João Fernando da Cunha Nariyoshi

Introdução aos Métodos Variacionais

São Paulo

28 de novembro de 2014

João Fernando da Cunha Nariyoshi

Introdução aos Métodos Variacionais

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo como requisito para obtenção do título em Bacharel em Matemática Aplicada com Habilitação em Métodos Matemáticos.

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

São Paulo

28 de novembro de 2014

Ozymandias

I MET a traveller from an antique land
    Who said: “Two vast and trunkless legs of stone
Stand in the desert. Near them on the sand,
    Half sunk, a shatter’d visage lies, whose frown
And wrinkled lip and sneer of cold command
Tell that its sculptor well those passions read
    Which yet survive, stamp’d on these lifeless things,
The hand that mock’d them and the heart that fed.
And on the pedestal these words appear:
    ‘My name is Ozymandias, king of kings:
Look on my works, ye mighty, and despair!’
    Nothing beside remains. Round the decay
Of that colossal wreck, boundless and bare,
    The lone and level sands stretch far away.”

P. B. Shelley (1792-1822)

Resumo

O objetivo deste trabalho é elucidar a elegância e o poder do método variacional para equações diferenciais, usando os conhecimentos adquiridos no curso de graduação. Nosso problema modelo são as chamadas equações elípticas semilineares, que surgem em uma série de situações em Física, Geometria e em Engenharia.

Para isto, será adequado se utilizar a teoria dos espaços de Sobolev, cujas características geométricas e topológicas são propícias ao uso de argumentos variacionais. Com estas ferramentas em mão, mostramos brevemente como elas permitem um estudo simples de equações elípticas lineares.

Na presença de não-linearidades, é necessário se recuperar os procedimentos básicos do Cálculo Diferencial ordinário. Conceitos como diferenciabilidade, o teorema de Weierstrass e a regra dos multiplicadores de Lagrange são estendidos a espaços de dimensão infinita e alguns exemplos de aplicação são apresentados.

Finalmente, é feita uma exposição dos teoremas “minimax” mais elementares. Estas técnicas, de alto nível de complexidade e sofisticação, fornecem meios de provar existência de soluções mesmo quando os funcionais envolvidos deixam de ser limitados superior e inferiormente.

Palavras-chaves: Métodos Variacionais. Equações Elípticas Semilineares. Espaços de Sobolev. Cálculo Diferencial. Métodos Minimax.

Sumário

1 Motivação

Apesar de o Cálculo de Variações - o estudo de minimização de funcionais (funções reais definidas em espaços de funções) - ser visto como um desdobramento do Cálculo Diferencial em espaços euclidianos, ambos surgiram simultaneamente. De fato, é notável que I. Newton, G. W. Leibniz *et al.* resolveram em 1696 o famoso problema da braquistócrona: *"dados dois pontos, qual é a curva sobre qual uma partícula desliza (sem atrito), do repouso e somente sob ação da gravidade, de um ponto a outro em tempo mínimo?"*. A resposta vem a ser uma cicloide, mas a sua dedução não é exatamente simples (veja *e.g.* Troutman [26]).

O tratamento sistemático de tais questões iniciou-se em 1750 por L. Euler, ao descobrir, que em diversas situações, a fim de uma função fosse um mínimo para um funcional, era necessário que ela satisfizesse uma certa equação diferencial ordinária - a dita "equação de Euler". Tal condição é o análogo variacional a uma aplicação de uma variável real ter derivada zero em um ponto.

Se substituir um problema de minimização em dimensão infinita por uma equação diferencial, algo em geral mais bem compreendido, era um caminho viável, notou-se em meados do século 19 que a recíproca também era possível e significativa. Um exemplo disso foi o cunhado "método de Dirichlet", em homenagem a G. P. L. Dirichlet, mas que também era conhecido a C. F. Gauss, G. Green e B. Riemann. Este consistia em resolver o problema a valores de fronteira para a equação de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde Ω é um aberto limitado suave em $\mathbb{R}^n$, Δ é o laplaciano em n variáveis $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é contínua, minimizando a "energia"

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

sob o conjunto das funções reais $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (isto é, cujas derivadas até ordem 2 têm extensões contínuas ao fecho de Ω) e que são iguais a g em $\partial\Omega$. (Observe que I é limitado inferiormente).

Certamente, se u fosse solução deste problema de minimização, teríamos

$$I(u) \leq I(u + t\phi)$$

para $t > 0$ e qualquer aplicação $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e suporte compacto. Portanto, integrando por partes através do teorema da divergência

$$\begin{aligned} I(u) &\leq I(u+t\phi) \\ &= I(u) + t\int_{\Omega} \nabla\phi(x)\cdot\nabla u(x)dx + t^2 I(\phi) \\ &= I(u) - t\int_{\Omega} \phi(x)\ \Delta u(x)dx + t^2 I(\phi) \end{aligned}$$

Se subtrairmos $I(u)$ de ambos os lados, dividirmos por t e passarmos ao limite $t \to 0$, obtemos

$$\int_{\Omega} \phi(x)\ \Delta u(x)dx \leq 0$$

Trocando ϕ por $-\phi$, a desigualdade acima se inverte, culminando na *equação*

$$\int_{\Omega} \phi(x)\ \Delta u(x)dx = 0.$$

Portanto, pela arbitrariedade de ϕ, um argumento clássico de densidade (por vezes chamado de "lema fundamental do Cálculo de Variações") acarreta que $\Delta u \equiv 0$ identicamente em Ω, mostrando que u é a solução de (1.1) (a unicidade segue do princípio do máximo). Na nomenclatura tradicional do Cálculo de Variações, diz-se que "$\Delta u(x) = 0$" é a "equação de Euler" de I.

Gauss, Green e Dirichlet justificavam que o minimizador u sempre existia, uma vez que tal equação modela (dentre outros fenômenos) o potencial eletrostático em uma região e, por argumentos metafísicos (como o "princípio da mínima ação de Maupertuis"), a Natureza sempre minimizaria a energia I.

Pelos idos de 1870, se percebeu que tais silogismos podiam falhar e críticas como as de K. Weierstrass, que notou que problemas matemáticos de minimização (mesmo limitados inferiormente) podiam ser insolúveis, e de J. Hadamard, que exibiu em Ω = [disco unitário em $\mathbb{R}^2$] uma g contínua para a qual a solução u de (1.1) tinha $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = +\infty$ (ou seja, estava fora do domínio de I), fizeram com que o método de Dirichlet, nas palavras de C. Neumann, "afundasse e saísse de vista". (Para maiores detalhes, recomenda-se a leitura de de Figueiredo [8]).

Entretanto, assim como em um filme hollywoodiano, o método variacional "ressuscitou" na virada do século 20, através do trabalho seminal de D. Hilbert. O seu procedimento consistia de duas etapas: primeiro, se estendia a noção de solução para um contexto em que o método variacional se aplicava de modo simples, mas rigoroso; e, por fim, se deduzia que tal solução generalizada, sob ligeiras condições de regularidade, era também uma solução clássica (isto é, no sentido usual). Apesar de tal argumento não produzir resultados ótimos para a equação de Laplace, podia ser facilmente generalizado e usado para estudar problemas de natureza não-linear.

O objetivo deste trabalho é elucidar a elegância e o poder do método variacional para equações diferenciais, usando os conhecimentos adquiridos no curso de graduação. O nosso modelo de estudo é equação elíptica semilinear

$$\begin{aligned} (-\Delta u)(x) &= f(x, u(x)) && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$ arbitrário) um aberto limitado suave e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alguma não-linearidade dependendo de x e u. Problemas desta forma surgem em Geometria Diferencial (equação de seno-Gordon, o problema de Yamabe), em Física (teoria quântica dos campos, equações de Schrödinger, mecânica estatística) e também em Engenharia e em Biologia (Badiale e Serra [2], Lions [15]).

O espaço de funções "generalizadas" adequado para se analisar (1.2) é o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, por possuir uma estrutura rica e facilitar as estimativas sobre o crescimento de seu funcional relacionado, a saber:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x))dx$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$. Por isso, ocuparemo-nos no primeiro capítulo em apresentar suas propriedades mais importantes. Mostramos brevemente como tais características permitem um estudo simples de equações elípticas lineares (isto é, quando f não depende de u). Ao fim, apresentamos duas propriedades qualitativas (um princípio do máximo e a decomposição espectral) do laplaciano, que serão de muita utilidade na sequência.

O segundo capítulo tratará da extensão dos procedimentos vistos nos cursos de Cálculo em espaços euclidianos para espaços de dimensão infinita. Recuperaremos técnicas importantes, como diferenciabilidade, o teorema de Weierstrass e a regra dos multiplicadores de Lagrange, e exibiremos como elas se aplicam.

Finalmente, a última seção do texto será uma breve introdução os princípios "minimax", que servem para mostrar a existência de soluções para (1.2) mesmo quando I é ilimitado superior e inferiormente, mas cujo comportamento pode ser descrito em certos subconjuntos. Provaremos, por exemplo, o célebre "teorema do passo da montanha" de A. Ambrosetti e P. Rabinowitz.

Esperamos que, ao terminar esta monografia, o leitor esteja apto e interessado a investigar como a teoria aqui apresentada evolui em tratados como Kavian [12], Rabinowitz [19], Struwe [25] e Willem [27].

1.1 Agradecimentos

Nas últimas duas décadas, tenho sido imensamente abençoado com a presença ilustre de inúmeros companheiros e mestres. Assim sendo, a possibilidade de esquecer algum desses nomes é tão aterrorizante a mim, que eu preferiria não citar aqui ninguém em especial. Contudo, parece-me claro de que isto seria um grande pecado.

Gostaria primeiro de agradecer ao professor Orlando Lopes pela atenção, incentivo e pelas excelentes sugestões de livros e filmes dadas ao longo da orientação deste trabalho.

Outro nome que não poderia faltar é o do professor Ricardo Freire, meu primeiro mentor e amigo no IME-USP.

Mando também um salve para os meus "*partners in crime*" Helder, Marcelo, Renan e Willian, por motivos que é melhor não revelar.

Last but not least, deixo a minha admiração e carinho às pessoas mais importantes na minha vida: o meu pai, meu irmão e a minha cunhada.

Dedico este obra à memória de minha mãe; *"a saudade nunca vai, mas a saudade sempre volta"*.

João F. da Cunha
São Paulo, 28 de novembro de 2014

2 A teoria linear

2.1 Funções generalizadas

2.1.1 Uma breve recapitulação da Teoria de Distribuições

Recordemos alguns fatos básicos da teoria de distribuições. Para uma discussão mais detalhada, recomendamos as referências Hörmander [11] e Rudin [22].

Seja Ω um conjunto aberto não-vazio do espaço $\mathbb{R}^n$. Por $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathscr{D}(\Omega)$, mais tradicionalmente) entendemos o espaço linear (real) de todas as funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de suporte compacto e de classe C^∞; tais aplicações serão chamadas de *funções-teste*.

Em $C_c^\infty(\Omega)$ é possível se introduzir uma topologia (não-metrizável) que o torna em um espaço linear topológico localmente convexo e que tem a seguinte noção de convergência: a fim de que uma sequência (φ_k) em $C_c^\infty(\Omega)$ tenha limite para um elemento φ, é necessário e suficiente que o suporte de todas φ_k's e de φ estejam contidas em um mesmo compacto $K \subset \Omega$ e que as derivadas $D^\alpha\varphi_k$ convirjam uniformemente para $D^\alpha\varphi$ para todo multiíndice α. [1]

Um funcional linear $\Lambda : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é contínuo nesta topologia é chamado de uma *distribuição* em Ω; e denota-se por $\mathscr{D}'(\Omega)$ o conjunto de todas as distribuições. Pode se provar que uma forma linear Λ em $C_c^\infty(\Omega)$ é uma distribuição se, e somente se, ela satisfaz uma das afirmações equivalentes abaixo:

(i) para toda seqüência (φ_k) em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to 0$ (função nula) em $C_c^\infty(\Omega)$, $\Lambda(\varphi_k) \to 0$ em $\mathbb{R}$;

(ii) para todo compacto $K \subset \Omega$, existir um inteiro $N \geq 0$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C\left(\operatorname*{Max}_{|\alpha|\leq N} |D^\alpha\varphi|\right)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com suporte em K.

Desta proposição, temos que toda função localmente integrável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (isto é, u é mensurável à Lebesgue e $\int_K |u| dx < +\infty$, para todo compacto $K \subset \Omega$) é uma "distribuição" no seguinte sentido: a u associamos a distribuição Λ_u tal que $\Lambda_u(\varphi) = \int_\Omega u\varphi dx$. Através do

[1] Usaremos aqui a notação de L. Schwartz. Em $\mathbb{R}^n$, um multiíndice é uma lista ordenada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de n inteiros não-negativos. Para cada multiíndice α, denotamos o operador diferencial $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, onde $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ é a derivada parcial em relação à i-ésima coordenada. A ordem de α é definida como $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_n$; se $|\alpha| = 0$, $D^\alpha\varphi = \varphi$.

teorema de Lusin, se mostra que se duas funções localmente integráveis dão origem à mesma distribuição, então elas são iguais em quase todo ponto.

Portanto a identificação das funções ordinárias $u \to \Lambda_u$ está bem definida e se escreve u ao invés de Λ_u. (Este ponto de vista está de acordo com os problemas advindos da Física, uma vez que as medições experimentais são quase sempre médias). É neste sentido que se chama uma distribuição de uma "função generalizada"; no entanto deve-se ressaltar que $\mathscr{D}'(\Omega)$ contém diversos outros objetos, como o "delta de Dirac".

Para um multiíndice α, definimos a derivada distribucional D^α de $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ como a distribuição $D^\alpha\Lambda$ dada por regra de "integração por partes"

$$(D^\alpha\Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi) \tag{2.1}$$

se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Usando partições da unidade no suporte de φ, é fácil ver que se u e $D^\alpha u$ são funções contínuas, temos na notação anterior que $D^\alpha\Lambda_u = \Lambda_{D^\alpha u}$. Dessa forma o novo conceito de derivada generaliza o limite de quocientes clássico. Ademais, neste contexto funções têm derivadas de todas as ordens.

Como a ordem em que as derivadas são realizadas para φ não tem importância, (2.1) mostra que o mesmo vale para Λ; ou seja, vale uma expressão do tipo $D^{\alpha+\beta}\Lambda = D^\alpha(D^\beta\Lambda)$.

Assim, na filosofia de identificar funções com médias, dizemos que uma distribuição Λ satisfaz uma equação diferencial parcial de ordem N da forma

$$\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x) = f(x) \tag{2.2}$$

onde f é uma função localmente integrável e $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ são de classe C^∞ se

$$\sum_{|\alpha|\le N} (D^\alpha\Lambda)(a_\alpha\varphi) = f(\varphi)$$

para qualquer função teste φ (observe que $a_\alpha\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$).

Apesar de a definição acima parecer abrangente demais para o estudo das equações diferenciais, ela permite a dedução de vários teoremas profundos, especialmente se restringirmos o nosso estudo a certas classes de distribuições, como veremos a seguir.

2.1.2 Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Depois deste breve prelúdio, estamos em condições para definir os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ para um inteiro $m \ge 0$ e $1 \le p \le \infty$. Aqui a medida será a medida de Lebesgue.

Dizemos um que "função"[2] $u \in L^p(\Omega)$ está em $W^{m,p}(\Omega)$ caso suas derivadas distribuicionais $D^\alpha u$ até ordem m estiverem em $L^p(\Omega)$. Isto é, se $|\alpha| \leq m$, existe uma função $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \varphi\,(D^\alpha u)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha \varphi)\; u dx \tag{2.3}$$

para toda função teste φ.

Algumas observações importantes são as seguintes:

- pela desigualdade de Hölder toda função u em $L^p(\Omega)$ é localmente integrável e por isso pudemos intepretá-la como uma distribuição;
- a notação $D^\alpha u$ pode ser empregada, uma vez que, pelas observações passadas, se duas funções forem uma derivada distribucional de u, elas serão iguais em quase toda parte;
- quando $m = 0$, $W^{0,p}(\Omega)$ nada mais é que $L^p(\Omega)$;
- por densidade, (2.3) é também válida para todas φ de suporte compacto e de classe C^m. Isso quer dizer, $W^{m,p}(\Omega)$ "opera" sobre um espaço maior que $C_c^\infty(\Omega)$ e portanto pode-se definir a noção de uma função $u \in W^{m,p}(\Omega)$ satisfazer uma equação da forma (2.2) mesmo quando os coeficientes a_α *não* forem necessariamente suaves (vide a próxima seção).

Em $W^{m,p}(\Omega)$ se introduz a norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_p$$

($||\ ||_p$ é a norma de $L^p(\Omega)$) ou então a norma equivalente

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_p^p \right\}^{1/p} \tag{2.4}$$

se $1 \leq p < \infty$ e

$$||u||_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \operatorname*{Max}_{|\alpha|\leq N} ||D^\alpha u||_\infty$$

para $p = \infty$.

O caso $p = 2$ é especial. Escrevendo $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, a norma $|\ |_{H^m(\Omega)}$ de (2.4) advém do produto escalar

[2] As aspas se devem ao fato de identificarmos funções que são iguais em quase todos os pontos.

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u \; D^\alpha v \; dx$$

Usando a teoria básica dos espaços de Lebesgue L^p, não é difícil se inferir que

Teorema 1. *Para todo inteiro $m \geq 0$, os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, são separáveis para $1 \leq p < \infty$ e reflexivos para $1 < p < \infty$. Em particular, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Enunciaremos agora alguns teoremas que usaremos mais adiante; suas demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em Brezis [3], Cazenave [5] ou em Gilbarg e Trudinger [10].

