n, m);$$

$$f_{k,l} h_{k,l} \Rightarrow F(n, m) * H(n, m);$$

Muito usada quando tratamos de filtros no domínio da frequência.

- **Separabilidade**

O termo exponencial nas equações é visivelmente separável. Fazendo com que a transformada  $F(n, m)$  de  $f_{k,l}$  pode ser separada em duas transformadas 1D, uma na horizontal e outra na vertical.

$$\begin{aligned}
 F(n, m) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j\omega_y ml} \right] e^{-j\omega_x nk} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} F_l(k, m) e^{-j\omega_x nk} = \sum_{l=0}^{M-1} F_k(n, l) e^{-j\omega_y ml}
 \end{aligned}$$

O mesmo vale para a inversa, temos:

$$\begin{aligned}
f_{k,l} &= \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} F(n, m) e^{j(\omega_x nk + \omega_y ml)} \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} F(n, m) e^{j\omega_y ml} e^{j\omega_x nk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} F(n, m) e^{j\omega_y ml} \right] e^{j\omega_x nk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_l(n, l) e^{j\omega_x nk} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} F_k(k, m) e^{j\omega_y ml}
\end{aligned}$$

### • Translação

Esta propriedade mostra que a multiplicação de  $f_{k,l}$  pela exponencial  $e^{j(\omega_x n_0 k + \omega_y m_0 l)}$  resulta num deslocamento na frequência de  $(n_0, m_0)$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_{k,l} e^{j(\omega_x n_0 k + \omega_y m_0 l)}\} &\Rightarrow F(n - n_0, m - m_0) \\
\mathcal{F}\{f_{k,l} e^{j(\omega_x n_0 k + \omega_y m_0 l)}\} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{j(\omega_x n_0 k + \omega_y m_0 l)} e^{-j(\omega_x nk + \omega_y ml)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{j[\omega_x k(n_0 - n) + \omega_y l(m_0 - m)]} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-j[\omega_x k(n - n_0) + \omega_y l(m - m_0)]} \\
&= F(n - n_0, m - m_0)
\end{aligned}$$

### • Linearidade

A Transformada de Fourier é um operador linear, ou seja, definindo duas funções bidimensionais:  $f_{k,l} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_{k,l} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . É verdade que:

$$\mathcal{F}\{\alpha f_{k,l} + \beta g_{k,l}\} = \alpha \mathcal{F}\{f_{k,l}\} + \beta \mathcal{F}\{g_{k,l}\} = \alpha F(n, m) + \beta G(n, m)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\alpha f_{k,l} + \beta g_{k,l}\} &= \langle \alpha f_{k,l} + \beta g_{k,l}, b_{k,l}^{n,m} \rangle_{NM} \\
&= \langle \alpha f_{k,l}, b_{k,l}^{n,m} \rangle_{NM} + \langle \beta g_{k,l}, b_{k,l}^{n,m} \rangle_{NM} \\
&= \alpha \langle f_{k,l}, b_{k,l}^{n,m} \rangle_{NM} + \beta \langle g_{k,l}, b_{k,l}^{n,m} \rangle_{NM} \\
&= \alpha \mathcal{F}\{f_{k,l}\} + \beta \mathcal{F}\{g_{k,l}\} \\
&= \alpha F(n, m) + \beta G(n, m)
\end{aligned}$$

Também é verdade que:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\alpha F(n, m) + \beta G(n, m)\} = \alpha \mathcal{F}^{-1}\{F(n, m)\} + \beta \mathcal{F}^{-1}\{G(n, m)\} = \alpha f_{k,l} + \beta g_{k,l};$$

### 3.3 Espectro: Um novo domínio, uma nova Imagem

Vamos então definir uma nova forma de visualizar os dados. Para as aplicações da transformada de fourier utilizamos funções reais, mas a transformada de uma função é também complexa. Assim a TDF-2D pode ser expressa pela soma de componentes real e imaginário, definidas por  $R(n, m)$  e  $I(n, m)$ , respectivamente, o que nos permite considerar:

$$F(n, m) = R(n, m) + jI(n, m);$$

Podemos também expressar a função de valores complexos na exponencial:

$$F(n, m) = |F(n, m)| e^{j\varphi(n, m)};$$

onde

$$|F(n, m)| = \sqrt{R^2(n, m) + I^2(n, m)};$$

e

$$\varphi(n, m) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(n, m)}{R(n, m)} \right];$$

O termo  $|F(n, m)|$  é chamado espectro de fourier da função bidimensional  $f_{k,l}$ . Usaremos o Espectro de Fourier como a representação da imagem e  $\varphi(n, m)$  é chamado ângulo de fase.  $|F(n, m)|^2 = R^2 + I^2$  é denominado densidade espectral.

#### 3.3.1 Transformação Log

A forma geral da transformação logarítmica é

$$s = c \log(1 + |r|); \tag{23}$$

Onde  $c$  é uma constante, e assumindo que  $r \geq 0$ .

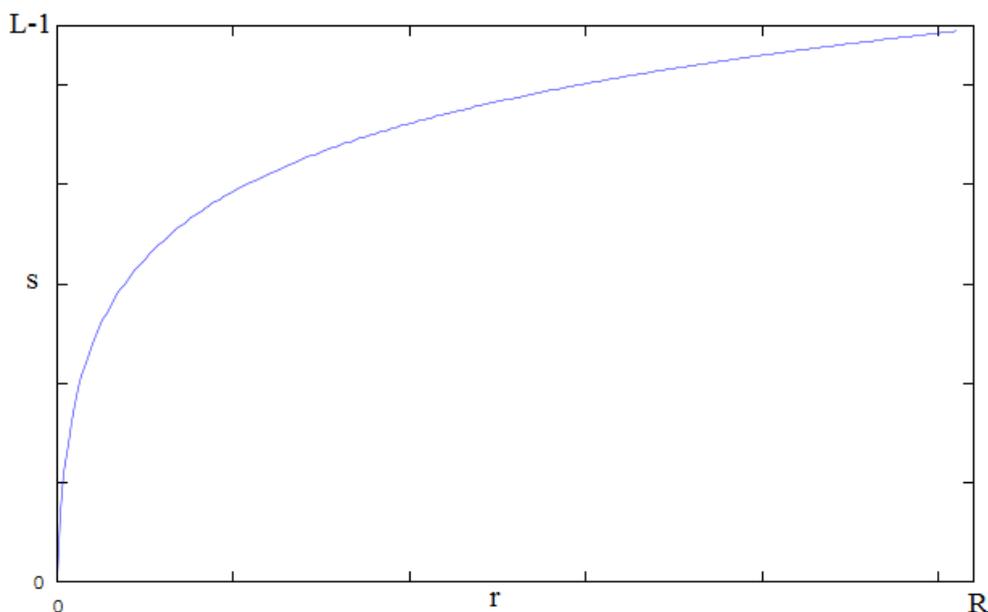


Figura 28: Curva da transformação log.

A forma da curva *log* na figura acima mostra que esta transformação mapeia uma faixa (horizontal) muito grande de níveis de cinza dos valores de entrada da imagem para uma faixa menor de saída de níveis (vertical). Qualquer curva que tem a forma geral das funções *log* já mostrado realiza a compressão ou espalhamento dos níveis de cinza de uma imagem. Assim, a função *log* tem a característica importante que é a de comprimir o alcance dinâmico de imagens com grandes variações dos valores de pixels.

A ilustração clássica de uma aplicação em que os valores dos pixels possuem uma grande variação é o Espectro de Fourier  $|F(n, m)|$ . É muito comum encontrar valores de espectro que variam de  $[0, R] = [0, 10^6]$  ou ainda maior. Durante o processamento, estes números não apresentam problemas para um computador, mas os sistemas de exibição de imagens geralmente não são capazes de reproduzir fielmente a uma grande variação de valores de intensidade. O efeito disso é que serão perdidos importantes detalhes no mostrador de um típico Espectro de Fourier. A aplicação da função *log* bidimensional nos ajuda a resolver o problema, definimos:

$$D(n, m) = c \log(1 + |F(n, m)|); \quad (24)$$

Considere agora as imagens abaixo.

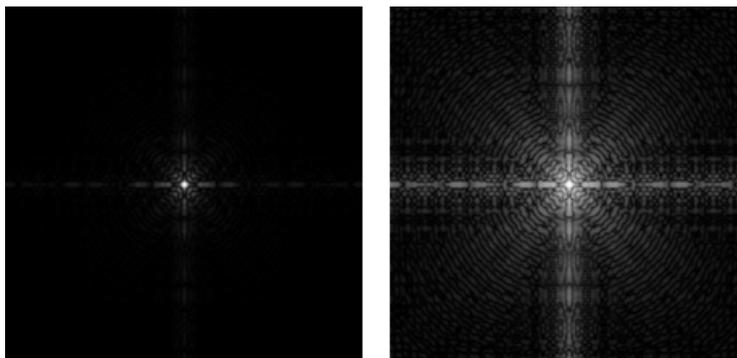


Figura 29: (a) Espectro de Fourier  $|F(n, m)|$  (b)  $D(n, m)$ .

Nas imagens temos que em (29a) mostra um espectro de Fourier com valores no intervalo  $[0, R] = [0, 15 \cdot 10^5]$ . Quando estes valores são dimensionados de forma linear para exibição em um sistema de 8 bits, somente 256 tons de cinza, não consegue detectar uma variação de luminosidade dos pixels. O efeito disso está ilustrado nitidamente pela área relativamente grande com o excesso de preto em (29a). Mas se em vez de exibir os valores na forma  $|F(n, m)|$ , primeiro aplicarmos a Eq. (24) (com  $c = 1$  neste caso) para os valores de espectro, em seguida, temos como resultado uma variação bem menor dos valores  $[0, 6.2]$ . a figura (29b) mostra o resultado da transformação *log* sobre o espectro de Fourier, um novo dimensionamento que tornou mais visível a variação dos valores.

Para o exemplo foi usado  $c = 1$  e conseguiu-se mapear os valores em  $[0, 6.2]$ . Com isso, torna-se viável uma transformação do tipo:

$$D(n, m) = \frac{255}{6.2} \log(1 + |F(n, m)|);$$

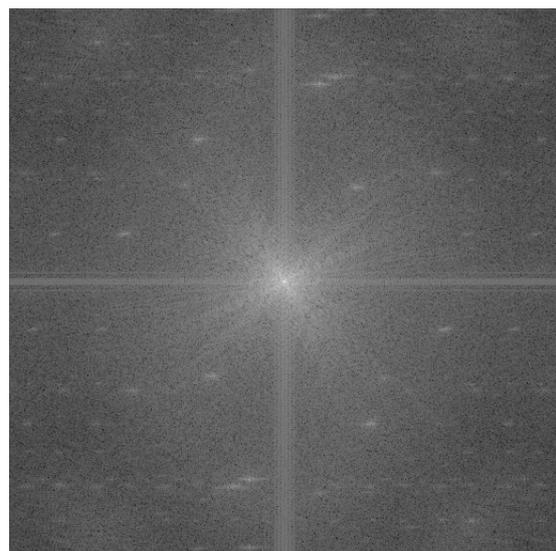
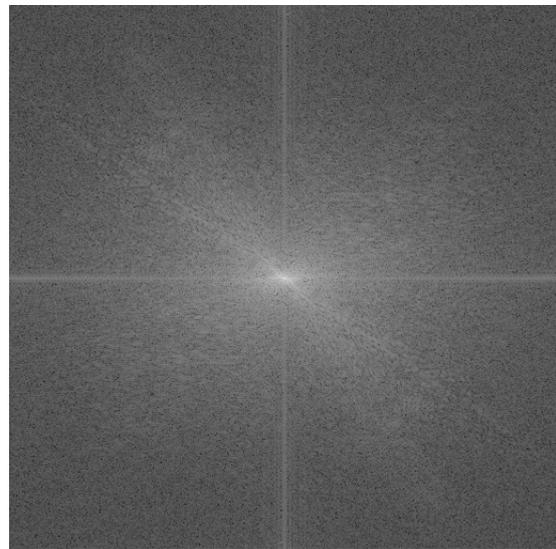
$$\begin{matrix} |F(n, m)| \\ [0, R] \end{matrix} \xrightarrow{\log} \begin{matrix} D(n, m) \\ [0, 255] \end{matrix}$$