Teorema 2 (Meyers–Serrin)**.** *Para $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, o conjunto $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Por isso, $W^{m,p}(\Omega)$ pode ser entendido como o completamento das funções $u \in C^\infty(\Omega)$, para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ $(|\alpha| \leq m)$, sob a norma $\| \; \|_{W^{m,p}(\Omega)}$. Se Ω for de classe C^m, então $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$;[3] [4] isto é uma consequência do:

Teorema 3 (Teorema de extensão)**.** *Se Ω for de classe C^m e sua fronteira $\partial\Omega$ for limitada, então existe um operador linear P que mapeia $W^{m,p}(\Omega)$ continuamente em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$, de modo que, se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, a restrição de Pu a Ω é igual a u. Ademais, se $u \in C^m(\overline{\Omega})$, $Pu \in C^m(\mathbb{R}^n)$ e tem suporte compacto.*

Na prova da proposição acima, utiliza-se que os espaços de Sobolev são, de certa maneira, invariantes por difeomorfismos. Uma outra regra operacional conveniente é:

Teorema 4 (Regra da Cadeia)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 por trechos, tal que $f(0) = 0$ e $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, se $u \in W^{1,p}$, $(f \circ u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e vale*

$$D_i(f \circ u)(x) = \begin{cases} f'(u(x))(D_i u)(x), & \textit{se } f \textit{ for derivável em } u(x), \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

[3] Um aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é dito de classe C^m, se para todo $x \in \partial\Omega$, houver uma vizinhança $U \ni x$, tal que

$$\partial\Omega \cap U = \phi(V \cap \{x_n = 0\})$$
$$\Omega \cap U = \phi(V \cap \{x_n < 0\})$$

onde V é o cilindro $\{x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1 \text{ e } |x_n| < 1\}$ e $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^m sobre sua imagem. Informalmente, $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^m e Ω está "no lado de dentro dessa superfície" (sob certas condições, esta asserção pode ser feita rigorosa; consulte Lima [13], capítulo 4). Se Ω for de classe C^∞, diremos que ele é *suave* ou *regular*.

[4] Dizemos também que $u \in C^m(\overline{\Omega})$ se $u \in C^m(\Omega)$ e suas derivadas até ordem m tenham uma extensão contínua até a fronteira.

Portanto, a parte positiva $u^+ = (u + |u|)/2$, negativa $u^- = (|u| - u)/2$ e o valor absoluto $|u|$ de uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ permanecem em $W^{1,p}(\Omega)$.

Um resultado notável, primeiramente descoberto por S. L. Sobolev, é que, se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, u tem uma regularidade maior do que era evidente *a priori*. De fato, Sobolev provou usando técnicas de transformada de Fourier que:

(i) se $n > 2$, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*}\, dx \right\}^{1/2^*} \leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx \right\}^{1/2}$$

onde 2^* é dado por $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$;

(ii) se $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ e $k \geq 0$ é um inteiro tal que $m > k + n/2$, então u é igual em quase todo ponto a uma função de classe C^k.

Posteriormente E. Gagliardo, L. Nirenberg e C. B. Morrey estenderam tais conclusões ao que, na linguagem moderna da Análise Funcional, seria o seguinte teorema:

Teorema 5 (Desigualdades de Sobolev). *Seja $m \geq 0$ um inteiro, $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^m e de fronteira limitada. Então se:*

(i) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

(ii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $p \leq q < \infty$;

(iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \cap C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, onde, se $1 \leq p < \infty$, k é a parte inteira de $m - \frac{n}{p}$ e θ é a sua parte fracionária, e se $p = \infty$, $k = m - 1$ e $\theta = 1$;[5,6]

e todas as injeções acima são contínuas.

Se Ω for *limitado*, este resultado pode ser sensivelmente melhorado, pois as injeções se tornam *compactas*:

Teorema 6 (Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e de classe C^1. Então:*

(i) se $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ compactamente para todo $1 \leq q < p^*$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

(ii) se $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ compactamente para todo $1 \leq q < \infty$;

5 O espaço de Hölder $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, para $k \geq 0$ um inteiro e $0 < \theta \leq 1$, é definido como o conjunto das funções $u \in C^k(\Omega)$ tais que $\mathrm{Sup}_{x \neq y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\theta} < \infty$ para todo multiíndice α de ordem k. Note que isto implica que todas as derivadas de u são uniformemente contínuas, por isso $u \in C^k(\overline{\Omega})$. Em $L^\infty(\Omega) \cap C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, usa-se a norma $\|u\| = \sum_{|\alpha| \leq k} \mathrm{Sup}_\Omega |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha| = k} \mathrm{Sup}_{x \neq y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\theta}$, tornando-o num espaço de Banach. Evidentemente, se Ω for limitado, a interseção com $L^\infty(\Omega)$ pode ser dispensada.

6 Quando $p = \infty$, de fato se tem a igualdade $C^{m-1,1}(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega) = W^{m,\infty}(\Omega)$.

(iii) se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ compactamente, onde $\theta = 1 - \frac{n}{p}$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersão compacta.

2.1.3 O subespaço $W_0^{1,p}(\Omega)$

Um subespaço linear relevante de $W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ é $W_0^{1,p}(\Omega)$, o qual é o fecho (em $W^{1,p}(\Omega)$) de $C_c^\infty(\Omega)$ (ou então das funções de classe $C^1(\Omega)$ e suporte compacto). Analogamente, escrevemos $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

A importância de $W_0^{1,p}(\Omega)$ reside no fato que, informalmente falando, eles consistem das $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam em $\partial\Omega$. Mais precisamente:

Proposição 1. *A fim de que uma função $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ pertença a $W_0^{1,p}(\Omega)$, é necessário e suficiente que $u = 0$ em $\partial\Omega$.*

Assim, em problemas com condição de Dirichlet homogênea "$u = 0$ em $\partial\Omega$", será conveniente se procurar por soluções em algum $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ainda, $W_0^{1,p}(\Omega)$ é "menos sensível" a $\partial\Omega$, pelo fato de que a extensão trivial de uma $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, por $u(x) = 0$ se $x \notin \Omega$, estar em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Logo, os teoremas de Sobolev e Rellich-Kondrachov são válidos para $W_0^{1,p}(\Omega)$ *sem* a hipótese de Ω ser de classe C^1.

Notemos que a regra cadeia também permanece válida. Isto é, na notação do teorema 4, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow (f \circ u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Outra propriedade extraordinária é:

Teorema 7 (Desigualdade de Poincaré). *Se Ω for limitado, existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_p \leq C\left\{\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p\right\}^{1/p} \tag{2.5}$$

Consequentemente,

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \left\{\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p\right\}^{1/p}$$

é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a $\| \ \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ e o produto escalar em $H_0^1(\Omega)$ será escolhido como

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$$

2.2 Equações elípticas lineares em espaços de Sobolev

Comecemos com um resultado abstrato.

Teorema 8 (Lema de Lax-Milgram). *Seja H um espaço de Hilbert (real) de norma $|\ |$ e produto escalar $(\ ,\ )$, e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear que é*

- *limitada: existe $C > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq C|u||v|$, para quaisquer $u, v \in H$;*
- *coerciva: existe $\alpha > 0$ tal que $|a(u,u)| \geq \alpha |u|^2$ para qualquer $u \in H$.*

Então para todo $\phi \in H^*$ (dual topológico de H), existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \phi(v) \tag{2.6}$$

para todo $v \in H$. A correspondência de $\phi \to u$ em (2.6) é uma transformação linear contínua de H^* em H. Se a for simétrica, u é caracterizado também como a solução do problema de minimização

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \phi(u) = \operatorname*{Min}_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v) \right\}$$

Bem entendido, este é uma versão do teorema de representação de Riesz-Fréchet. No capítulo que vem, reinterpretaremos este resultado no ponto de vista do cálculo diferencial.

Demonstração. Pelo supracitado teorema de representação de Riesz-Fréchet, existe um único $f \in H$ tal que

$$\phi(v) = (f, v)$$

para qualquer $v \in H$. Pelo mesmo argumento, para todo $u \in H$ existe um único $Au \in H$ tal que

$$(Au, v) = a(u, v)$$

para qualquer $v \in H$. Pelas hipóteses em a, $u \mapsto Au$ é linear e satisfaz:

(i) $|Au| \leq C|u|$, $\forall u \in H$;

(ii) $(Au, u) \geq \alpha|u|^2$, $\forall u \in H$.

O problema então se reduz a determinar $u \in H$ tal que $f = Au$. Para isto valer, é necessário e suficiente que, para todo $v \in H$,

$$(f - Au, v) = 0$$

ou então para $\rho > 0$:

$$((\rho f - \rho Au + u) - u, v) = 0 \tag{2.7}$$

Mas ora, (2.7) é equivalente a u ser a única solução do problema de ponto fixo

$$u = \rho f - \rho A u + u$$

Basta então mostrar que, para um ρ adequado, $v \in H \mapsto Tv = \rho f - \rho A v + v$ é uma contração e aplicar o teorema do ponto fixo de Banach. De fato:

$$\begin{aligned} |Tu - Tv|^2 &= |\rho A(u - v) - (v - u)|^2 \\ &\leq (\rho^2 C^2 - 2\rho\alpha + 1)|u - v|^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

portanto, escolhendo $\rho = \alpha/C^2$ a fim de minimizar o lado direito em (2.8), temos que

$$|Tu - Tv| \leq \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\right)}|u - v|$$

e T se torna contrativa.

É fácil ver que a correspondência $\phi \to u$ é linear e, usando a coercividade de a na igualdade $a(u,u) = \phi(u)$, que $|u| \leq \alpha^{-1}\|\phi\|$.

Se a for além disso simétrica, a prova fica mais simples, pois a expressão $a(u,v)$ define um produto escalar equivalente a (,). Logo, do teorema de Riesz-Fréchet, existe um $u \in H$ tal que

$$\phi(v) = a(u,v)$$

para todo $v \in H$. Este u também é o único zero, portanto único mínimo, do funcional $v \mapsto a(v-u, v-u)$. Deste modo, u também minimiza $v \mapsto a(v,v) - 2a(u,v)$ ou então, por (2.6), $v \mapsto \frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v)$, como queríamos mostrar. □

Apliquemos o lema de Lax-Milgram para algumas equações elípticas lineares de segunda ordem. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado.

Exemplo 1. *(equação com parte principal em forma de divergência)* Considere o problema de Dirichlet:

$$\sum_{i,j=1}^{n} -D_i(a_{ij}D_j u)(x) + a_0 u(x)(x) = f(x) \qquad \text{se } x \in \Omega \tag{2.9}$$

$$u(x) = 0 \qquad \text{se } x \in \partial\Omega \tag{2.10}$$

onde $a_0, f \in C(\overline{\Omega})$, $a_0 \geq 0$ e os $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazem a condição de elipticidade: existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

Trocando a_{ij} por $(a_{ij} + a_{ji})/2$, podemos supor que $a_{ij} \equiv a_{ji}$. Portanto (2.11) é equivalente a se dizer que os autovalores das matrizes simétricas $[a_{ij}(x)]_{ij}$ são uniformemente positivos. Por a_{ij} serem contínuos, estes autovalores também são uniformemente limitados superiormente.

Este tipo de equação é a generalização óbvia das equações de Sturm-Liouville em dimensão um. O caso particular em que $a_0 \equiv 0$, $a_{ij} = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker), (2.9) é simplesmente $(-\Delta)u = f$.

Definamos o que seria uma solução fraca do problema acima; o procedimento é o mesmo que usamos para distribuições. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ for uma solução clássica, multipliquemos (2.9) por uma função teste φ e integremos por partes em Ω obtendo:

$$\int_\Omega \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i u \; D_j \varphi \right) + a_0 u \varphi \right\} dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \tag{2.12}$$

Assim, fica natural se dizer que uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.9) e (2.10) se valer a igualdade (2.12) para toda função teste φ. Como C_c^∞ é denso em $H_0^1(\Omega)$, se u for uma solução fraca, (2.12) é verdade para $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto defina a forma bilinear a em $H_0^1(\Omega)$ por

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i u \; D_j v \right) + a_0 u v \right\} dx$$

Pelas nossas hipóteses, a é limitada e coerciva. Assim, aplicando o teorema de Lax-Milgram para a, $H = H_0^1$ e $\phi \in H^*$ dado por $\phi(v) = \int_\Omega f v \; dx$ (o qual é contínuo, pelas desigualdades de Schwarz e Poincaré), (2.12) sempre admite solução fraca u, que é única e depende "continuamente" com f no sentido de $|u|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_\infty$, para uma constante $C > 0$ dependendo somente de Ω.

Mais ainda, como $a_{ij} \equiv a_{ji}$, a é simétrica e portanto u é caracterizada variacionalmente por

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i u \;\; D_j u \Big) + a_0 u^2 \right\} dx - \int_\Omega f u \; dx =$$
$$\operatorname*{Min}_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i v \; D_j v \Big) + a_0 v^2 \; dx - \int_\Omega f v \right\} dx$$

Este é o chamado "princípio de Dirichlet" e é uma ferramenta muito simples de descrever e obter soluções.

Observe também que (2.12) *faz sentido* se a_{ij} estiverem em $L^\infty(\Omega)$, satisfazerem (2.11) em quase todo $x \in \Omega$ e se $f \in L^2(\Omega)$. Neste caso, Lax-Milgram garante a existência de uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ e a associação $f \in L^2(\Omega) \mapsto Tf = u \in H_0^1(\Omega)$ é linear e contínua.

Exemplo 2. *(Equações elípticas gerais de segunda ordem)* Mais geralmente, podemos considerar uma equação do tipo

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} a_i D_i u + a_0 u = f \qquad \text{em } \Omega \tag{2.13}$$

$$u = 0 \qquad \text{em } \partial\Omega \tag{2.14}$$

onde $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazem a condição de elipticidade (2.11) e os a_i's, a_0 e $f \in C(\overline{\Omega})$. Com algum esforço, podemos modificar os a_i's e deixar (2.13) na forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} -D_i(a_{ij} D_j u)(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i D_i u + a_0 u(x) = f(x) \tag{2.15}$$

mas não existe, como em dimensão um, um método conhecido para reduzir (2.13) a (2.9).

Analogamente, dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução de (2.15) e (2.14) se

$$\int_\Omega \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i u \; D_j v \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i (D_i u) v + a_0 u v \right\} dx = \int_\Omega f v \, dx \tag{2.16}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Defina então a forma bilinear a em $H_0^1(\Omega)$ por

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i u \; D_j v \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i (D_i u) v + a_0 u v \right\} dx.$$

a é limitada, não é simétrica em geral, mas as desigualdades de Schwarz e de Young $ab \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2/4$ $(a, b, \varepsilon > 0)$ mostram que $[u, v] \mapsto a(u, v) + \lambda \int_\Omega uv \, dx$ é *coerciva* se $\lambda > 0$ for suficientemente grande. Portanto, pelo Lema de Lax-Milgram, para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) + \lambda \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

para qualquer que seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Por Ω ser limitado, o teorema de Rellich-Kondrachov implica que podemos entender $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como um operador *compacto*. Assim, nosso problema se torna achar u tal que

$$u = T(f + \lambda u)$$

ou realizando a troca de variáveis $v = f + \lambda u$

$$v - \lambda T v = f. \tag{2.17}$$

Pela alternativa de Fredholm, temos que em (2.17) *unicidade implica existência*. Isto é, se provarmos que para $f \equiv 0$, (2.17) só admite a solução trivial $u \equiv 0$, (2.17) terá sempre solução.

A pergunta natural que surge é então: *"o (2.16) tem unicidade de soluções?"* A resposta mais simples é usando *princípios do máximo* (veja *e.g.* Gilbarg e Trudinger [10]). Para ilustrar, a resposta é afirmativa se $a_0 \geq 0$ ou se $a_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $a_0 > -\lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $\mathscr{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} -D_i(a_{ij}D_j u)$ em Ω com condição de fronteira de Dirichlet nula (veja a seção 2.4).

No restante deste texto, para evitar tecnicalidades, *só* consideraremos o caso do laplaciano $a_{ij} = \delta_{ij}$, com $a_i = a_0 \equiv 0$, cuja forma bilinear associada é

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (u, v)_{H_0^1(\Omega)}.$$

Finalmente algo relevante a se pensar é quando *"fraco é igual a clássico"*, quer dizer, quando as noções de solução fraca e clássica coincidem. Trivialmente, toda solução clássica em $C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca; reciprocamente, integrando por partes e argumentando por densidade, se uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ estiver em $C^2(\overline{\Omega})$, então ela será clássica. Assim, a questão se reduz a saber se, quando uma $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz uma equação elíptica no sentido fraco, ela tem uma regularidade maior que H_0^1.

Um indicativo de que esta pergunta pode ter resposta afirmativa é o seguinte fato de análise complexa: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto não-vazio e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função harmônica, então u é localmente a parte real de uma função holomorfa e portanto tem derivadas contínuas de todas as ordens. Este resultado não deixa de ser impressionante, pois uma igualdade envolvendo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ acarreta informações sobre *todas* derivadas individualmente.

De fato, vale que:

Teorema 9 (Calderón-Zygmund). *Seja $m \geq 0$ um inteiro e suponha que Ω, além de limitado, seja de classe C^{m+2}. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in W^{m,p}(\Omega)$, para algum $1 < p < \infty$, são tais que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

para qualquer função teste φ, então $u \in W^{m+2,p}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ dependendo somente em m, Ω e p tal que

$$\|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

Em particular, se Ω é suave e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Devemos atentar ao fato de que as conclusões acima *não* são válidas se $p = 1$ ou $p = \infty$. Este aqui é uma situação ilustrativa: suponha que Ω seja de classe C^2 e que $f \in C(\overline{\Omega})$. Portanto, $f \in L^p(\Omega)$ para todo $1 < p < \infty$ e, pelo teorema acima e a desigualdade de Sobolev, a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ está em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para *todo* $0 < \alpha < 1$. No entanto, não é verdade que em geral $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Por exemplo, se Ω é o disco unitário em $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{xy}{\log\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$, pode-se provar usando o potencial newtoniano e a fórmula de Poisson que u não é de classe C^2. Mas isto seria verdade com uma condição ligeiramente mais forte:

Teorema 10 (Estimativas de Schauder)**.** *Seja $m \geq 0$ um inteiro, $0 < \alpha < 1$ e suponha que Ω, além de limitado, seja de classe $C^{m+2,\alpha}$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ são tais que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

para qualquer função teste φ, então $u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e existe uma constante $C > 0$ dependendo somente em m, Ω e α tal que

$$\|u\|_{C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

Vale lembrar que, como Ω é limitado, $C^{m,\beta}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, se $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$. Como $C^{0,1}$ é o conjunto das funções lipschitizianas, vemos que, se f satisfizer a condição de Lipschitz e Ω for de classe $C^{2,1}$, $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ para $0 < \alpha < 1$.

As demonstrações dos dois teoremas acima (e dos dois das seções que vem) estão em Gilbarg e Trudinger [10].

2.3 Um princípio do máximo

Seja aqui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado.

Os princípios do máximo são ferramentas muito úteis para se estudar certas qualidades qualitativas das soluções de equações elípticas. Uma versão bem simples, mas a única que precisaremos neste trabalho é a seguinte.

Teorema 11 (Princípio do Máximo)**.** *Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ seja tal que*

$$(-\Delta u)(x) + au(x) \geq 0 \qquad \textit{se } x \in \Omega$$
$$u(x) \geq 0 \qquad \textit{se } x \in \partial\Omega$$

para algum $a \geq 0$. *Então* $u \geq 0$. *Se* Ω *for conexo, então vale a alternativa: ou* $u > 0$ *em* Ω *ou* $u \equiv 0$.

Note que esta versão implica o máximo e o mínimo de uma função harmônica se dão na fronteira de Ω.

Aplicaremos este teorema no próximo capítulo quando procurarmos por soluções positivas de (1.2), uma vez que em várias aplicações se impõe que $u > 0$ em Ω.

2.4 Decomposição espectral do laplaciano

Assuma novamente que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Pelos resultados da seção 2.2, o problema

$$(-\Delta u)(x) = f(x) \qquad \text{se } x \in \Omega$$
$$u(x) = 0 \qquad \text{se } x \in \partial\Omega$$

admite para toda $f \in L^2(\Omega)$ uma única solução u no sentido fraco e a correspondência $f \in L^2(\Omega) \to Tf = u \in H_0^1(\Omega)$ é contínua. Assim, fazendo a injeção $H_0^1(\Omega) \subset L^2$, $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ se torna um operador compacto. Mais ainda, é

- *hermitiano*: sejam $f, g \in L^2$ e ponha $Tf = u \in H_0^1(\Omega)$ e $Tf = v \in H_0^1(\Omega)$. Então
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega f v \; dx = (f, Tg)_{L^2(\Omega)}$$
e também
$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \; dx = \int_\Omega g u \; dx = (g, Tf)_{L^2(\Omega)}$$
logo $(f, Tg)_{L^2(\Omega)} = (Tf, g)_{L^2(\Omega)}$;
- *positivo*: de fato, nas notações acima
$$(Tf, Tf)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u \cdot u \; dx \geq 0$$
e só é igual a 0 se $f = 0$.

Portanto, aplicando a teoria de Riesz-Fredholm e outras propriedades dos operadores elípticos de segunda ordem, pode-se provar o seguinte teorema de diagonalização:

Teorema 12 (Decomposição espectral do laplaciano)**.** *Suponha que Ω seja limitado e suave (isto é, de classe C^∞) e considere o problema de autovalor:*

$$
\begin{aligned}
(-\Delta u)(x) &= \lambda u(x) && \text{se } x \in \Omega \\
u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Então (2.18) tem uma sequência de autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \lambda_k \nearrow +\infty$. (Estamos adotando a convenção de que os autovalores são repetidos segundo sua multiplicidade). Mais precisamente:

(i) λ_1 é positivo, tem multiplicidade um e suas autofunções correspondentes não trocam de sinal em Ω;

(ii) podemos escolher uma sequência de autofunções de (2.18) (e_k) tais que $e_k \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$, $e_1 > 0$ em Ω, $\int_\Omega e_k^2\, dx = 1$, e $\int_\Omega e_k e_l\, dx = 0$ se $k \neq l$;

(iii) $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(e_k/\sqrt{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ assim definidos formam bases hilbertianas, respectivamente, de $L^2(\Omega)$ e de $H_0^1(\Omega)$;

(iv) $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admitem a seguinte caracterização variacional

$$\lambda_1 = \operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx; \int_\Omega u^2\, dx = 1 \right\};$$

$$\lambda_{k+1} = \operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx; \int_\Omega u^2\, dx = 1 \text{ e } \right.$$
$$\left. u \text{ é ortogonal ao subespaço gerado por } e_1, \ldots e_k \right\},$$

se $k > 0$.

Observação: só supomos que Ω era suave para inferirmos que $e_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Para Ω limitado arbitrário, ainda se tem que $e_k \in H_0^1 \cap L^\infty \cap C^\infty(\Omega)$.

Dada $u \in H_0^1(\Omega)$, u admite uma série de Fourier $\sum a_k e_k$ em $L^2(\Omega)$ e uma *outra* série $\sum a'_k e_k/\sqrt{\lambda_k}$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $-\Delta e_k = \lambda e_k$, os a_k's e os a'_k's se relacionam da seguinte maneira:

$$a_k = \int_\Omega u\ e_k\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla e_k/\lambda_k\, dx = a'_k/\sqrt{\lambda_k}$$

Deste modo, temos as seguintes identidades à Parseval:

$$|u|_2^2 = \sum a_k^2$$

$$|u|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum \lambda_k a_k^2$$

Em especial

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

que é a desigualdade de Poincaré.

2.5 Aplicação: problema de Dirichlet "clássico"

Com as técnicas discutidas acima, é possível se resolver o problema que enunciamos no capítulo 1:

$$\begin{aligned} (-\Delta u)(x) &= 0 && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^n$ era limitado e suave e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ era contínua.

Com efeito, pelo teorema de Stone-Weierstrass (veja, *e.g.*, Rudin [23]) existe uma sequência de funções polinominais (p_k) tais que $p_k \to g$ uniformemente em $\partial\Omega$. Aplicando *o princípio de Dirichlet* e *resultados de regularidade*, existem $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ as soluções de

$$\begin{aligned} (-\Delta v_k)(x) &= (-\Delta p_k)(x) && \text{se } x \in \Omega \\ v_k(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Definindo agora $u_k = v_k + p_k$, u_k's satisfazem

$$\begin{aligned} (-\Delta u_k)(x) &= 0 && \text{se } x \in \Omega \\ u_k(x) &= p_k(x) && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Pelo princípio do máximo, $\|u_k - u_l\|_\infty = \|p_k - p_l\|_\infty \to 0$ quando $k, l \to \infty$, e deste modo (u_k) converge uniformemente para uma função $u \in C(\overline{\Omega})$. Como cada u_k satisfaz a propriedade da média, também a satisfaz u; donde $u \in C^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} (-\Delta u)(x) &= 0 && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

No entanto, não é claro que $\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx < \infty$, ou seja, que $u \in H^1(\Omega)$; de fato, isto *não* acontece em geral! (Daí vemos como a crítica de Hadamard era relevante). Para maiores detalhes, a exposição Ponce [18] discute minuciosamente (2.19) e os diversos métodos criados para tentar resolvê-la.

3 Cálculo diferencial em espaços abstratos

3.1 Diferenciabilidade

Ao longo desta subseção, E e F serão espaços de Banach com normas $\| \ \|_E$ e $\| \ \|_F$ respectivamente, $U \subset E$ será um subconjunto aberto não-vazio e $I : U \to F$ uma aplicação. Escreveremos $\| \ \|$, sem subíndices, quando não houver perigo de confusão.

É bem sabido que a brilhante idéia por trás do Cálculo Diferencial é a de que funções “decentes” são “quase lineares” numa vizinhança de um ponto. Para trazermos a frase acima em termos precisos, é importante compreender a seguinte proposição elementar:

Teorema 13. *Assuma que $E = \mathbb{R}$ e $U = (a, b)$ é um intervalo, com $a < u < b$. Assim, a fim de que exista o limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{I(u+h) - I(u)}{h}$$

é necessário e suficiente que haja uma aplicação linear $L : \mathbb{R} \to F$ tal que $h \mapsto I(u+h) - (I(u) + L \cdot h)$ seja de ordem superior; isto é, que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|I(u+h) - (I(u) + L \cdot h)\|_F}{|h|} = 0$$

Neste caso,

$$L \cdot 1 = I'(u) = \lim_{h\to 0} \frac{I(u+h) - I(u)}{h}$$

Assim sendo, se I tiver derivada em u (em uma linguagem física, puder ser calculada sua “velocidade instantânea”), então ela se comportará mais ou menos como $h \mapsto I(u) + L \cdot h$ (sua “reta tangente”). Deste modo, a fim de generalizar os métodos do Cálculo para espaços E de dimensão arbitrária, parece natural o seguinte conceito: uma aplicação $I : U \to F$ será dita *diferenciável (à Fréchet) em um ponto $u \in U$* se houver uma transformação linear contínua $I'(u) : E \to F$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|I(u+h) - (I(u) + I'(u) \cdot h)\|_F}{\|u\|_E} = 0$$

Ademais, diremos simplesmente que I é *diferenciável*, se for diferenciável em todos os pontos $u \in U$.

Não é difícil se provar que várias boas propriedades das funções deriváveis de uma variável real são herdadas para este contexto, como:

(i) a derivada à Fréchet $I'(u)$, se existir, é única;

(ii) diferenciabilidade acarreta continuidade;

(iii) *(a regra da cadeia)* se I é diferenciável em $u \in U$, G é outro espaço de Banach, $V \subset F$ é um aberto e $K : V \to G$ é uma aplicação diferenciável em $v = I(u)$, então $K \circ I$, de domínio $\{u \in U; I(u) \in V\}$, é diferenciável em u com $(K \circ I)'(u) = K'(I(u)) \cdot I'(u)$;

(iv) *(linearidade)* se I e $J : U \to F$ são diferenciáveis em um ponto $u \in U$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então $(aI + bJ)$ é diferenciável em u com $(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u)$;

und so weiter.

Os exemplos mais simples de funções de diferenciáveis são estes:

Exemplo 3. Se $\phi : E \to F$ é *linear* e *contínua*, então, para quaisquer $u, h \in E$, $\phi(u + h) - (\phi u + \phi h) = 0$, donde $\phi'(u) = \phi$ (note que u não aparece no lado direito desta equação).

Exemplo 4. Se $a : E \times E \to F$ é *bilinear* e *limitada*, defina $A(u) = a(u, u)$ $(u \in E)$. Assim, se $u, h \in E$, $A(u + h) = a(u + h, u + h) = a(u, u) + a(u, h) + a(h, u) + a(h, h)$; assim $\|A(u + h) - (A(u) + a(h, u) + a(u, h))\|_F = \|a(h, h)\|_F$, que é de ordem superior. Por conseguinte, A é diferenciável à Fréchet e para $u \in E$, $A'(u)h = a(u, h) + a(h, u)$; em particular, se a for *simétrica*, $A'(u)h = 2a(u, h)$.

Analogamente, poderíamos estender os dois resultados acima para aplicações multilineares, mas a notação ficaria um pouco mais complicada. Não obstante, se I for uma aplicação de uma estrutura mais complexa, estes raciocínios não se aplicam. À vista disto, se faz necessário introduzir uma noção mais fácil de ser calculada: diremos que I é *diferenciável à Gâteaux em um ponto $u \in U$*, se existir uma transformação linear contínua $(DI)(u) : E \to F$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = (DI)(u) \cdot v \tag{3.1}$$

para qualquer $v \in E$.

Como se pode ver, esta noção está mais inspirada no conceito de derivada direcional ou então, como no teorema 13, na idéia de "vetores velocidade". Observe que é imposto que $(DI)(u)$ seja linear, algo que não segue da existência dos limites em (3.1).

Evidentemente, diferenciabilidade à Fréchet implica em diferenciabilidade à Gâteaux (com $(DI)(u) = I'(u)$), mas a recíproca não é geralmente verdadeira se a dimensão de E for maior que um. Para exemplificar esta afirmação, considere $E = \mathbb{R}^2$ e I dada por $I(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $I(0, 0) = 0$. Facilmente pode-se confirmar que I é derivável à Gâteaux na origem, $(DI)(0, 0) = 0$, mas I sequer é contínua (de fato, $I(1/n, 1/n^3) \xrightarrow{n \to \infty} 1/2 \neq I(0, 0)$).

Entretanto, como no Cálculo em espaços euclidianos, há uma situação muito comum na qual estes dois conceitos são equivalentes. I será dita *de classe* C^1 (simbolicamente, $I \in C^1(U;F)$ ou $I \in C^1(U)$, se $F = \mathbb{R}$), caso for diferenciável à Gateâux em todos pontos de U e a aplicação $u \in U \mapsto (DI)(u)$ for contínua.[1]

Teorema 14. *Se I for de classe C^1, I é diferenciável à Fréchet.*

Para provar o teorema acima, precisaremos de uma proposição clássica.

Lema 1 (Desigualdade do valor médio)**.** *Sejam $a < b$ dois números reais, $f : [a,b] \to F$ uma função derivável e suponha que haja um $M > 0$ tal que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $a \leq x \leq b$. Então*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a) \tag{3.2}$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que (3.2) não valha e tome um $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que ainda se tenha $\|f(b) - f(a)\| > (M+\varepsilon)(b-a)$. Nesta situação, afirmo que $\|f(b) - f(\frac{a+b}{2})\| > (M+\varepsilon)\frac{(b-a)}{2}$ ou $\|f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\| > (M+\varepsilon)\frac{(b-a)}{2}$; do contrário,

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| &\leq \|f(b) - f((a+b)/2)\| + \|f((a+b)/2) - f(a)\| \\ &\leq (M+\varepsilon)(b-a)\end{aligned}$$

o que seria uma contradição.

Pondo $a_1 = a$, $b_1 = b$, defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = \frac{a+b}{2}$ se $\|f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\| > (M+\varepsilon)\frac{(b-a)}{2}$ ou $a_2 = \frac{a+b}{2}$ e $b_2 = b_1$, quando não. Repetindo o argumento para $[a_2, b_2]$ e assim por diante, contrói-se uma seqüência de intervalos $[a_n, b_n]$ não-vazios tais que

(i) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$

(ii) diam.$[a_n, b_n] = b_n - a_n = (b-a)/2^{n+1}$;

(iii) $\|f(b_n) - f(a_n)\| > (M+\varepsilon)(b_n - a_n)$.

Pelo teorema de Cantor, $\cap[a_n, b_n] = \{x\}$, para algum $a \leq x \leq b$. Escrevendo

$$\frac{f(b_n - f(a_n)}{b_n - a_n} = \theta_n \frac{f(b_n - f(x)}{b_n - x} + (1-\theta_n)\frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n}$$

com $0 \leq \theta_n \leq 1$ é dado por $\theta_n = \frac{b_n - x}{b_n - a_n}$, vê-se que $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \to f'(x)$; mas então o item (iii) acima daria que $\|f'(x)\| \geq (M+\varepsilon)$, absurdo! $\square$

[1] Aqui estamos usando a norma do operador em $\mathscr{L}(E;F)$ = [as transformações lineares contínuas $T : E \to F$], que é dada por $\|T\|_{\mathscr{L}(E;F)} = \mathrm{Sup}_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F$.

Observação: Há várias demonstrações do lema 1. Por exemplo, Dieudonné [9] usa um argumento mais geral baseado no fato de que $b = \mathrm{Sup}\{t \in [a,b]; \|f(t) - f(a)\| \leq M(t - a)\}$, mas que não é tão intuitivo quanto a dedução acima *à la* Cauchy-Goursat. Uma outra prova é uma aplicação simples do teorema de Hahn-Banach, que esboçaremos rapidamente.