A maior parte dos Espectros de Fourier vistos nas publicações de processamento de imagens usam desta lógica de transformação para melhor representar o domínio de frequência.

### 3.3.2 A Imagem e sua nova Reprodução Estética

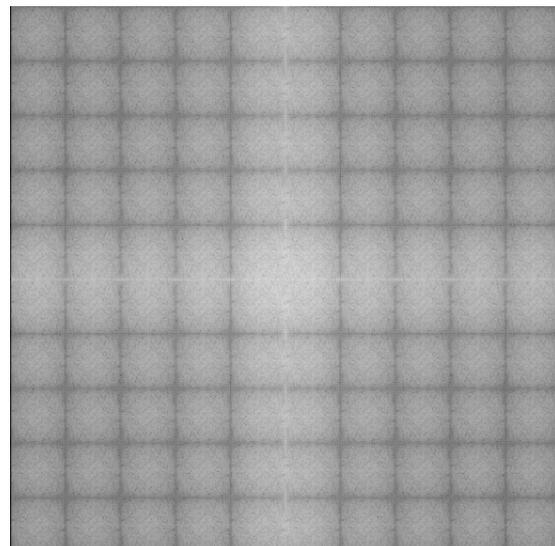
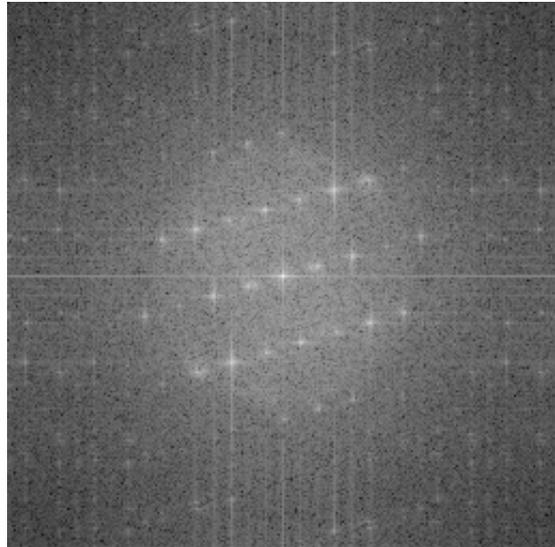
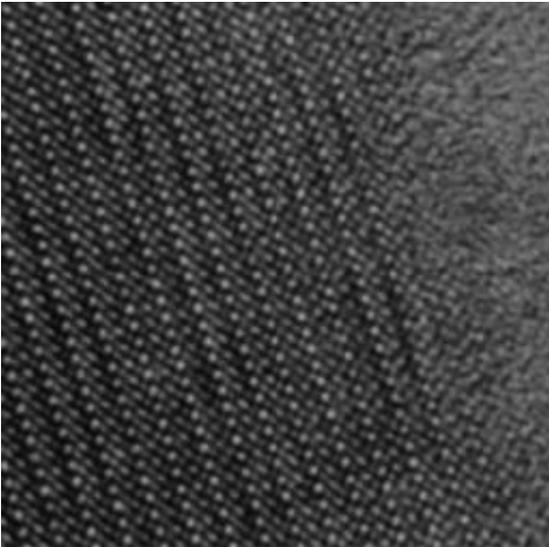
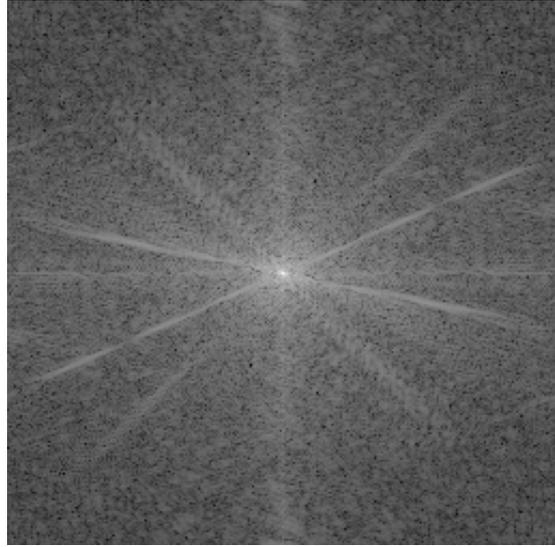
Não se perde informação durante a mudança de domínios, como já vimos, apenas a informação visual da imagem passa a estar representada de uma outra forma: no domínio da frequência. E com a transformação log neste domínio, temos uma representação visual mais detalhista destas informações, o que nos permite formar uma nova imagem, abaixo temos vários exemplos:

À esquerda, temos a imagem<sup>8</sup> original; e à direita, temos a reprodução dela com a transformação do Espectro de Fourier, uma nova representação de imagem, um novo impacto estético.