Seja $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo tal que $\phi \cdot (f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|^2$ e $\|\phi\| = \|f(b) - f(a)\|$. Definindo $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $p(t) = \phi \cdot f(t)$ $(a \leq t \leq b)$, p é contínua e derivável. Portanto, segundo o teorema do valor médio, há um $a < \xi < b$ tal que:

$$\begin{aligned}
\|f(b) - f(a)\|^2 &= p(1) - p(0) \\
&= p'(\xi)(b - a) \\
&= (\phi \cdot f'(\xi))(b - a) \\
&\leq \|\phi\| M(b - a)
\end{aligned}$$

Demonstração do teorema 14. Sejam $u \in U$ e $\varepsilon > 0$. Existe então um $\delta > 0$ para o qual

$$\|(DI)(u + h) - (DI)(u)\|_F \leq \varepsilon$$

se $\|h\|_E \leq \delta$. Assim, aplicando a desigualdade do valor médio para $t \in [0,1] \mapsto I(u + th) - (I(u) + (DI)(u)t)$,

$$\|I(u + h) - (I(u) + (DI)(u) \cdot h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$$

para qualquer que seja $\|h\|_E \leq \delta$. Isto mostra que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|I(u + h) - (I(u) + (DI)(u) \cdot h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

i.e., que I é diferenciável à Fréchet em u, de cuja arbitrariedade conclui-se a prova do teorema.

□

Finalizaremos esta seção com algumas nomenclaturas muito úteis para a continuação. Assuma agora $F = \mathbb{R}$.

Dessarte, se I é de classe C^1 e $u \in U$, $I'(u)$ é um elemento do dual topológico de E, denotado por E^*. Usaremos então a notação do produto escalar de dualidade entre E e E^*, que é $(f, u) \in E^* \times E \mapsto \langle f, u \rangle = f(u)$.

Um ponto $u \in U$ é dito um *ponto de mínimo local* para I se houver uma vizinhança V de u no qual $I(u) = \mathrm{Inf}_V I$. Se V puder ser tomada como U, então diremos que u é um *ponto de mínimo global*.

É dito também que u é *regular* para I se $I'(u) \neq 0$ (isto é, existe um $v \in E$ tal que $\langle I'(u), v\rangle \neq 0$); caso contrário é dito um *ponto crítico*.

Analogamente, um *valor* $y \in F$ na imagem de I é dito *regular* se todo ponto $u \in U$ tal que $I(u) = y$ é regular; senão, y (ainda na imagem de I) é dito um *valor crítico*.

Lema 2 (Lema de Fermat)**.** *Se $I \in C^1(U)$ e u é um ponto de mínimo local, então u é um ponto crítico para I.*

Demonstração. Para $h \in E$ e $t > 0$ suficientemente pequeno, $I(u + th) \geq I(u)$. Subtraindo $I(u)$, dividindo por t e passando ao limite $t \to 0$, $\langle I'(u), h\rangle \geq 0$ para qualquer $h \in E$. Como $I'(u)$ é linear e $\langle I'(u), \pm h\rangle = \pm\langle I'(u), h\rangle$, *a fortiori* $I'(u) \equiv 0$. □

3.2 Topologias fracas

Outro argumento clássico e muito simples em Cálculo é o famoso teorema de Weierstrass: uma função real contínua definida em um intervalo fechado e limitado admite máximo e mínimo. Podemos estendê-lo da seguinte forma:

Teorema 15. *Seja X um espaço topológico compacto e $I : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente (isto é, $[I > \alpha] = \{u \in X; I(u) > \alpha\}$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$). Então existe um $u \in X$ tal que*

$$I(u) = \operatorname*{Inf}_X I$$

Demonstração. Como $X = \cup_{n=1}^{\infty}[I > -n]$ e X é compacto, existe um inteiro não negativo N tal que

$$X = [I > -1] \cup \ldots \cup [I > -N]$$

daonde $Iu > -N$ para todo $u \in X$ e $m = \operatorname{Inf}_X I > -\infty$. Afirmo portanto que este ínfimo é atingido; com efeito, do contrário $\{[I > c + 1/n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ seria um recobrimento aberto de X sem subrecobrimento finito. □

Um grande inconveniente para a aplicação do teorema acima é que, em todo espaço de Banach E de dimensão infinita, a bola unitária $B_E = \{u \in E; \|u\| \leq 1\}$ jamais é compacta (este é o chamado "lema de Riesz"). Felizmente, há uma ferramenta que nos permite recuperar algum tipo de compacidade, que é o uso das topologias fracas $\sigma(E, E^*)$. Esta consiste da menor coleção de abertos em E que torna as formas lineares $f \in E^*$ contínuas. Algumas de suas propriedades mais elementares são (para as provas, recomendamos *e.g.* Brezis [3] ou Rudin [22]):

(i) uma base local de vizinhanças de um ponto $u \in E$ é do tipo $V = \{v \in E; |\langle f_1, u - v\rangle| < \varepsilon, \ldots, |\langle f_N, u - v\rangle| < \varepsilon\}$, onde $\varepsilon > 0$ e $f_1, \ldots, f_N \in E^*$;[2]

(ii) $\big(E, \sigma(E, E^*)\big)$ satisfaz o axioma de separação de Haussdorf, logo há unicidade nos limites;

(iii) uma sequência (u_n) converge para um $u \in E$ em $\sigma(E, E^*)$ (escreve-se "$u_n \rightharpoonup u$ fracamente" ou "$u_n \rightharpoonup u$ em $\sigma(E, E^*)$") se e somente se $\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$ para todo $f \in E^*$. Assim, neste caso o princípio da limitação uniforme nos dá que $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$;

(iv) *(teorema de Mazur)* um conjunto convexo K é fechado na topologia $\sigma(E, E^*)$ se, e somente se, for fechado na topologia forte (advinda da norma $\| \ \|$);

(v) *(teorema de Kakutani)* se E for reflexivo (em especial se for hilbertiano), então B_E é compacto em $\sigma(E, E^*)$, e reciprocramente;

(vi) se E^* for separável, então os conjuntos limitados de E são metrizáveis na topologia $\sigma(E, E^*)$.

Exemplifiquemos a força das proposições supracitadas redemonstrando o lema de Lax-Milgram no caso simétrico. Sejam $E = H$ um espaço de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear limitada, coerciva e simétrica e $\varphi \in H^*$ como no teorema 8.

Definimos então $I : H \to \mathbb{R}$ por $I(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \phi, u\rangle$. Pelos exemplos 3 e 4, $I \in C^1(H)$ e sua derivada é $\langle I'(u), h\rangle = a(u, h) - \langle \phi, h\rangle$, para $u, h \in H$. Ademais, se para dados $u, v \in H$, pusermos $f(t) = I((1 - t)u + tv)$ para $0 \leq t \leq 1$, f é de classe C^2 com $f''(t) = a(v - u, v - u) \geq 0$; consequentemente f é convexa e também I o é, pois

$$\begin{aligned} I((1 - t)u + tv) &= f(t) \\ &\leq (1 - t)f(0) + tf(1) \\ &= tI(u) + (1 - t)I(v) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Desta maneira, seus conjuntos de nível $[I \leq \alpha]$ são convexos e fechados (por I ser contínua) e, assim aplicando o teorema de Mazur, I é semicontínua inferiormente (pois $[I > \alpha]$ = complementar de $[I \leq \alpha]$).

Mais ainda, como $I(u) \geq \alpha|u|^2 - \|\varphi\||u|$,

$$\lim_{|u| \to +\infty} I(u) = +\infty \tag{3.4}$$

I assume seu ínfimo. De fato, tomando $r > 0$ grande o suficiente para que $|u| > r \Rightarrow I(u) > I(0) + 1$, usamos o teorema 15 para $X = rB$, obtendo u tal que $I(u) = \mathrm{Inf}_{rB}\, I$, que

[2] Observe que V contém o plano de dimensão infinita $u + N(f_1) \cap \ldots \cap N(f_N)$, logo os abertos em $\sigma(E, E^*)$ são "grandes". $N(f) = f^{-1}\{0\}$ é o núcleo de $f \in E^*$.

é obrigatoriamente o ínfimo global de I em H. Neste ponto, o lema de Fermat nos dá que $I'(u) = 0$, isto é,

$$a(u,h) - \langle \phi, h \rangle = 0 \tag{3.5}$$

para qualquer $h \in H$, como queríamos provar. A unicidade de u segue do fato de que se $\overline{u}$ é outro ponto crítico de I, então $0 = \langle I'(u) - I'(\overline{u}), u - \overline{u} \rangle = a(u - \overline{u}, u - \overline{u})$, logo $u = \overline{u}$.

Na nomenclatura de Cálculo de Variações, pode-se dizer que (3.5) é a equação de Euler para o problema de minimizar I em H. O procedimento acima pode ser generalizado para quando I satisfaz (3.4), de classe C^1 e convexa (estritamente, se quisermos unicidade).

3.3 Operadores de Nemytskii

O passo final antes de estudarmos problemas elípticos é ver como as não-linearidades f em (1.2) podem ser descritas em $H_0^1(\Omega)$, ou seja, quais são as propriedades de mapeamentos do tipo $u \mapsto \int_\Omega f(x, u(x))dx$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não-vazio.

Vamos dizer que uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *de Carathéodory* se

- para todo $s \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \mapsto f(x,s)$ for mensurável (à Lebesgue);
- para quase todo $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R} \mapsto f(x,s)$ for contínua.

Trivialmente, o categoria de função de Carathéodory mais simples, mas é o que mais nos interessa, são as $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Proposição 2. *Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ for mensurável à Lebesgue e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for de Carathéodory,*

$$x \in \Omega \mapsto f(x, u(x)) \tag{3.6}$$

será mensurável à Lebesgue.

Demonstração. Seja (K_n) uma sequência de funções simples mensuráveis convergindo em todo ponto a u. Então, escrevendo $K_n = \sum a_i \mathbb{I}_{E_i}$ ($\mathbb{I}_{E_i}$ é o indicador, ou a característica, de E_i), temos que

$$f(x, K_n(x)) = \sum f(x, a_i) \mathbb{I}_{E_i}(x)$$

para $x \in \Omega$, logo é mensurável. Como $f(x, K_n(x)) \to f(x, u(x))$ para quase todo $x \in \Omega$, a conclusão se segue do fato de que o limite pontual de funções mensuráveis é mensurável. □

Deste modo, para uma função de Carathéodory f, introduzimos o *operador de Nemytskii $\mathcal{N}_f$* dado por (3.6) e que está definido sob e a valores em espaços de funções mensuráveis.

Com algumas hipóteses naturais sob o crescimento de f "no infinito", $\mathcal{N}_f$ tem propriedades de continuidade.

Teorema 16. *Sejam $1 < p, q < \infty$ e suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R}$ seja uma função de Carathéodory tal que*

$$|f(x,s)| \leq a_1(x) + a_2|s|^{p/q} \tag{3.7}$$

para quase todo $x \in \Omega$, todo $s \in \mathbb{R}$, para alguma $a_1 \in L^q(\Omega)$ e $a_2 > 0$. Então o operador de Nemytskii $\mathcal{N}_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é contínuo.

Demonstração. Seja $u \in L^p(\Omega)$; então a desigualdade de Minkowski e de Hölder nos dão que

$$\begin{aligned}\Big(\int |f(x,u(x))|^q dx\Big)^{1/q} &\leq \Big(\int |a_1(x)|^q dx\Big)^{1/q} + \Big(\int (a_2|u(x)|^{p/q})^q dx\Big)^{1/q} \\ &= \|a_1\|_q + a_2\|u\|_p < \infty\end{aligned}$$

portanto $\mathcal{N}_f(u) \in L^q(\Omega)$. Provemos agora a continuidade.

Se $\mathcal{N}_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ não fosse contínua, haveria uma sequência (u_k) em convergindo a um certo u em $L^p(\Omega)$, mas que $\|\mathcal{N}_f(u_k) - \mathcal{N}_f(u)\|_q \geq \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$. Pela "recíproca do teorema da convergência dominada"[3], existe uma subsequência (u_{k_l}) e uma $h \in L^p(\Omega)$ tais que $u_{k_l}(x) \to u(x)$ e $|u_{k_l}(x)| \leq h(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Por conseguinte, já que $|\mathcal{N}_f(u_{k_l})(x)| \leq a_1(x) + a_2|h(x)|^{p/q} \in L^q$ e $\mathcal{N}_f(u_{k_l})(x) \to \mathcal{N}_f(u)(x)$ em quase todo $x \in \Omega$, o teorema da convergência dominada nos dá que $\|\mathcal{N}_f(u_{k_l}) - \mathcal{N}_f(u)\|_q \to 0$; ou seja, é menor que ε para l suficientemente grande. Absurdo! □

Observação: Vale a recíproca: se $\mathcal{N}_f$ aplica continuamente $L^p(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, então valem as estimativas (3.7) para a_1 e a_2 apropriados; consulte de Figueiredo [7]. Note que isto é um resultado totalmente análogo ao que ocorre em transformações lineares: uma aplicação linear $T : E \to F$ entre dois espaços vetoriais normados E e F é contínua se e só se houver uma constante $M > 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Em particular, quando definirmos o que é uma solução fraca de (1.2) e quisermos aplicar algum argumento da teoria de pontos críticos, será conveniente achar alguma função J tal que $J'(u) \cdot \varphi = \int_\Omega f(x,u(x))\varphi(x)dx$ para toda função teste φ. Ao menos formalmente, intercambiando derivação com o sinal da integral, um candidato é $J(u) = \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(x,\tau)d\tau dx$. Analisemos esta questão.

Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo a condição (3.7), definamos $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$. Para facilitar, vamos escrever $\beta = p/q$ em (3.7). Então F é também de Carathéodory (note que para quase todo x, $F(x,s) = \lim_{r\to\infty} \frac{s}{r}\sum_{k=0}^{r-1} f(s, r\frac{s}{r})$) e satisfaz

[3] Este resultado é um passo fundamental na prova do teorema de Riesz-Fischer (L^p's são completos). Veja Brezis [3], teorema 4.9.

$$
\begin{aligned}
|F(x,s)| &\le |a_1(x)||s| + \frac{a_2}{\beta+1}|s|^{\beta+1} \\
&\le \frac{\beta}{\beta+1}|a_1(x)|^{\frac{\beta+1}{\beta}} + \frac{a_2+1}{\beta+1}|s|^{\beta+1}
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

onde aplicamos a desigualdade de Young. Então pondo $a_1' = \frac{\beta}{\beta+1}|a_1|^{\frac{\beta+1}{\beta}} \in L^{p/(\beta+1)}$ e $a_2' = \frac{a_2+1}{\beta+1} > 0$, (3.8) se torna

$$
|F(x,s)| \le a_1'(x) + a_2'|s|^{p/(\beta+1)} \tag{3.9}
$$

e $\mathcal{N}_F : L^{\beta+1}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ é contínua.

Se $\beta + 1 = p$, (3.7) e (3.9) ficam como

$$
\begin{cases}
|f(x,s)| \le a_1(x) + a_2|s|^{p-1} & \text{onde } a_1 \in L^{p'}(\Omega) \\
|F(x,s)| \le a_1'(x) + a_2'|s|^{p} & \text{onde } a_1' \in L^{1}(\Omega)
\end{cases} \tag{3.10}
$$

(p' é o expoente conjugado a p: $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$) portanto podemos definir $J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))dx$, que é uma real função contínua em $L^p(\Omega)$. Afirmo que sob estas hipóteses $J \in C^1(L^p(\Omega))$ e $\langle J'(u), h\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))h(x)dx$, $\forall u, h \in L^p(\Omega)$ (observe que este funcional está bem definido pois $\mathcal{N}_f \in L^{p'}(\Omega)$).

Deveras, pelo teorema fundamental do Cálculo pode-se escrever $J(u+h) - J(u) = \int_\Omega \int_0^1 f(x, u+th)dtdx$, donde a desigualdade de Hölder e o teorema de Fubini nos dão que

$$
\begin{aligned}
&\left| J(u+h) - J(u) - \int_\Omega f(x,u(x))h(x)dx \right| \\
&\qquad = \left| \int_0^1 \int_\Omega (f(x,u+th) - f(x,u))h(x)dxdt \right| \\
&\qquad \le \int_0^1 \|\mathcal{N}_f(u+th) - \mathcal{N}_f(u)\|_{p'}\|h\|_p dt \\
&\qquad = \left(\int_0^1 \|\mathcal{N}_f(u+th) - \mathcal{N}_f(u)\|_{p'} dt \right) \|h\|_p
\end{aligned}
$$

e a conclusão desejada é obtida do fato de $\mathcal{N}_f$ ser contínua.

Assuma agora que Ω é *limitado*, $n \ge 3$ (para facilitar) e usemos as qualidades de $H_0^1(\Omega)$. Se o p em (3.10) é $\le 2^*$ (lembre-se que $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$), por $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ continuamente pelas desigualdades de Sobolev e de Hölder, $J \in C^1(H_0^1)$.

Além disto, se $p < 2^*$, $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ compactamente pelo teorema de Rellich-Kondrachov, acarretando que se (u_k) converge a u em $\sigma\left(H_0^1(\Omega), (H_0^1(\Omega))^*\right)$, $u_k \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$, e por conseguinte $J(u_k) \to J(u)$; *i.e.*, J é contínua na topologia fraca (aqui usamos que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo e separável).

Há mais um outro fato importante para $p < 2^*$. Se (u_k) em $H_0^1(\Omega)$ é limitada, passando a uma subsequência se necessário, há um $u \in H_0^1(\Omega)$ para o qual $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$ e portanto $\mathcal{N}_f(u_k) \to \mathcal{N}_f(u)$ em $L^{p'}(\Omega)$. Assim, caso $h \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\left|\langle J'(u_k) - J'(u), h\rangle\right| &= \left|\int_\Omega (f(x,u_k) - f(x,u))h(x)dx\right| \\
&\le \left(\int_\Omega |f(x,u_k) - f(x,u)|^{p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |h(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&\le C\|\mathcal{N}_f(u_n) - \mathcal{N}_f(u)\|_{p'} |h|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

onde $C > 0$ é constante da injeção $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Em outras palavras,

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{H_0^1(\Omega)^*} \le C\|\mathcal{N}_f(u_n) - \mathcal{N}_f(u)\|_{p'} \to 0$$

o que mostra que $J' : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)^*$ é compacto (mapeia conjuntos limitados em conjuntos de fecho compacto).

Resumindo e trocando p por $p+1$, provamos o seguinte:

Teorema 17. *Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \ge 3$) é um aberto não-vazio limitado e que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo*

$$|f(x,s)| \le a_1(x) + a_2|s|^p \tag{3.11}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, quase todo $x \in \Omega$, para alguma $a_1 \in L^{p'}(\Omega)$ e para algum $a_2 > 0$.

Se $0 \le p \le \frac{n+2}{n-2}$, o operador $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por $J(u) = \int_\Omega F(x,u(x))dx$, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$ é de classe C^1 e $\langle J'(u), h\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))h(x)dx$, para u e $h \in H_0^1(\Omega)$.

Se $0 \le p < \frac{n+2}{n-2}$, então J é contínua na topologia fraca $\sigma(H_0^1(\Omega), (H_0^1(\Omega))^*)$ e J' é um operador compacto.

Observação: para $n = 1$ ou 2, poderíamos tomar $0 \le p < \infty$. Para uniformizar a notação, desconsideraremos estes casos.

Para as funções f de Carathéodory que satisfazem (3.11) diremos que elas pertencem à classe $N^p(\Omega)$.

Importante: salvo de menção do contrário, se $f \in N^p(\Omega)$, F *sempre* será o seu "potencial" $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$.

3.4 Equações semilineares

Tal qual foi dito no capítulo 1, a equação a ser estudada nesta redação é do tipo:

$$\begin{aligned}(-\Delta u)(x) &= f(x, u(x)) && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e suave, $n \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Uma solução clássica u é uma função em $C^2(\overline{\Omega})$ caso (3.12) valer em seu sentido usual; por outro lado, motivados pelos resultados do capítulo 2, uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx = 0 \tag{3.13}$$

para toda função v em $C_c^\infty(\Omega)$ ou, equivalentemente, em $H_0^1(\Omega)$. Quando $f \in N^p(\Omega)$ para $0 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}$, o teorema 17 indica que as soluções fracas (3.13) são os pontos críticos para o funcional $I \in C^1(H_0^1(\Omega))$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x))dx \tag{3.14}$$

O restante deste trabalho se ocupará em garantir quando (3.14) tem pontos críticos, ou seja, (3.12) tem soluções fracas. Mas, antes, será oportuno para algumas aplicações (e para descargo de consciência) provar que, sob condições bastante gerais sobre f, podemos garantir que as soluções *fracas são clássicas*.

Diremos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *localmente hölderiana* de expoente $0 < \alpha \leq 1$, se para todo compacto $K \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$,

$$\operatorname*{Sup}_{(x,s)\neq(y,t)\in K} \frac{|f(x,s) - f(y,t)|}{|(x-y, t-s)|^\alpha} < \infty$$

Por exemplo, usando a desigualdade do valor médio (lema 1) e argumentos usuais de compacidade, é fácil ver que toda $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ é localmente hölderiana para qualquer expoente $0 < \alpha \leq 1$.

Teorema 18. *Se $f \in N^p(\Omega)$ for localmente hölderiana e $0 \leq p < \frac{n+2}{n-2}$, as soluções fracas $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.12) estão em $C^2(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. É claro que podemos assumir que $p > 0$. A parte crucial da prova é mostrar que u é hölderiana; para tal fim, empreguemos um argumento do tipo "*bootstrap*". Seja $A > 1$ dado por $Ap = (n+2)/(n-2)$.

Passo um: pela desigualdade de Sobolev, $u \in L^{2^*}(\Omega) = L^{2n/(n-2)}(\Omega)$;

Passo dois: portanto, pelo teorema 16, $x \in \Omega \mapsto g(x) = f(x, u(x))$ está em $L^{q_1}(\Omega)$, onde $q_1 = 2^*/p = A\frac{2n}{n-2}$;

Passo três: $-\Delta u = g$ fracamente, o que, pelo teorema de Calderón-Zygmund, obriga que $u \in W^{2,q_1}(\Omega)$;

Se $2q_1 > n$, a desigualdade de Sobolev novamente nos dá que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \theta < 1$. Se não, repita os passos um a três acima, notando que agora:

- pela desigualdade de Sobolev, $u \in L^r(\Omega)$, onde $r > A\frac{2n}{n+2}$;
- assim $g \in L^{q_2}(\Omega)$, para $q_2 = r/p > Aq_1$ (se $2q_1 - n < 0$, $r = (nq_1)(n - 2q_1)^{-1}$);
- e portanto $u \in W^{2,q_2}(\Omega)$.

Como $A^k \to \infty$, as iterações acima não podem se dar indefinidamente. Portanto para um k suficientemente grande, $2q_k > n$ e $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$, como queríamos.

Desta maneira, g definida acima é hölderiana de expoente $\gamma = \alpha\theta$ (α é o expoente de f) e $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, pelas estimativas de Schauder. □

Evidentemente poderíamos obter uma regularidade ainda maior da classe de diferenciabilidade de f; basta reaplicar repetidas vezes as estimativas de Schauder. Para outros teoremas de regularidade, consulte Cazenave [5], Struwe [25] (apêndice B) ou qualquer obra sobre o 19º problema de Hilbert.

3.5 Aplicação: problemas sublineares

O lema de Fermat nos diz que os pontos de mínimo local de I são críticos. Então uma primeira abordagem, um pouco ingênua, mas no espírito original do Cálculo de Variações, para determinar as soluções (3.12) seria tentar minimizar globalmente I.

Como para $0 \le p < \frac{n+2}{n-2}$ I é semicontínua inferiormente (de fato, $u \mapsto \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx$ é convexa), um jeito de se impor que ela tenha um mínimo via teorema 15 é que I seja *coerciva*:

$$\lim_{|u| \to +\infty} I(u) = +\infty. \tag{3.15}$$

(3.15) é trivialmente satisfeita se F puder ser estimada por

$$F(x,s) \le a_1(x) + \frac{1}{2}\mu s^2 \tag{3.16}$$

em toda parte, onde $a_1 \in L^1$ e $0 \le \mu < \lambda_1$ = primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω. Com efeito, nestas circunstâncias a desigualdade de Poincaré se aplica como:

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega a_1(x)dx - \frac{1}{2}\mu\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\Big(1-\frac{\mu}{\lambda}\Big)|u|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|a_1\|_1 \to +\infty
\end{aligned}
$$

quando $|u| \to +\infty$. Assim, empregando a mesma justificativa do final da seção 3.2, o mínimo é assumido em algum u, no qual $I'(u) = 0$.

A classe de não-linearidades mais rudimentar que verifica (3.16) é das f's *sublineares*, que cumprem

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} = 0 \tag{3.17}$$

uniformemente para $x \in \Omega$. De fato, de (3.17), para qualquer $\varepsilon > 0$, há um $S = S(\varepsilon) > 0$ tal que $|s| > S \Rightarrow |f(x,s)| < \varepsilon|s|/2$. Portanto, se $M = \mathrm{Max}_{\overline{\Omega}\times[-S,S]}|f| + 1$, globalmente temos

$$|f(x,s)| \leq \varepsilon|s|/2 + M$$

Assim, como em (3.8) e usando a desigualdade de Young $ab \leq \varepsilon a^2/(4M) + Mb^2/\varepsilon)$ $(a,b > 0)$, temos

$$|F(x,s)| \leq (\text{const.}) + \varepsilon|s|^2/2$$

sendo suficiente então tomar $\varepsilon < \lambda_1$.

Esta, é claro, uma condição muito restritiva, mas ela se adapta a situações em que não é evidente em primeira instância que o método variacional é aplicável.

Exemplo 5. Considere

$$
\begin{aligned}
(-\Delta u)(x) &= \lambda u(x) - f(u(x)) && \text{se } x \in \Omega \\
u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ *dado*, Ω, além das hipóteses habituais, é **conexo** e $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e satisfaz as condições

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{u\to 0+} \frac{f(s)}{s} = 0 \\
\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty
\end{cases} \tag{3.19}
$$

$(f(s) = e^{s^2} - 1$ é um bom exemplo).

Afirmamos que se $\lambda > \lambda_1$, (3.18) tem uma solução positiva ($u > 0$ em Ω).

Por (3.19) existe o primeiro zero positivo $\xi > 0$ de $s \in [0, +\infty) \mapsto \lambda s - f(s)$ e, para este, $\lambda s - f(s) > 0$ se $0 < s < \xi$. Defina então $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \le 0 \\ \lambda s - f(s) & \text{se } 0 < s < \xi \\ 0 & \text{se } s > \xi \end{cases}$$

de modo que g seja sublinear e considere o problema auxiliar

$$\begin{aligned} (-\Delta u)(x) &= g(u(x)) && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.20}$$

com o seu funcional adjunto $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u) dx$.

Agora temos que as soluções clássicas *não-triviais* u de (3.20) satisfazem $0 < u(x) < \xi$ para todo $x \in \Omega$. Primeiramente, são positivas pois $-\Delta u \ge 0$ em Ω e $u = 0$ em $\partial\Omega$ e o resultado segue do princípio do máximo.

Para a outra desigualdade, seja $M > 0$ o máximo de u e, usando que g é lipschitziana, tome $a > 0$ tão grande para que $h(s) = as + g(s)$ seja crescente e, em especial, $0 \le h(s) \le h(M) = aM$, $\forall\, 0 \le s \le M$. Deste modo,

$$-\Delta u + au = h(u), \text{ em } \Omega.$$

Pondo $v = M - u$, $(-\Delta + a)v = aM - h(u) = h(M) - h(u) \ge 0$ em Ω, bem como $v = M - \xi$ em $\partial\Omega$. Se por acaso M fosse $\ge \xi$, o princípio do máximo daria que $v \ge 0$, ou melhor, que $u < M$ em Ω, impossível. Então $M < \xi$, exatamente como foi dito.

Como $g(s) = \lambda s - f(s)$ em $0 < s < \xi$, só nos resta provar que (3.20) admite uma solução não-trivial. Neste caso, basta verificar que $\operatorname{Inf} I < 0 = I(0)$ e minimizar I em $H_0^1(\Omega)$ (pelo teorema 18, o mínimo obtido será uma solução clássica).

Seja $e_1 \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ uma primeira autofunção de $-\Delta$ descrita no teorema 12. Então para $t > 0$ suficientemente pequeno

$$I(te_1) = \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 - \frac{1}{2}\lambda t^2 + \text{ resto de ordem } t^2$$

pelo fato de $f(s)/s \xrightarrow{s \to 0} 0$. Portanto, se $\lambda > \lambda_1$, $I(te_1) < 0$ para $t > 0$ pequeno, forçando a $\operatorname{Inf} I < 0$.

3.6 A regra dos multiplicadores de Lagrange

Teorema 19 (Regra dos multiplicadores de Lagrange)**.** *Seja E um espaço de Banach, $U \subset E$ um aberto não-vazio e $g_1, \dots, g_m : U \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 tais que para todo v na superfície*

$M = [g_1 = 0] \cap \ldots \cap [g_m = 0]$ as derivadas $g_1'(v), \ldots, g_m'(v)$ formam um conjunto linearmente independente.

Então se $I : U \to \mathbb{R}$ for de classe C^1 e $u \in M$ for tal que $I(u) = \mathrm{Inf}_M I$, então existem multiplicadores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ para os quais

$$I'(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(u) \tag{3.21}$$

Demonstração. Quebremos a prova em quatro etapas, duas das quais são essencialmente algébricas.

Passo um: Se X é um espaço vetorial e $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ e ψ são formas lineares em X tais que $N(\varphi_1) \cap \ldots \cap N(\varphi_m) \subset N(\psi)$, então ψ é combinação linear dos φ_i's.

De fato, defina a transformação linear $T : X \to \mathbb{R}^{m+1}$ por $Tx = (\varphi_1 \cdot x, \ldots, \varphi_m \cdot x, \psi \cdot x)$. Então a imagem de T é subespaço de $\mathbb{R}^{m+1}$ que não contém o vetor $e = (0, \ldots, 0, 1)$. Portanto, aplicando o processo de Gram-Schmidt corretamente, pode-se produzir um $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m, \mu_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ que é ortogonal à imagem de T e que $\mu \cdot e = \mu_{m+1} > 0$. Em outras palavras, para qualquer $x \in X$, $\psi \cdot x = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu_{m+1}} \varphi_i \cdot x$.

Passo dois: Sejam $X, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ como anteriormente e assuma que os φ_i's são linearmente independentes. Então existem vetores $x_1, \ldots, x_m \in X$ linearmente independentes tais que $X = \mathbb{R}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}x_m \oplus \cap_{i=1}^{m} N(\varphi_i)$.

Provemos por indução em m.

Para $m = 1$, como $\phi_1 \neq 0$, há um $x_1 \neq 0$ em X para o qual $\varphi_1 \cdot x_1 \neq 0$. Então, para qualquer outro $x \in X$, $\varphi_1\left(x - \frac{\varphi_1 x}{\varphi_1 x_1} x_1\right) = 0$, de modo que $x = tx_1 + y$, onde $t \in \mathbb{R}$ e $y \in N(\varphi_1)$. Portanto $X = \mathbb{R}x_1 \oplus N(\varphi_1)$.

Supondo que a afirmação é válida para $m - 1$ ($m > 2$), mostremos-a para m. Observe que, pelo passo um, existe um $x_m \in X$ tal que $\varphi_1 \cdot x_m = \ldots = \varphi_{m-1} \cdot x_m = 0$, mas que $\varphi_m \cdot x_m \neq 0$. Aplicando a base $m = 1$ para $Y = \cap_{i=1}^{m-1} N(\varphi_i)$, temos que $Y = \mathbb{R}x_n \cap \left(N(\varphi_m) \cap Y\right)$. Pela hipóteses de indução $X = \mathbb{R}x_1 \oplus \ldots \mathbb{R}x_{m-1} \oplus Y \Rightarrow X = \mathbb{R}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}x_m \oplus \cap_{i=1}^{m} N(\varphi_i)$, como queríamos.

Passo três: Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ um aberto não-vazio e $g \in C^1(E; F)$. Suponha que para $u \in U$ seja tal que $g'(u) \in \mathscr{L}(E; F)$ seja um isomorfismo linear entre E e F. Assim, existe uma vizinhança V de u tal que g, restrita a V, é um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $V \subset E$ e $g(V) \subset F$.

Este é o famoso teorema da função implícita e a prova dele é idêntica ao caso em que $E = F = \mathbb{R}^n$, exceto possivelmente da sutileza de que $g'(u)^{-1} \in \mathscr{L}(F;E)$, corolário do teorema do gráfico fechado. Consulte Ambrosetti e Prodi [1], Dieudonné [9], Nirenberg [17] e Schwartz [24] para a demonstração e diversas extensões.

Passo quatro: (Conclusão) Sejam $x_1, \ldots, x_m$ obtidos pelo passo dois com $\varphi_i = g_i'(u)$ e escreva $E = F \oplus G$, onde $F = \mathbb{R}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}x_m$ e $G = \cap_{i=1}^m N(g_1'(u))$. Pelo teorema do gráfico fechado, a norma $\| \; \|$ de E é equivalente a

$$|||u||| = \Big\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \Big\}^{1/2} + \|P_G u\|$$

onde escrevemos $u = \sum_{i=1}^m \alpha_1 x_i$ + um vetor em G, que é a sua projeção $P_G u$. Deste modo, identifiquemos $E \simeq \mathbb{R}^m \oplus G$.

Defina $g : U \to E$ por

$$g(v) = \big(g_1(v), \ldots, g_m(v), P_G v\big), \; v \in U$$

de modo que g seja de classe C^1 e em u:

$$g'(u)h = \big(\langle g_1'(u), h\rangle, \ldots, \langle g_m'(u), h\rangle, P_G \cdot h\big), \; h \in E.$$

Logo verifica-se que $g'(u)$ é um isomorfismo e, pelo passo três, existe uma vizinhança V de u que é lançada por g difeomorficamente sobre a vizinhança $W = g(V)$ de $g(u) = \big(g_1(u), \ldots, g_m(u), P_G u) = (0, \ldots, 0, P_G u) = P_G u$. Sendo $h : W \to U$ sua inversa, note que, por este motivo, a fim de que $w \in W$ satisfaça $h(w) \in M$, é necessário e suficiente que $w = P_G w$.