---

<sup>8</sup>Imagens obtidas em [http://scien.stanford.edu/pages/labsite/scien\\_test\\_images\\_videos.php](http://scien.stanford.edu/pages/labsite/scien_test_images_videos.php)



Essa nova forma de visualização é parte da imagem, pois, um ponto de uma imagem representada no domínio da frequência, espectro de Fourier, contém informações sobre toda a imagem no domínio espacial, indicando quanto desta frequência há presente na imagem. O Espectro de Fourier acumula no centro da imagem as baixas frequências e quando distante do centro, temos as altas frequências. Algumas observações dos resultados, no segundo espectro concentram os pontos luminosos no centro indicando que na imagem temos muitas frequências baixas, ainda neste espectro nós também podemos notar alguns "borrões", detecção de um ruído na textura da imagem. Na terceira imagem temos seu espectro com uma espécie de linhas cruzadas passando pelo centro, isso se dá por conta dos pés da camera na imagem original que gerou uma espécie de descontinuidade.

Podemos fazer a leitura da informação considerando os eixos, na horizontal indicam as frequências nesta linha de processamento, assim consideraremos uma imagem somente com variação na horizontal, na vertical a imagem permanece constante. Segue exemplo e resultado:

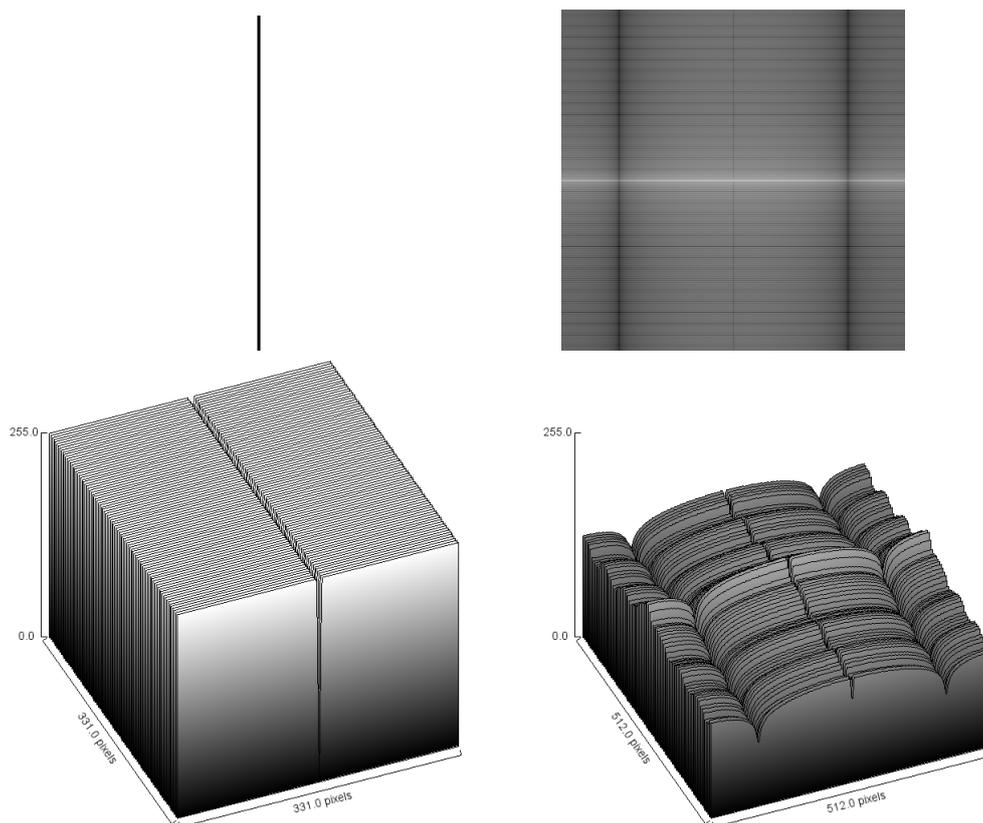


Figura 30: Plotagem da imagem (a) e do Espectro de Fourier (b) em  $\mathbb{R}^3$ .

Como prevíamos, uma variação somente horizontal também no Espectro.

## 4 Processamento das imagens na era da infoestética

Atualmente, nos encontramos numa era de crescimento muito grande na área da tecnologia digital, que traz, como consequência, um crescimento com progressão geométrica na área da informação. Sabemos também que cada época carrega consigo a modelagem de uma própria estética, preferências de formas e padrões, preferências estas que são definidas de acordo com os valores da sociedade em que está inserida. Em outras palavras, a sociedade tem necessidade de definir suas preferências estéticas visando sempre assimilar uma mudança imposta pela sua época. Assim, não podemos negar que é visível o crescimento existente no campo da informação, onde há cada vez mais uma infinidade de conteúdos, formando conjuntos que já não damos conta de analisar ou dar a devida importância ao que podem transmitir.

Lev Manovich<sup>9</sup> propõe a investigação desse cenário, ao localizar a percepção da "Infoestética": uma estética da informação, que abarcaria todas as formas estéticas e culturais emergentes da sociedade da informação globalizada, de várias áreas da cultura contemporânea (cinema, arte, design, moda, web, arquitetura da informação, etc.)

Infoestética não tem a ver com programação, computadores, novas mídias, web ou cultura digital: é sobre cultura contemporânea em geral. Um vestido, uma obra de arquitetura, um filme de animação ou qualquer outro trabalho que é realmente único em nosso período não tem de ser necessariamente produzido em um computador. A infoestética pode se referir à experiência de se viver numa sociedade da informação através do seu design, textura, composição, estrutura, construção, sensibilidade e outras dimensões artísticas. (Manovich, 2012 p. 3).

Conforme ideias de Manovich, a infoestética refere-se às práticas culturais que podem ser melhor compreendidas como uma resposta às novas prioridades da sociedade, que busca dar sentido a esse grande volume de informação. A seguir, veremos como Manovich, no contexto da infoestética, propõe formas de processamento do grande volume de imagens que a tecnologia digital vem permitindo produzir, a fim de se atribuir sentidos passíveis de serem assimilados em prol do conhecimento.