Assim, $J = I \circ h \circ P_G : W \to \mathbb{R}$ atinge seu mínimo em u. Aplicando o lema de Fermat e a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} 0 &= J'(u) \\ &= I'(h \circ P_G(u))h'(P_G u)P_G \end{aligned} \tag{3.22}$$

e uma vez que $g'(u)$ deixa F e G invariantes,

$$\begin{aligned} h'(P_G u)P_G &= g'(h(P_G u))^{-1} P_G \\ &= g'(u)^{-1} P_G \\ &= P_G \end{aligned}$$

(3.22) se lê como

$$I'(u)P_G = 0$$

ou seja, $I'(u)$ se anula sobre $G = \cap_{i=1}^{m} N(g_i'(u))$, o que, pelo passo um, implica (3.21). □

Observação: a grande dificuldade da prova foi que, ao passarmos para dimensão infinita, perdemos um pouco geometria de superfícies. Mesmo assim, a prova acima tem um certo aspecto geométrico, que é o seguinte. Assumindo que $m = 1$ e que $E = \mathbb{R}^3$, temos que $g_1'(u) = \nabla g_1(u)$ e podemos tomar $G = \nabla g_1(u)^\perp$. Assim, a sentença "$E \simeq F \oplus G$" seria entendido como tomar um sistema de coordenadas ortogonais na qual o M se torna localmente gráfico de g_1, que, nestes eixos, é "horizontal" em u. Posto isto, $I'(u) = \nabla I(u)$ seria ortogonal a todas direções horizontais ($\in G$) e logo vertical, quer dizer, colinear a $\nabla g_1(u)$.

Exemplo 6. A regra dos multiplicadores é uma técnica muito conveniente de se usar, principalmente podemos impor certos "vínculos". Por ilustração, tome o problema de autovalor não-linear:

$$\begin{aligned} -\lambda\Delta u(x) &= f(x, u(x)) && \text{se } x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde o autovalor λ é para ser determinado, Ω novamente é conexo e $f \in N^p(\Omega)$ $(0 \le p < \frac{n+2}{n-2})$ é localmente hölderiana e satisfaz

$$\begin{cases} f(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \\ sf(x,s) > 0 & \text{em } \Omega \text{ se } s \neq 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Nesta condições, (3.23) admite uma solução $u > 0$ em Ω com $\lambda > 0$. O método aqui é uma sequência espiritual da caracterização variacional de Rayleigh–Ritz para o problema de autovalor linear (2.18).

Tome a parte positiva $f^+(x,s) = \text{Max}\{f(x,s), 0\}$ $((x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, e considere o problema de minimizar $v \in H_0^1(\Omega) \mapsto J(v) = -\int_\Omega F^+(x,v)dx$ sob a bola unitária $B = \{v \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \le 1\}$. Como J é contínua na topologia fraca e nesta B é compacta, o mínimo $m = \text{Inf}_B\, I$ se dá em um $u \in B$.

Note que $m < 0$, pois se tomarmos e_1 (como no teorema 12) é fácil ver que $I(e_1) < 0$. Destarte $|u| = 1$. Senão, o lema de Fermat daria que $J'(u) = 0$ e assim $0 = \langle J'(u), u\rangle = \int_\Omega uf^+(x,u)dx$, o que por (3.24) acarretaria $u \le 0$ e $m = J(u) \ge 0$.

Como $M = \{v; |v| = 1\} = [g = 0]$, para $g(v) = (v, v) - 1$ ($v \in H_0^1(\Omega)$), que é C^1 e não tem pontos críticos em M, a regra do multiplicador diz que há um $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\lambda \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = \int_\Omega f^+(x, u) h dx \tag{3.25}$$

para qualquer $h \in H_0^1(\Omega)$. Pondo $h = u$ em (3.25), vê-se que $\lambda > 0$ e, assim, pelo teorema de regularidade 17, $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

A fim de mostrar que u e λ são soluções (3.23) resta averiguar que $u > 0$ em Ω. Ponha $\omega = [u < 0]$. Então ω é um aberto e

$$\begin{aligned} -\lambda \Delta u(x) &= 0 && \text{se } x \in \omega \\ u(x) &= 0 && \text{se } x \in \partial\omega \end{aligned}$$

o que, pelo princípio do máximo, mostra que $u \geq 0$ em ω e, desta forma, $\omega = \emptyset$.

3.7 Aplicação: problemas homogêneos

Um modelo muito simples, mas que surge em certos tipos de solução para equação de Schrödinger, é

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u|u|^{p-1} && \text{em } \Omega \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $0 < p < 1$ ou $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$. Admitindo a conexidade e regularidade de Ω, (3.26) sempre tem solução positiva.

De fato, considere o problema (3.23) com $f(x, s) = s|s|^{p-1}$. Vimos que existe um $\lambda > 0$ e um $u > 0$ tal que

$$\begin{aligned} -\lambda \Delta u &= u|u|^{p-1} = u^p && \text{em } \Omega \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

Assim, trocando u por tv ($t > 0$), vemos que

$$-\lambda t \Delta v = t^p v^p$$

Escolhendo então $t = (1/\lambda)^{\frac{1}{p-1}}$, v é uma solução positiva de (3.26).

Ao passo que f é sublinear se $0 < p < 1$, o método de minimização global é *inefetivo* para $p > 1$, porque $u \mapsto I(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}$ se torna ilimitado inferiormente. Mesmo assim, existe um tipo especial de solução para (3.12).

Dizemos que uma solução de (3.12) é *um estado fundamental*[4] se ela minimiza I sob o conjunto de todas as soluções não-triviais. Provemos que, para todo $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, (3.26) possui um estado fundamental positivo.

A prova disto consiste em atacar o problema sob a chamada superfície natural ou de Nehari:

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega); \langle I'(u), u\rangle = 0 \text{ e } u \not\equiv 0\} \tag{3.27}$$

$$= \left\{u \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega |u|^{p+1} dx \text{ e } u \not\equiv 0\right\} \tag{3.28}$$

Por (3.27) toda solução não-trivial de (3.26) está em M. Deste modo, o objetivo é mostrar a existência de um $u \geq 0$ em M tal que $I'(u) = 0$ e $I(u) = \text{Inf}_M I = m$.

A homogeneidade de (3.26) facilita grandemente esta tarefa. (3.28) tem como consequência que para $u \in M$ valem as identidades

$$I(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega |u|^{p+1} dx \tag{3.29}$$

$$I(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \tag{3.30}$$

A desigualdade de Sobolev

$$\int_\Omega |u|^{p+1} dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{p+1}{2}}$$

aplicada a (3.28) dá

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \geq 1/C \tag{3.31}$$

para todo $u \in M$ e portanto M "não se acumula no 0". (3.31) também nos dá que $m > 0$.

Vejamos mais algumas propriedades de M. Para qualquer "direção" $v \neq 0$ em $H_0^1(\Omega)$, existe um único $t > 0$ para o qual

$$\int_\Omega |\nabla(tv)|^2 dx = \int_\Omega |tv|^{p+1} dx$$

[4] Em inglês, *ground state solution*.

que é dado por

$$t = t(v) = \left(\frac{\int |u|^{p+1}}{\int |\nabla u|^2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.32}$$

Como $v \neq 0 \mapsto t(v)$ é de classe C^1 (pelo teorema 17), é fácil ver que este fato implica que M e a esfera $\{u \in H_0^1(\Omega); |u| = 1\}$ são difeomorfos.

Mais ainda, $M = [g = 0]$ para $g(v) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |u|^{p+1} dx$ definida em $U = \{v \neq 0\}$. Uma vez que $g \in C^1(U)$, novamente (3.30) dá que

$$\begin{aligned} \langle g'(u), u \rangle &= 2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (p+1) \int_\Omega |u|^{p+1} dx \\ &= (-p+1) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx < 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

para todo $u \in M$. Logo 0 é um valor regular para f e poderemos, se I atingir m, aplicar o teorema 19.

Para confirmar que m é assumido, apliquemos o "método direto do Cálculo de Variações": seja (u_n) uma sequência em M tal que $I(u_n) \to m$. Substituindo[5] u_n por $|u_n|$ podemos assumir que $u_n \geq 0$. Por (3.30), (u_n) é limitada e, usando a compacidade de $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ e a recíproca do teorema da convergência dominada, podemos assumir que existe um $u \in H_0^1(\Omega)$ para o qual

(i) $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$;

(ii) $u_n \to u$ fortemente em L^{p+1};

(iii) $u_n(x) \to u(x)$ em quase todo ponto $x \in \Omega$.

A semicontinuidade da norma em $\sigma(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega)^*)$, (3.28), (3.29), (i) e (ii) acima forçam a

$$\begin{aligned} m &= \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega |u|^{p+1} dx \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \\ &= \liminf \int_\Omega |u_n|^{p+1} \\ &= \int_\Omega |u|^{p+1} \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \liminf I(u_n) \\ &= m \end{aligned} \tag{3.36}$$

[5] Lembre-se que pela regra da cadeia $H_0^1(\Omega)$ é fechado pela operação $v \mapsto |v|$.

Afirmamos que $u \in M$. Supondo por absurdo que não, (3.35) se dá com uma desigualdade e $t = t(u)$ em (3.32) é < 1, de modo que (3.30), (3.34) e (3.35) fazem que

$$\begin{aligned}
0 < m &= I(tu) \\
&= t^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&< t^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big) \int_\Omega |u|^{p+1} dx \\
&= t^2 m < m
\end{aligned}$$

absurdo!

Assim, pela regra do multiplicador $I'(u) = \lambda g'(u)$, para algum λ. Aplicando os dois lados em u e comparando (3.27) com (3.33), devemos ter que $\lambda = 0$, donde $u \neq 0$ é um ponto crítico de I. Finalmente, o teorema 18, o item (iii) acima bem como o princípio do máximo obrigam a $u > 0$ em Ω. A demonstração está concluída.

Comentário sobre a condição em p: Uma renomada identidade devida a S. Pohozaev diz que, se $f = f(s)$, toda solução clássica u de (3.12) satisfaz

$$\int_\Omega \Big(2nF(u) + (2-n)uf(u)\Big)dx = \int_\Gamma x \cdot \nu(x)|\nabla u|^2 d\sigma(x) \tag{3.37}$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$, ν é a normal unitária exterior e $d\sigma$ é o elemento de área em Γ; para prova, consulte Badiale e Serra [2] e Willem [27], ou Kavian [12] para uma versão mais geral.

Consequentemente, se Ω é estrelado em relação à origem, $\nu(x) \cdot x \geq 0$ em $\partial\Omega$ e

$$\int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{n-2}{2n} \int_\Omega uf(u)dx.$$

Escolhendo $f(s) = s|s|^{p-1}$ como acima, temos

$$\left(\frac{1}{p+1} - \frac{2n}{n-2}\right) \int_\Omega |u|^{p+1} dx \geq 0$$

de modo que não há outra solução, senão a trivial, para $p > (n+2)/(n-2)$.

Se ainda Ω for estritamente estrelado, isto é, $\nu(x) \cdot x > 0$ em Γ (*e.g.* uma bola) e tomarmos $p = (n+2)/(n-2)$, (3.37) dá que $\nabla u \equiv 0$ em Γ. Assim, aplicando o teorema da divergência[6]

$$0 = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Omega \Delta u dx = -\int_\Omega |u|^{p-1} u dx$$

[6] Deduções rigorosas desta ferramenta importante estão em de Figueiredo [6] e Kavian [12].

portanto não pode haver soluções positivas.

Isto sugere que, mesmo para as aplicações mais simples, a condição $0 \leq p < (n+2)/(n-2)$ não é de toda superficialidade. Evidentemente, isto não quer dizer que $p \geq (n+2)/(n-2)$ deve ser descartado; de fato, nem deveria ser, já que $p = (n+2)/(n-2)$ aparece em várias conexões com Física e Geometria. Resultados profundos de Brezis e Nirenberg [4] e de Rabinowitz [20] mostram que, se somarmos a f um termo de ordem superior[7], a situação pode se reverter. É óbvio que a questão também depende da geometria de Ω; por exemplo, em uma região anular há solução positiva para todo $p > 0$. Recomendamos a leitura dos artigos supracitados, bem como a discussão em Cazenave [5] (seção 2.7).

[7] Por exemplo, $s \mapsto \lambda s$, para λ apropriado.

4 Procedimentos minimax elementares

4.1 Introdução

O procedimento de se produzir soluções não-triviais estudando superfícies de Nehari pode ser generalizado para outras linearidades diferentes de "potências puras" (vide Badiale e Serra [2]), mas as tecnicalidades se multiplicam a ponto de se questionar a fertilidade de tal método. Uma razão por trás disto é que, quando se tenta passar das propriedades *quantitativas* para propriedades *qualitativas* das potências, não fica muito claro o que é essencial ou o que não é.

Um outro meio de se enxergar o problema é o seguinte. Tome novamente $I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx$ ($u \in H_0^1(\Omega)$) e $p > 1$ e adotemos um linguajar topográfico. Não é difícil ver que 0 é um ponto de mínimo local para I[1], e que, como dito anteriormente, que I é ilimitado inferiormente. Escolha então um e um ponto fora das montanhas que circundam a origem no qual a "altitude" $I(e) < I(0) = 0$. Poderia se esperar (ao menos neste viés geográfico) que se pudesse construir uma ferrovia ligando uma vila que está em 0 a uma outra que está em e, que evitaria os relevos acidentados ao redor de 0, de modo a minimizar a altura máxima subida. No seu cume, o trilho seria horizontal tanto em relação ao morro que escala quanto às serras ao seu redor e teria se descoberto um novo ponto crítico a I.

O raciocínio acima seria o conteúdo geométrico do "teorema do passo da montanha", que é um dos mais simples e importantes métodos minimax. Estes basicamente se ocupam em caracterizar um valor crítico c de I por uma expressão do tipo

$$c = \operatorname*{Inf}_{A \in S} \operatorname*{Max}_{u \in A} I(u)$$

onde S é uma classe adequada de partes do espaço em que se procura soluções. Não há um algoritmo para se escolher S, senão que S deve refletir alguma peculiaridade de I. No caso do teorema do passo, S será escolhido como o traço das curvas ligando 0 a e e usaremos como propriedades que sabemos como I se comporta perto da origem (que é um mínimo) e "perto do infinito" (onde tende a $-\infty$).

Para justificar tais silogismos, será necessário supor que I satisfaça uma certa propriedade de compacidade chamada de "condição de Palais-Smale". Esta hipótese possibilitará o

[1] Verificaremos isto na seção 4 através do fato de que $(|s|^{p-1}s)/s \xrightarrow{s \to 0} 0$, mas há um método mais simples neste caso. Repetindo os argumentos do teorema 17, pode se verificar que I é de classe C^2 (isto é, $I' \in C^1(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega)^*)$) e $I''(u) = (I')'(u) \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega)^*)$ é dada por $\langle I''(u)h, k\rangle = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla k dx - p\int_\Omega |u|^{p-1}hk dx$; em particular $\langle I''(0)h, k\rangle = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla k dx$. Pela desigualdade do valor médio, pode-se provar a expansão de Taylor (consulte Ambrosetti e Prodi [1] ou Dieudonné [9]): $I(u) = \frac{1}{2}\langle I''(0)u, u\rangle +$ [termos de ordem $|u|^2$] $\geq \frac{1}{4}|u|^2 > 0 = I(0)$, para $|u|$ suficientemente pequeno.

uso de um argumento topológico indireto através do "lema de deformação", que tem um papel central na teoria minimax. Por fim, apresentaremos o "teorema do ponto de sela", que se aplica a situações em que o "teorema do passo da montanha" é inefetivo.

4.2 A condição de Palais-Smale (PS)

Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E)$. Uma sequência (u_k) em E é dita *de Palais-Smale* para I se $(I(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada e $I'(u_k) \to 0$. Diremos também que I cumpre a *condição de Palais-Smale* (daqui para frente denotada por (PS)) se toda sequência de Palais-Smale admitir uma subsequência convergente.

Esta condição é uma ferramenta muito adequada para se estabelecer alguma compacidade sobre I; por exemplo, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $K_c = \{u \in E; I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$ é compacto (possivelmente vazio) se I satisfaz (PS). Note também que para verificá-la, basta se ater a sequências que mantêm I limitado, o que é muito conveniente quando não se tem estimativas *a priori* para as soluções de uma equação elíptica.

É fácil ver que, se E tem dimensão finita, é suficiente que I seja coercivo para que ele cumpra (PS), pois a coercividade forçaria às sequências de Palais-Smale a serem limitadas. Coincidentemente, este mesmo raciocínio se aplica aos funcionais adjuntos a problemas semilineares.

Proposição 3. *Seja Ω um aberto suave limitado em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), $E = H_0^1(\Omega)$ e $I \in C^1\big(H_0^1(\Omega)\big)$ da forma*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$ e $f \in N^p(\Omega)$ para $0 \leq p < (n+2)/(n-2)$ (manteremos as mesmas notações do capítulo anterior). Então a fim de I satisfaça (PS) é necessário e suficiente que toda sequência de Palais-Smale possua uma subsequência limitada.

Demonstração. A necessidade é trivial; para a suficiência, escreva I' como $I'(u) = Lu + J'(u)$ onde L é o isomorfismo entre E e E^* dado pelo teorema da representação de Riesz-Fréchet e J', como no teorema 17, é um operador não-linear compacto. Se (u_k) uma sequência de Palais-Smale, podemos admitir, passando a uma subsequência, que (u_k) é limitada, portanto, passando novamente a outra subsequência, também assumir que $J'(u_k)$ converge a um certo $\phi \in E^*$. Assim $u_k = L^{-1}I'(u_k) + L^{-1}J'(u_k) \to L^{-1}\phi$ e a prova está completa. □

Observação: a condição (PS) pode parecer à primeira vista muito restritiva para aplicações; de fato, era este o sentimento quando ela foi primeiramente introduzida por S. Smale e R. Palais para generalizar a teoria de Morse a espaços de dimensão infinita. Atualmente, no entanto, após o sucesso dos trabalhos de Ambrosetti, Brezis, Nirenberg, Rabinowitz *et al.*, (PS) é tida como uma hipótese muito sensata e, quando ela não vale, é porque há algo de "curioso" ocorrendo nos níveis de I (vide Struwe [25], capítulo III).