Antes de avançarmos, porém, uma breve digressão: em 1945, o pintor espanhol Pablo Picasso usou a ideia de se obter uma nova reprodução estética a partir da "transformada" de uma informação. Ele criou um desenho realista do touro em tinta litográfica e começou a reproduzi-lo em fases cada vez mais simples. Trata-se da série "O Touro", que é uma sequência de onze litografias, que se transformaram numa referência de arte moderna, sobre como desenvolver um trabalho artístico, desde o estilo mais acadêmico até o mais simples e abstrato, tendo em vista encontrar o verdadeiro valor absoluto da informação.

---

<sup>9</sup>Nascido em Moscou em 1960, é crítico de cinema e professor universitário. É pesquisador na área de novas mídias, mídias digitais, design e estudos do software (software studies). Lev Manovich mudou-se para Nova Iorque nos anos 1980, onde realizou seus estudos em cinema e computação. É autor de vários livros, entre eles *Software Culture* (2010.) e *The Language of New Media* (2001). Atualmente Manovich é professor e coordenador do Centro de Pós-graduação em Humanidades Digitais (Digital Humanities) na City University of New York (CUNY), local onde fundou o primeiro centro de pesquisa dedicado ao tema das humanidades digitais, com programas de mestrado e doutorado na área.

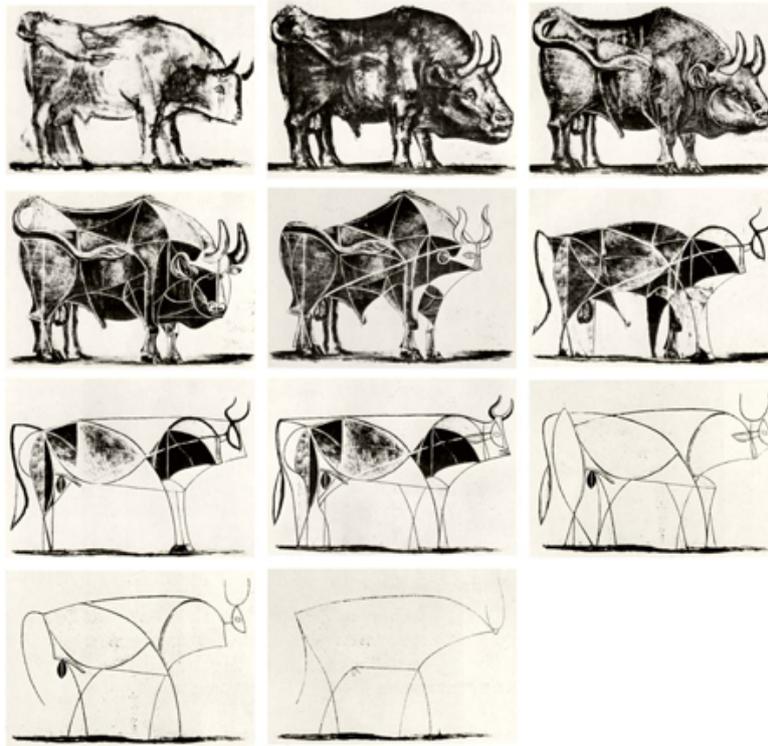


Figura 31: Pablo Picasso, litografias da série “O touro” (1945).

Nesta criação artística, Picasso reduziu o touro a um simples esboço, cuidadosamente elaborado através do desenvolvimento progressivo de cada imagem, que buscava captar a essência informacional da criatura numa imagem tão resumida quanto possível. Esta é a ideia principal da Infoestética: obter uma nova representação estética da informação, despertando uma maior sensibilidade e atenção para o que está sendo mostrado. Com a expansão da tecnologia digital e a conseqüente era da informação em ascensão, geram-se uma chuva de informações que são despejadas sobre nós que usamos essas tecnologias, sendo que, muitas vezes, não sabemos processá-las de forma produtiva. Pela quantidade excessiva de conteúdo, nos deparamos com uma necessidade de reduzir a escala e obter uma nova produção resumida da informação, que antes estava inviável de ser observada pela escala em que se encontrava.

Entendido a ideia de transformar a informação para se obter uma outra representação, como exemplificado na série "O Touro", e com a necessidade de compreender a informação em larga escala, devido a ascensão da era da informação, podemos localizar os trabalhos de Manovich como uma das potencializações do campo da visualização de dados que carrega a preocupação estética e informacional na busca de traduzir representações quantitativas de dados em representações visuais.

Alguns dos trabalhos de Manovich foram realizados pelo mesmo software em que estamos trabalhando para gerar o espectro de Fourier, o *ImageJ*. Sendo programador, Manovich desenvolveu junto com a *Software Studies Initiative* uma macro com a linguagem java, que ele chamou de *ImagePlot*, uma espécie de rotina que plota milhares de imagens em um só plano gerando uma nova representação visual, tendo como aliado as técnicas matemáticas que permitiram o uso da lógica para a produção.

Como podemos visualizar milhões de fotos tiradas em Nova York, Toquio ou Tel Aviv, de tal maneira que as diferenças culturais entre essas cidades pudessem ser reveladas? Como podemos ler as "histórias" compostas por sequências de fotos dos usuários? Manovich ressalta:

Portanto, enquanto podemos dizer que hoje vivemos em uma 'cultura fotográfica', também temos que começar a ler a palavra 'fotográfica' de uma nova maneira. Hoje 'fotográfica' é realmente foto-GRÁFICA, a foto fornecendo apenas uma camada inicial para a mistura gráfica em geral. (Manovich, 2006 p. 4).

São ponderações que levaram à criação do Phototrails, um projeto de pesquisa que utiliza técnicas de visualização de mídia, para explorar padrões visuais, dinâmicas e estruturas, em fotos gerada por diversos usuários. Abaixo, como exemplos dessas possibilidades de "transformadas de informação", segue amostra de quatro dias consecutivos de visualização de imagens de Nova York (montagem de 57.983 fotos) e Tóquio (montagem de 53.498 fotos), feitas entre os dias 18 e 25 de fevereiro de 2012 (fotos são ordenados por data e hora de envio, de cima para baixo, da esquerda para a direita).

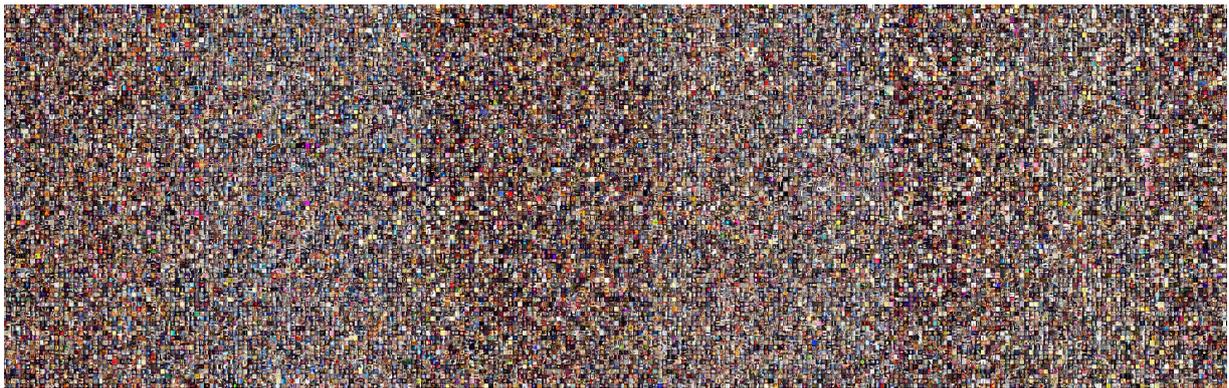


Figura 32: Mosaico de Nova York.  
<http://phototrails.net/nyc-montage-time>



Figura 33: Mosaico de Tóquio.  
<http://phototrails.net/tokyo-montage-3>

50.000 fotos Instagram de New York City, organizado pela média de brilho (perímetro) e média matiz (raio).

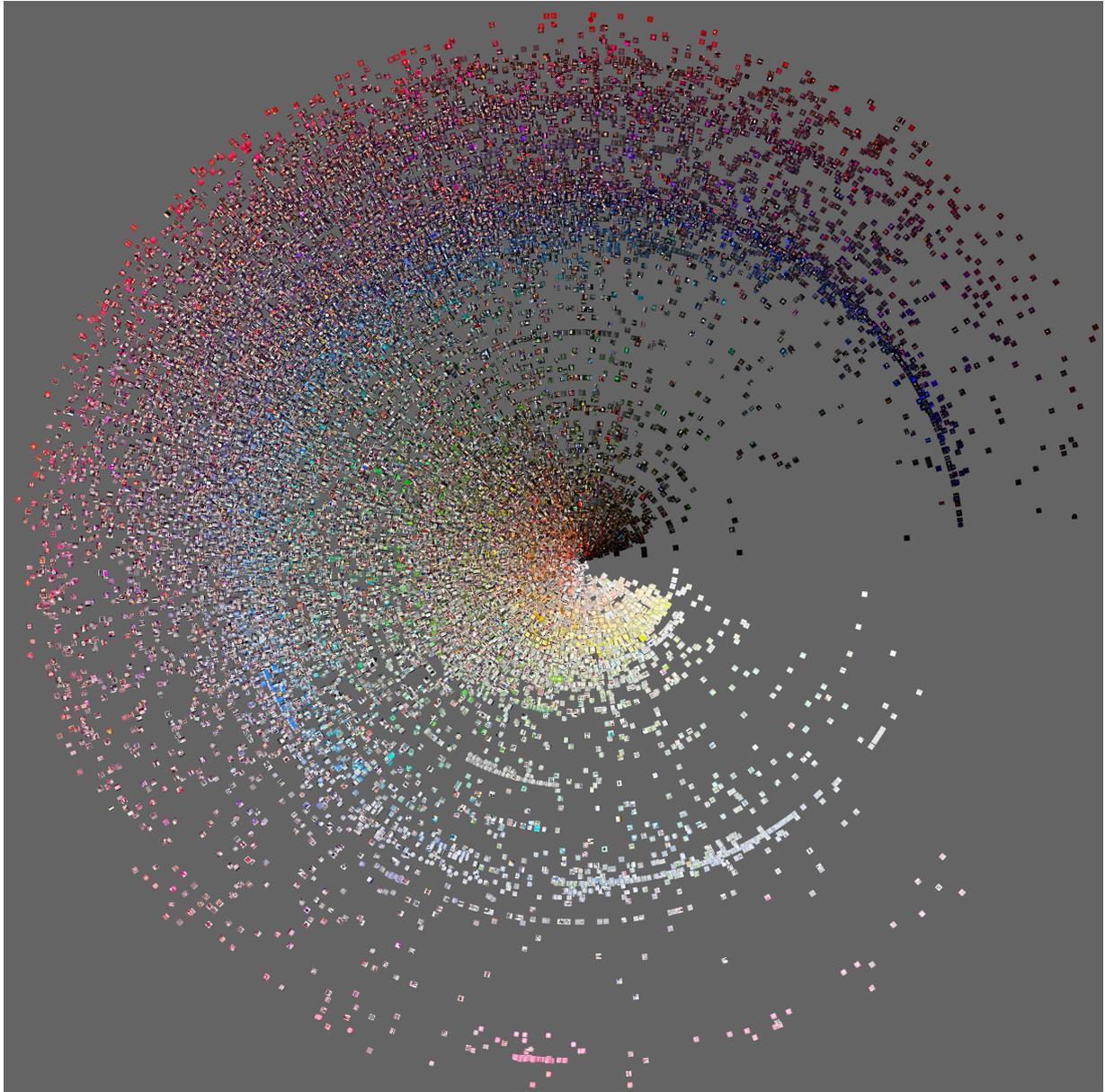


Figura 34: Imagens formando uma circunferência.  
<http://phototrails.net/new-york>

50.000 fotos Instagram de Tóquio, organizado pela média matiz (perímetro) e média luminosidade (raio).