4.3 O lema de deformação

Lema 3 (Lema de deformação)**.** *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E)$ satisfazendo (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico à I, para qualquer $\overline{\varepsilon} > 0$, pode se determinar um $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$ e uma aplicação $\eta : E \to E$ contínua tal que:*

(i) η é uma DEFORMAÇÃO, isto é, é homotópica à identidade: existe uma aplicação $H : [0,1] \times E \to E$ contínua tal que $H(0,u) = u$ e $H(1,u) = \eta(u)$ para todo $u \in E$;

(ii) η fixa os níveis $[I < c - \overline{\varepsilon}]$ e $[I > c + \overline{\varepsilon}]$: $\eta(u) = u$ se $|I(u) - c| > \overline{\varepsilon}$;

(iii) η lança $[I \leq c + \varepsilon]$ em $[I \leq c - \varepsilon]$: $\eta([I \leq c + \varepsilon]) \subset [I \leq c - \varepsilon]$.

Antes de provarmos o lema 3, seria muito ilustrativo entendermos o resultado abaixo:

Proposição 4 (M. Morse)**.** *Assuma que $E = \mathbb{R}^n$ e $I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (PS). Se $a < b$ são tais que não há nenhum valor crítico $c \in [a,b]$, então existe uma deformação $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\eta([I \leq b]) \subset [I \leq a]$.*

O conteúdo da proposição é que a existência de um valor crítico indica uma cisão grave na topologia dos níveis $[I \leq b]$ e $[I \leq a]$.

Demonstração. Como queremos levar pontos em $[I \leq b]$ e "diminuí-los" a $[I \leq a]$, seria natural fazermos isto percorrendo as linhas de maior descida de I, que têm sentido de $-\operatorname{grad} I$. É justamente assim que procederemos.

Defina $\vartheta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ por $\vartheta(\xi) = 1$, se $0 \leq \xi \leq 1$ e $\vartheta(\xi) = 1/\xi$, se $\xi > 1$, e o campo vetorial $W : E \to E$ por $W(u) = -\vartheta\big(|\operatorname{grad} I(u_k)|\big) \operatorname{grad} I(u)$ $(u \in E)$. Então W é localmente lipschitziana e limitada em toda parte, portanto o fluxo $g^t u$ da equação diferencial ordinária:

$$\dot{u}(t) = W(u(t))$$

está definida para todo $-\infty < t < \infty$ e $x \in E$.

Provemos que existe um $T > 0$ tal que $g^T u \in [I \leq a]$ para todo $u \in [I \leq b]$. Note primeiramente que, por (PS), existe um $0 < \delta < 1$ tal que $|\operatorname{grad} I(u)| > \delta$ para todo $u \in [a \leq I \leq b]$; do contrário, haveria uma seqüência (u_k) em $[a \leq I \leq b]$ tal que $|\operatorname{grad} I(u)| \to 0$. Passando a uma subsequência, $u_k \to u_0$, que cumpre $a \leq I(u_0) \leq b$ e $\operatorname{grad} I(u_0) = 0$, contradizendo as hipóteses da proposição.

Duas observações cruciais são também as seguintes: dado $u \in E$, $t \mapsto I(g^t(u))$ é decrescente, pois $\frac{d}{dt}I(g^t(u)) = b(|\operatorname{grad} I(g^t)|)|\operatorname{grad} I(g^t)|^2 < 0$; e que $\vartheta(\xi)\xi^2 > \delta^2$ para $\xi > \delta$.

Feitas estas considerações, afirmamos que se pode tomar $T = (b - a)/\delta^2$. De fato, se houvesse um $u \in [I \le b]$ tal que $I(g^T u) > a$, teríamos que para $0 \le t \le T$,

$$\frac{d}{dt}I(g^t(u)) \le -\delta^2$$

portanto integrando teríamos:

$$\begin{aligned} I(g^T u) &\le I(u) - \delta^2 T \\ &\le b - \delta^2 \\ &< a \end{aligned}$$

absurdo! Logo, $g^T([I \le b]) \subset [I \le a]$.

Ponha então $H(s,u) = g^{sT}(u)$ e $\eta(u) = g^T(u)$ $(0 \le s \le 1,\ u \in E)$. H é deste modo uma homotopia entre a identidade e η, que tem as características almejadas. □

A prova do lema 3 consiste em acertar alguns detalhes da prova acima, a saber:

- precisaremos de uma "deformação local", já que queremos fixar os níveis $[I \ge c + \overline{\varepsilon}]$ e $[I \le c + \overline{\varepsilon}]$. Isto será feito alterando o suporte de W;
- Quando E não é hilbertiano, não temos vetor gradiente e, até se tivéssemos, no caso em que I é apenas de classe C^1, não poderíamos usar um argumento de equações ordinárias, dado que o fluxo $g^t u$ não poderia estar bem definido. O fato é que não é necessário percorrer a direção de menor descida, apenas uma "íngreme" o suficiente. Por exemplo, em um ponto u no qual $I'(u) \ne 0$, o teorema de Hahn-Banach garante a existência de um vetor $x \in E$ tal que $\langle I'(u), x\rangle > \|I'(u)\|^2$ e $\|x\| < 2\|I'(u)\|$. Pela continuidade de I', as desigualdades anteriores persistem para uma vizinhança de u e assim determinamos localmente uma "direção de descida rápida". A passagem do local para o global pode ser efetuada, mesmo quando E tem dimensão infinita (e portanto não localmente compacto), através de partições da unidade e do conceito de paracompacidade. É com isto que nos ocuparemos na próxima subseção.

4.3.1 Paracompacidade

Seja M um espaço topológico. Dados recobrimentos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ de M, diremos que $\{V_\beta\}$ *refina* $\{U_\alpha\}$, caso, para todo β, $V_\beta \subset U_\alpha$ para algum α. Um recobrimento $\{V_\beta\}$ será dito *localmente finito*, se todo $u \in M$ tiver uma vizinhança que intecepta um número finito de V_β's.

Assim diremos que M é *paracompacto* se todo recobrimento $\{U_\alpha\}$ de M tiver um refinamento localmente finito.

Trivialmente todo espaço compacto é paracompacto. Na verdade, vale um resultado muito mais surpreendente:

Teorema 20 (A. H. Stone). *Se M for metrizável, será também paracompacto.*

Demonstração. O argumento adotado será o de Rudin [21]. Seja d uma distância compatível com a topologia de M e denote por $B(u;r) = \{v \in M; d(u,v) < r\}$ a bola aberta de raio $r > 0$ e centrada em $u \in M$.

Dado um recobrimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M, usando o lema de Zorn não é difícil se provar que existe uma relação de ordem total em A, no qual todo subconjunto não-vazio tem elemento mínimo (este é o chamado "teorema da boa ordenação"). Com esta ordem em mente, defina indutivamente para todo inteiro não-negativo n o conjunto $V_{\alpha n} \subset M$ como a reunião de todas as bolas abertas $B(u;2^{-n})$ onde:

(i) α é o menor elemento de A tal que $x \in U_\alpha$;

(ii) $u \notin V_{\alpha j}$, se $j < n$;

(iii) $B(u;3 \cdot 2^{-n}) \subset U_\alpha$.

Facilmente se verifica que $\{V_{\alpha n}\}$ é um recobrimento de M que refina $\{U_\alpha\}$. Resta portanto se verificar que $\{V_{\alpha n}\}$ é localmente finito.

Para isto, tome $u \in M$ e sejam $\alpha \in A$ o menor índice para o qual $u \in V_{\alpha n}$ para algum n e $j \geq 1$ tal que $B(u;2^{-j}) \subset V_{\alpha n}$. Mostraremos que

- se $i \geq n + j$, $B(u;2^{-n-j})$ não intersecta nenhum $V_{\beta i}$;
- se $i < n + j$ $B(u;2^{-n-j})$ intersecta no máximo um $V_{\beta i}$.

o que evidentemente encerrará a demonstração.

Como $i > n$, (ii) implica que todas as bolas de raio 2^{-i} usadas na construção de $V_{\beta i}$ têm centro v fora de $V_{\alpha n}$, donde $d(u,v) \geq 2^{-i}$, por $B(u;2^{-i}) \subset V_{\alpha n}$. Assim, uma vez que $i \geq j+1$ e $n + j \geq j + 1$, temos $B(u;2^{-n-j}) \cap B(v;2^{-i}) = \varnothing$ (do contrário, havendo um w nesta interseção, $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \leq 2^{-n-j} + 2^{-i} \leq 2^{-j}$, absurdo). Isto mostra o primeiro item acima.

Para o segundo, assuma $i < n + j$. Sendo $p \in V_{\beta i}$ e $q \in V_{\gamma i}$, com $\beta < \gamma$, mostremos que $d(p,q) > 2^{-n-j+1}$, forçando a no máximo um deles estar em $B(u;2^{-n-j})$. Tome p' e q' tais que $p \in B(p',2^{-i}) \subset B(p';3 \cdot 2^{-i}) \subset U_\beta$ e $q \in B(q',2^{-i}) \subset B(q';3 \cdot 2^{-i}) \subset U_\gamma$. Por (i), $q' \notin U_\beta$

e assim $d(p',q') \geq 3 \cdot 2^{-i}$. Disto, a desigualdade triangular nos dá $d(p,q) > 2^{-i} > 2^{-n-j+1}$, como queríamos.

□

Observação: No caso em que M é separável, o uso explícito do axioma da escolha é facultativo. Com efeito, o teorema de Lindelöf diz que, descartando alguns U_α's, pode-se sempre supor que $A = \mathbb{N}$, o qual possui uma boa ordem trivial; ou então, poderia se usar a dedução intuitiva de Lima [14].

4.3.2 Campos pseudogradientes

Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E)$. Diremos que um vetor $x \in E$ é *pseudogradiente para I em u* se:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq 2\|I'(u)\| \\ \langle I'(u), x\rangle &\geq \|I'(u)\|^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como observamos no início da seção, a existência de vetores pseudogradientes é assegurada pelo teorema de Hahn-Banach, mas sem unicidade de direção em geral.

Diremos que um campo vetorial $X : \mathscr{D}(X) \to E$, de domínio em $\mathscr{D}(X) = \{u \in E; I'(u) \neq 0\}$, é um *campo pseudogradiente a I* se X for localmente lipschitziana[2] e $X(u)$ for um vetor pseudogradiente a I para todo $u \in \mathscr{D}(X)$.

Em suma, $-X$ será para nossos propósitos uma direção suficientemente brusca para I. Um resultado geral e, que seria inusitado mesmo para o caso euclidiano, é:

Teorema 21 (Palais)**.** *Toda aplicação $I \in C^1(E)$ possui um campo pseudogradiente X.*

Demonstração. Para todo $v \in \mathscr{D}(X)$, escolha um $w = w(v) \in E$ tal que $\|w\| = 1$ e $\langle I'(v), w\rangle = \|I'(v)\|$. Pondo $x = x(v) = \frac{3}{2}\|I'(v)\|w$, por continuidade existe uma vizinhança $G_v \ni v$ na qual (4.1) se conserva.

$\{G_v\}_{v\in\mathscr{D}(X)}$ é um recobrimento de $\mathscr{D}(X)$, o qual por ser um espaço métrico (pela topologia induzida de E) e é paracompacto. Seja então $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ um recobrimento localmente finito de $\{G_v\}$.

Já que, para todo β, $\rho_\beta(u) = \mathrm{dist}(u, \mathscr{D}(X)\backslash V_\beta)$ $(u \in E)$ cumpre a condição de Lipschitz[3] e $\rho_\beta \equiv 0$ em $\mathscr{D}(X)\backslash V_\beta$, estão bem definidas e são localmente lipschitzianas as "partições da unidade":

[2] Aqui, isto quer dizer que todo $u \in \mathscr{D}(X)$ tem uma vizinhança U, restrita a qual X é lipschitziano. Esta definição está de acordo com a dada em 2.4, pois no caso $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tem dimensão $n + 1 < \infty$.

[3] Rudin [23], capítulo 4, exercício 20.

$$\psi_\alpha(u) = \rho_\alpha(u) \Big/ \Big(\sum \rho_\beta(u) \Big), (u \in \mathscr{D}(X))$$

De fato, a somatória acima é numa vizinhança de u finita, donde que ψ_α é localmente lipschitziana. Observe também que $0 \le \psi_\alpha \le 1$ e que $\sum \psi_\alpha \equiv 1$, onde esta soma também é (localmente) finita.

Deste modo, escolhendo para cada α um vetor $x_\alpha = x(v)$, caso $V_\alpha \subset G_v$, defina $X(u) = \sum x_\alpha \psi_\alpha(u)$ $(u \in \mathscr{D}(X))$. Então X é localmente lipschitizana e, qualquer que seja $u \in \mathscr{D}(X)$, $X(u)$ é uma combinação convexa de pseudogradientes em u, logo também pseudogradiente. A prova está terminada. □

4.3.3 Prova

Demonstremos o lema 3 realizando os passos descritos após a prova da proposição 4.

Como anteriormente, existe um $0 < \delta < 1$ e um $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ tais que $\|I'(u)\| \ge \delta$ se $u \in E$ cumpre $|I(u) - c| < \varepsilon$. Do contrário, existiria uma sequencia (u_k) tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$. Por (PS), haveria um ponto crítico no nível c, contradizendo as hipóteses do lema 3.

Defina então a "função de Urysohn":

$$f(u) = \frac{\operatorname{dist}(u, A)}{\operatorname{dist}(u, A) + \operatorname{dist}(u, B)}$$

onde $A = [I \le c - \bar{\varepsilon}] \cup [I \ge c + \bar{\varepsilon}]$ e $B = [c - \varepsilon \le I \le c + \varepsilon]$. Observe que $0 \le f \le 1$, $f \equiv 0$ em A e $f \equiv 1$ em B. Se $X : \mathscr{D}(X) \to E$ é um campo pseudogradiente a I e ϑ é como na prova da proposição 4, ponha

$$W(u) = -f(u)\vartheta(\|X(u)\|)X(u)$$

se $u \in \mathscr{D}(X)$ e $W(u) = 0$ em caso contrário.

Uma vez que W é localmente lipschitziana e $\|W(u)\| \le 1$, o fluxo $g^t(u)$ da equação diferencial ordinária

$$\dot{u}(t) = W(u(t))$$

está definido globalmente para $(t, u) \in \mathbb{R} \times E$.[4] Ademais, como para todo u, $\frac{d}{dt} I(g^t u) \le 0$, o fluxo preserva conjuntos tipo $[I \le \alpha]$.

[4] O teorema básico de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, bem como as propriedades do fluxo, se transportam com mesmo enunciado e prova para espaços de Banach arbitrários. Consulte Dieudonné [9] ou leia a prova do teorema 7.3 de Brezis [3] e tente generalizar.

Afirmamos que $\eta(u) = g^T(u)$ $(u \in E)$ para $T = 2\varepsilon/\delta^2$ satisfaz as conclusões do lema. Com efeito, se houvesse um $u \in [I \leq c + \varepsilon]$ tal que $I(\eta(u)) > c - \varepsilon$, então $g^t(u) \in [c - \varepsilon < I < c + \varepsilon]$ para todo $0 < t < T$ e

$$\begin{aligned}
I(\eta(u)) &= I(u) + \int_0^T \frac{d}{dt} I(g^t u) dt \\
&= I(u) - \int_0^T f(g^t u) \vartheta(\|X(g^t u)\|) \big\langle I'(g^t u), X(g^t u) \big\rangle dt \\
&\leq I(u) - \int_0^T \vartheta(\|X(g^t u)\|) \|I'(g^t u)\|^2 dt \\
&\leq c + \varepsilon - \delta^2 T \\
&= c - \varepsilon
\end{aligned}$$

contradição. (Usamos mais uma vez que $\vartheta(\xi)\xi^2 \geq \delta^2$ se $\xi \geq \delta$). Fora isto, $W \equiv 0$ em A e portanto η fixa $[I \leq c - \bar{\varepsilon}]$ e $[I \geq c + \bar{\varepsilon}]$. Sendo η claramente homotópica à identidade, não há mais nada a se fazer.

Observação: existem versões mais gerais do lema de deformação, vide Rabinowitz [19], Struwe [25] e Willem [27]. Estas se ocupam em refinar as hipóteses requiridas e as conclusões obtidas. Por exemplo, (PS) só entra para estabelecer um $\delta > 0$ para o qual

$$\|I'(u)\| \geq \delta \tag{4.2}$$

num nível $[c - \varepsilon < I < c + \varepsilon]$. Assim, se $[I \leq c + \varepsilon]$ não for deformável a $[I \leq c - \varepsilon]$, então (4.2) não se sustenta e pode-se produzir uma sequência (u_k) tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$.

4.4 O teorema do passo da montanha

Teorema 22 (Teorema do Passo da Montanha). *Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E)$ satisfazendo (PS). Se I satisfazer as condições geométricas:*

(i) $I(0) = 0$;

(ii) há r e $\alpha > 0$ para os quais $I(u) \geq \alpha$ caso $\|u\| = r$;

(iii) existe $e \in E$ tal que $\|e\| > r$ e $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$ caracterizado por

$$c = \operatorname*{Inf}_{\gamma \in \Gamma} \operatorname*{Max}_{u \in \gamma[0,1]} I(u)$$

onde Γ é classe de todas as curvas contínuas $\gamma : [0,1] \to E$ satisfazendo $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = e$.