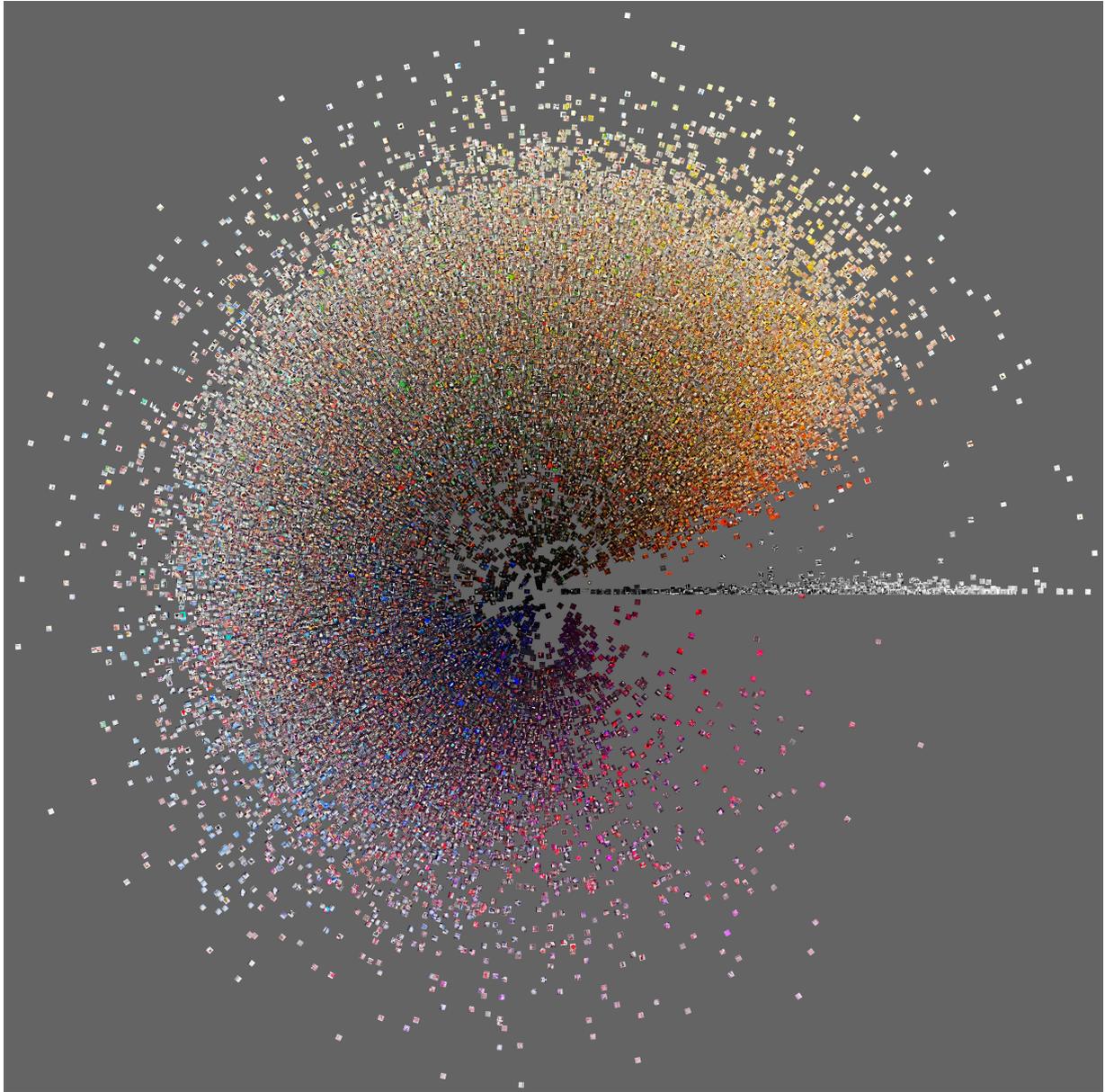


Figura 35: Imagens formando uma espiral.  
<http://phototrails.net/tokyo>

Com a apresentação de tais trabalhos feitos por Manovich, não podemos deixar de agregar a importância fundamental e necessária da matemática para as suas composições, tal como ele mesmo indica, quando usou um método de ordenação, o cálculo da média de luminosidade das imagens, ou a unidade de distância como delimitação de área.

O que propomos neste trabalho é encarar o Espectro de Fourier, conseguido através da técnica matemática da transformada de Fourier, como uma possibilidade para a infoestética visto que usa da mesma lógica pensada por Manovich que é transmitir a informação num outro plano de visão. Se para Manovich, cada imagem constitui uma unidade de informação, para a reprodução do Espectro de Fourier, tomamos cada pixel de uma imagem como ponto de partida, isto é, como unidade de informação.

Com isso, conseguimos trabalhar sob a mesma lógica, que é transformar grande quantidade de dados neste caso, os pixels, em um outro espaço de visualização, obtendo uma nova compreensão sobre a informação inicial, a partir de uma nova opção estética.

## Considerações finais

Um novo paradigma visual para a imagem, baseado na representação realista dos objetos em cena, teve origem com a invenção da fotografia. Com os computadores chegando à sociedade, por volta de 1940, essa busca tornou-se cada vez mais incessante, gerando grandes aplicações em várias áreas da sociedade, sobretudo a partir de 1964, com a necessidade de melhorar os aspectos visuais de fotografias tiradas da lua, tal como evidenciado anteriormente.

Não tenho dúvidas de que as imagens carregam suas estéticas em suas formas de representar e transmitir informação, e que tais estéticas dependem cada vez mais das possibilidades dos PDI's.

Poderíamos imaginar uma análise: como seriam os Espectros de Fourier das 11 imagens do Dia-D de Robert Capa, ou do projeto *Genesis* de Sebastião Salgado, por exemplo? Ou pela visão de Manovich, será que todas elas, num só plano, resultariam numa informação inédita desses registros?

Como seriam os Espectros de Fourier dos trabalhos de Manovich? Ou ainda, como seriam a representação de milhares de Espectros de Fourier com a visão quantitativa resumida de Manovich?

Diante dessas possíveis mudanças na estruturação das imagens, abre-se um novo campo de estudo, que talvez seja capaz de indicar tendências para pensarmos sobre o real papel da imagem em nossa sociedade. O que devemos esperar da imagem na era da infoestética? Em resumo, qual o futuro da imagem?

Nosso trabalho é descobrir o que é o novo belo na era da informação. Não penso que já o sabemos. Esse novo belo que virá talvez nada tenha a ver com a forma do iMac, ou com as músicas parecidas com máquinas do Kraftwerk ou as formas de bolhas da arquitetura contemporânea. Se não tivermos sorte, será algo que até mesmo as nossas máquinas acharão feias. No ponto em que estamos simplesmente não sabemos ainda... (Manovich, 2012 p.5).

A imagem perderá sua essência e servirá somente como matéria prima para a "mistura gráfica de Manovich"?

Nesse cenário indefinido, cabe somente notar que, qualquer análise de uma possível estética emergente diante do crescimento desenfreado das tecnologias digitais na era da informação, deverá confrontar-se com a realidade de que as imagens estão em constante transformação, ocasionado pela crescente assimilação da matemática computacional.

## Bibliografias

BURGUER, Wilhelm; BURGE, Mark J. **Digital Image Processing - An Algorithmic Introduction using Java**; 1. ed. New York: Ed. Springer, 2008.

CUNY, Software Studies Initiative. **ImagePlot visualization software: explore patterns in large image collections**. Nova York. Disponível em: <<http://lab.softwarestudies.com/p/imageplot.html>>. Acesso em: 29/10/2014.

FALCÃO, Alexandre X.; CHIACHIA, Giovani. **Introdução ao Processamento de Imagem Digital**. São Paulo, 2014. Disponível em: <<http://www.ic.unicamp.br/~afalcao/mo443>>. Acesso em: 29/09/2014.

FIGUEIREDO, Djairo G. de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1977.

FERREIRA, Tiago; RASBAND, Wayne. **ImageJ User Guide**. 2012. <[imagej.nih.gov/ij/docs/guide/user-guide.pdf](http://imagej.nih.gov/ij/docs/guide/user-guide.pdf)>. Acesso em: 01/11/2014.

GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. **Digital Image Processing**; 2. ed. New Jersey: Ed. Prentice Hall, 2002.

KODAK. **História da fotografia**. Brasil, 2014. Disponível em: <[http://wwwbr.kodak.com/BR/pt/consumer/fotografia\\_digital\\_classica/para\\_uma\\_boa\\_foto/historia\\_fotografia/historia\\_da\\_fotografia02.shtml?primeiro=1](http://wwwbr.kodak.com/BR/pt/consumer/fotografia_digital_classica/para_uma_boa_foto/historia_fotografia/historia_da_fotografia02.shtml?primeiro=1)>. Acesso em: 28/09/2014.

LEITE, Enio. **Primeira Fotografia Colorida irá completar 152 anos**. São Paulo, 2011. Disponível em: <<http://focusfoto.com.br/primeira-fotografia-colorida-faz-150-anos/>>. Acesso em: 1/10/2014.

MANOVICH, Lev. **Image Future**. 2006. Disponível em: <[http://manovich.net/content/04-projects/046-image-future/45\\_article\\_2006.pdf](http://manovich.net/content/04-projects/046-image-future/45_article_2006.pdf)>. Acesso em: 29/10/2014.

PEIXOTO, PS. **Resolução numérica de EDPs utilizando ondaletas harmônicas**. São Paulo, 2009. Disponível em: <[www.ime.usp.br/~pedrosp/Peixoto-OndaletasHarmonicas-2009.pdf](http://www.ime.usp.br/~pedrosp/Peixoto-OndaletasHarmonicas-2009.pdf)>. Acesso em: 30/10/2014.

SILVA, Cicero I da. **A era da InfoEstética - Entrevista com Lev Manovich**. Minas Gerais, 2012. Disponível em: <<http://lumina.ufjf.emnuvens.com.br/lumina/article/download/232/227>>. Acesso em: 27/10/2014.

SODRÉ, U. **Séries de Fourier, notas de aulas**. Paraná, 2003. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/sfourier.pdf>>. Acesso em: 2/10/2014.

SODRÉ, U. **Transformadas de Fourier, notas de aulas**. Paraná, 2003. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/tfourier.pdf>>. Acesso em: 2/10/2014.

STRAUSS, Walter A. **Partial Differential Equations: An Introduction**. 2. ed. New York: Ed. Wiley, 2008.

TORRES, Ricardo da Silva. **Disciplina MC202: Estruturas de Dados - Laboratório N° 01**. São Paulo, 2006. Disponível em: <[http://www.ic.unicamp.br/~rtorres/mc202D\\_06s1/laboratorios/01/enunc.html](http://www.ic.unicamp.br/~rtorres/mc202D_06s1/laboratorios/01/enunc.html)>. Acesso em: 2/10/2014.