Demonstração. Evidentemente $c < +\infty$; além disso, se $\gamma \in \Gamma$, existe um $0 < t < 1$ para o qual $\|\gamma(t)\| = r$ e assim $\text{Max}_{u\in\gamma[0,1]} I \geq I(\gamma(t)) \geq \rho$. Portanto $c \geq \rho$.

Suponha por absurdo que c não é valor crítico de I e, para $\overline{\varepsilon} = \alpha/2$, sejam ε e η como no lema 3. Se $\gamma \in \Gamma$ é tal que $\text{Max}_{u\in\gamma[0,1]} I < c + \varepsilon$, defina $\sigma = \eta \circ \gamma$. Como $I(e) \leq I(0) = 0 < \alpha - \overline{\varepsilon} \leq c - \overline{\varepsilon}$, vemos que 0 e e estão em $[I \leq c - \overline{\varepsilon}]$, donde $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = e$, quer dizer, $\sigma \in \Gamma$.

Por outro lado, como $\gamma[0,1] \subset [I \leq c+\varepsilon]$, $\sigma[0,1] \subset [I \leq c-\varepsilon]$, donde $\text{Max}_{u\in\sigma[0,1]} I < c - \varepsilon$, contradizendo o fato de c ser ínfimo. Portanto, c é um valor crítico. □

Observações:

1.) Heuristicamente, as hipóteses geométricas (i)-(iii), que são satisfeitas se $I(0) = 0$, 0 for um ponto de mínimo e I for ilimitada inferiormente, dizem que os pontos $(0,0)$ e $(e, I(e))$ no gráfico de I estão separados por uma cadeia de montanhas. Entretanto, elas, sem (PS), não são suficientes para a conclusão do teorema 22 se dim. $E > 1$.

Para ver isto, considere $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $I(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$ com $e = (2,2)$. Então, $I(0) = 0$, 0 é um ponto de mínimo e $I(e) = 0$, mas um cálculo simples mostra que I não tem pontos críticos senão a origem. A razão disto é que há uma "cordilheira" de altura constante igual a 1 separando 0 e e de modo que a busca por passos da montanha se estende até o infinito, mas sem sucesso. Em termos quantitativos, escrevendo $y \in (0,+\infty) \mapsto \alpha(y) = \left((1+\frac{1}{3y^2}) - \sqrt{(1+\frac{1}{3y^2})^2 - 1}, y\right)$, temos: $\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)(\alpha(y)) = 0$, $\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\right)(\alpha(y)) > 0$ $(\forall y > 0)$, $I(\alpha(y)) \xrightarrow{y\to+\infty} 1$, $I'(\alpha(y)) \xrightarrow{y\to+\infty} 0$ e $\alpha(y) \xrightarrow{y\to+\infty} (1,+\infty)$.

2.) Mesmo que não valha (PS), a demonstração acima mostra que não pode haver uma deformação que leve $[I \leq c+\varepsilon]$ em $[I \leq c-\varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$. Assim, à luz da observação na subseção 4.3.3, existe uma sequência (u_k) em E tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$.

O teorema é um arquétipo clássico do método minimax, cujo *script* segue em geral as seguintes linhas: primeiro se escolhe uma família de conjuntos que explore as características de I e que é invariante por uma deformação η; a caracterização de um valor c por uma expressão "min-max"; argumentos topológicos estimando c e, por fim, uma aplicação do lema de deformação para provar que c é crítico.

Apliquemos estas ideias mostrando o seguinte resultado intimamente ligada aos resultados do capítulo anterior:

Proposição 5. *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E)$ satisfazendo (PS). Se I é limitada inferiormente, $c = \text{Inf}_E I$ é um valor crítico.*

Demonstração. Por hipótese, c é finito e, se S é a família de conjuntos de E consistindo de um único ponto, c é dado por

$$c = \operatorname*{Inf}_{K \in S} \operatorname*{Max}_{u \in K} I(u)$$

Se c não fosse assumido, não seria crítico e o lema de deformação, com $\overline{\varepsilon} = 1$, nos daria uma deformação $\eta : E \to E$ que mapearia S em S e que, por argumentos idênticos aos da demonstração do teorema 22, nos forneceria um $u \in E$ tal que $I(u) < c - \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Absurdo! □

Observação: Tanto a proposição acima quanto o teorema do passo da montanha poderiam ser obtidos através do chamado "principio variacional de Ekeland"; consulte Cazenave [5], de Figueiredo [7] e Mawhin e Willem [16].

4.5 Aplicação: problemas superlineares

Teorema 23 (Ambrosetti-Rabinowitz). *Se Ω é um aberto limitado suave em $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua satisfizer:*

(A) $f \in N^p(\Omega)$ para algum $0 \leq p < (n+2)/(n-2)$;

(B) $f(x,s)/s \to 0$ uniformemente em $x \in \Omega$ quando $s \to 0$;

(C) existem constantes $\theta > 2$ e $\rho \geq 0$ tais que para todo $|s| \geq \rho$

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s);$$

então a equação semilinear

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x, u(x)) && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.3}$$

terá uma solução fraca não-trivial.

A hipótese (C), chamada de "*condição de Ambrosetti-Rabinowitz*", é satisfeita com $\rho = 0$ se a função $s \mapsto f(x,s)/(s|s|^{\theta-2})$ for não-decrescente e só se anular no 0 para todo $x \in \overline{\Omega}$. A possibilidade de haver algum ρ permite que seja possível acrescentar a uma f satisfazendo (C) um termo de ordem superior quando $|s| \to \infty$.

Um outro método de interpretá-la é ver que ela diz que F cresce *superquadraticamente*, pois

$$\frac{d}{ds}\left(s^{-\theta} F(x,s)\right) \geq 0$$

para $\forall x \in \Omega$, $|s| \geq \rho$. Integrando, obtém-se

$$F(x,s) \geq s^{\theta} F(x,\rho), \text{ se s} > \rho$$

$$F(x,s) \geq |s|^{\theta} F(x,-\rho), \text{ se s} < -\rho$$

de modo que

$$F(x,s) \geq a|s|^{\theta} + b \tag{4.4}$$

em toda parte, onde

$$a = \operatorname*{Min}_{x\in\overline{\Omega}, |s|=\rho} F(x,s) \qquad\qquad (> 0 \text{ por (C)}),$$
$$b = \operatorname*{Min}_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[-\rho,\rho]} \left\{F(x,s) - a|s|^{\theta}\right\}.$$

Portanto, voltando a (C):

$$f(x,s) \geq \frac{1}{\theta}\left(as^{\theta-1} + b/s\right) \qquad \text{se } s > \rho;$$
$$f(x,s) \leq \frac{1}{\theta}\left(-as^{\theta-1} + b/s\right) \qquad \text{se } s < \rho.$$

Por conseguinte, pode-se dizer que o teorema 23 é sobre não-linearidades f que possuem um certo crescimento *superlinear*. Note que (B) implica que (4.3) tem a solução trivial $u \equiv 0$.

Funções que satisfazem (B) e (C) são, por exemplo, aquelas que "são potências no infinito", como combinações de $(x,s) \mapsto V(x)|s|^{p-1}s$, onde $V \in C(\overline{\Omega})$ é positiva (ao menos para os termos de maior expoente).

Demonstração. Provemos que $I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x,u)dx$ ($u \in H_0^1(\Omega)$) satisfaz as condições do teorema 22.

Passo um: $I(0) = 0$ e tem um mínimo no 0.

A primeira parte é óbvia; para a segunda, note que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 \tag{4.5}$$

se $|s| \leq \delta$. Por outro lado, como $f \in N^p(\Omega)$, existem uma $a_1 \in L^{p'}$ e $a_2 > 0$ para o qual

$$|F(x,s)| \leq \int_0^s |f(x,\tau)|d\tau$$
$$\leq \|a_1\|_{p'} + \frac{a_2}{p+1}|s|^{p+1}$$
$$\leq \frac{a_1^{(p+1)'}}{(p+1)'} + \frac{a_2+1}{p+1}|s|^{p+1} \tag{4.6}$$
$$\leq (\text{const.})_1 |s|^{p+1} \tag{4.7}$$

para todo $|s| > \delta$ (usamos em (4.6) a desigualdade de Young). Então juntando (4.5) e (4.7), vale que

$$|F(x,s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + (\text{const.})_1 |s|^{p+1}$$

para qualquer $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$. Assim, as desigualdades de Poincaré e Sobolev afirmam que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx + (\text{const.})_1 \int_\Omega |u|^{p+1}dx \\ &\leq (\text{const.})_2\left(\varepsilon + |u|^{p-1}\right)|u|^2_{H_0^1}\end{aligned}$$

onde as constantes dependem somente em p e em Ω. Deste modo

$$\lim_{u\to 0}\frac{\left|\int_\Omega F(x,u)dx\right|}{|u|^2_{H_0^1}} = 0$$

e em virtude disto,

$$I(u) = \frac{1}{2}|u|^2 + \text{termos de ordem } |u|^2$$

donde se verifica que 0 é um mínimo local a I.

Passo dois: I é ilimitado inferiormente.

(4.4) diz que para uma função não-nula $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}I(tv) &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - |t|^\theta a \int_\Omega |u|^\theta dx - b\left(\text{medida de }\Omega\right) \\ &\to -\infty\end{aligned}$$

quando $t \to +\infty$.

Passo três: I satisfaz (PS).

Provemos que toda sequência de Palais-Smale é limitada, o que nos dará (PS) pela proposição 3. Se (u_k) sequência tal que $|I(u_k)| \leq C$ para algum $C > 0$ e $\|I'(u_k)\| = \varepsilon_k \to 0$, vemos que

$$
\begin{aligned}
C + \frac{\varepsilon_k}{\theta}|u_k| &\geq I(u_k) - \frac{1}{\theta}\Big\langle I'(u_k), u_k\Big\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)|u_k|^2 + \frac{1}{\theta}\int_\Omega \Big(f(x,u_k)u_k - \theta F(x,u_k)\Big)dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)|u_k|^2 + \frac{1}{\theta}\int_{|u_k(x)|\geq\rho} \Big(f(x,u_k)u_k - \theta F(x,u_k)\Big)dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)|u_k|^2 + \frac{1}{\theta}\operatorname*{Inf}_{x\in\Omega,|s|\leq\rho}\Big\{f(x,s)s - F(x,s)\Big\}\Big(\text{medida de }\Omega\Big)
\end{aligned}
$$

quer dizer, vale uma desigualdade da forma

$$
(\text{constante positiva})|u_k|^2 \leq (\text{constante independente de k})(1 + |u_k|)
$$

e assim (u_k) se mantém limitada.

Passo quatro: Como I satisfaz as hipóteses do teorema 22, há um ponto crítico u tal que $I(u) > 0 = I(0)$ e, que assim, não pode ser o estado identicamente nulo. □

Observações:

1.) Tomando a parte positiva $f^+(x,s) = \text{Max}\{f(x,s), 0\}$ e procedendo como acima e como no exemplo da seção 3.5, pode-se garantir a existência de soluções ≥ 0 se f for localmente hölderiana (com a desigualdade valendo estritamente em Ω, se este for conexo). A única modificação talvez seria no passo 2, no qual teríamos que usar uma v positiva;

2.) Não é necessário que 0 seja um mínimo local para a aplicação do teorema 22. Uma examinação minuciosa verifica que as hipóteses dele valeriam mesmo se somássemos a f uma função contínua h de norma $|h|_{L^2}$ suficientemente pequena.

Sob hipóteses mais fortes sobre f, podemos garantir a existência de um *estado fundamental*, conceito introduzido em 3.7.

Corolário 1. *Se que f satisfizer (A), (C) e*

(B') *$sf(x,s) \leq \lambda s^2 + C|s|^{p+1}$, para algum $C > 0$, um $\lambda < \lambda_1$ (ver seção 2.4) e para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$;*
(4.3) possuirá um estado fundamental.

Demonstração. Como (B') implica (B), o teorema acima e sua prova mostram que $I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx$ $(u \in H_0^1(\Omega))$ é de classe C^1, satisfaz (PS) e que o conjunto $S \subset H_0^1(\Omega)$ das soluções $\not\equiv 0$ de (4.3) é não-vazio. Para $v \in S$, vale que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega v f(x,v)dx &= \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\ &= 2I(v) + \int_\Omega F(x,v)dx\end{aligned}$$

Por (C) e pelos argumentos do teorema 23, $sf(x,s) \geq \theta F(x,s) - (\text{const.})$ em toda parte, implicando:

$$\theta \int_\Omega F(x,v)dx \leq 2I(v) - (\text{const.}) \tag{4.8}$$

Agora, (4.4) diz que $u \mapsto \int_\Omega F(x,u)dx$ é limitada inferiormente, o que aplicado a (4.8) indica que $m = \operatorname{Inf}_S I > -\infty$.

Seja (u_k) uma sequência em S tal que $I(u_k) \to m$. Já que $I'(u_k) = 0$, (PS) força a, passando a uma subsequencia se necessário, que (u_k) convirja a um certo u.[5] Resta somente conferir que $u \not\equiv 0$.

De

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle I'(u_k), u_k \right\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx - \int_\Omega u_k f(x,u_k)dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx - \lambda \int_\Omega u_k^2 dx - C\left(\int_\Omega |u_k|^{p+1} dx\right)\end{aligned}$$

as desigualdades de Sobolev e de Poincaré (na sua versão da seção 2.4) asserem que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)|u_k|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq (\text{const.})|u_k|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}$$

de modo que $|u_k| \geq$ (constante positiva) para $k = 1, 2, 3 \ldots$. Passando ao limite, $|u| > 0$ e a conclusão se segue. □

4.6 O teorema do ponto de sela

O próximo e último teorema abstrato deste trabalho foi formulado por Rabinowitz a fim de dar uma prova variacional do teorema 26, que veremos em breve. Ele diz que:

Teorema 24 (Teorema do Ponto de Sela). *Seja $E = M \oplus X$ um espaço de Banach, onde $M \neq \{0\}$ é de dimensão finita. Suponha que $I \in C^1(E)$ satisfaça (PS) e que:*

(i) exista uma constante $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ e um $r > 0$ tais que $I(v) \leq \alpha$ para todo $v \in M$ que cumpra $\|v\| = r$;

[5] Se f fosse ímpar, poderíamos trocar u_k por $|u_k|$ e supor que $u \geq 0$ em quase todo ponto.

(ii) exista uma constante $\beta > \alpha$ tal que $I \geq \beta$ em X.

Então I tem um valor crítico $c \geq \beta$ caracterizado por

$$c = \operatorname*{Inf}_{h\in\Gamma} \operatorname*{Max}_{u\in h(K)} I(u) \tag{4.9}$$

onde Γ é a classe das aplicações contínuas h definidas em $K = \{v \in M; \|v\| \leq r\}$ e tais que $h(v) = v$ se $\|v\| = r$.

Aqui estamos obtendo um valor "minimax" sobre todas "superfícies parametrizadas em K" que possuem o mesmo bordo.

O seguinte lema nos será fundamental:

Lema 4. *Nas notações do teorema, se $f : K \to M$ é contínua e $f(v) = v$ caso $\|v\| = r$, então $f(v') = 0$ para algum $v' \in K$.*

Demonstração. Ponha $\psi : K \to K$ por $\psi = v - f(v)$, se $\|v - f(v)\| \leq r$, e por $\psi(v) = \frac{r}{\|v-f(v)\|}\big(v - f(v)\big)$, caso $\|v - f(v)\| > r$. Logo ψ é uma função contínua definida e a valores em um compacto convexo de um espaço de dimensão finita, de modo que o teorema do ponto fixo de Brouwer (veja, *e.g.*, Kavian [12], Lima [13] e Nirenberg [17]) garante a existência de um $v' \in K$ para o qual $\psi(v') = v'$.

Deve-se obrigatoriamente que $\|v' - f(v')\| \leq r$, pois, do contrário, $\|v'\| = \|\psi(v')\| = r$, o que implicaria que $f(v') = v'$, contradição. Por conseguinte, $v' - f(v') = v'$, provando o lema. □

Demonstração do teorema 24. Denotando por $P \in \mathscr{L}(E)$ a projeção de E em M, o lema garante que, qualquer que seja $h \in \Gamma$, $f = Ph$ se anula em algum ponto v', donde $h(v') \in X$. Consequentemente,

$$\operatorname{Max}\,(I \circ h) \geq I(h(v')) \geq \beta$$

e assim $-\infty < \beta \leq c < +\infty$.

Verifiquemos que c é um valor crítico. Supondo por absurdo que não, escrevendo $\overline{\varepsilon} = \beta - \alpha > 0$, o lema 3 fornece uma deformação η que fixa o nível $[I \leq c - \overline{\varepsilon}] \supset [I \leq \alpha]$ (e portanto deixa Γ invariante) e que leva $[I \leq c + \varepsilon]$ em $[I \leq c - \varepsilon]$, para algum $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$. Assim, se $g \in \Gamma$ for tal que $\operatorname{Max}\,(I \circ g) < c + \varepsilon$, $\overline{g} = \eta \circ g \in \Gamma$ e $\operatorname{Max}\,(I \circ \overline{g}) < c - \varepsilon$, contrariando a (4.9). □

Observação: Pode-se mostrar (vide Rabinowitz [19]) as conclusões do teorema do ponto de sela seriam válidas mesmo se K fosse uma vizinhança limitada da origem (em M), mas não obrigatoriamente "uma bola". Esta prova mais geral depende do celebrado *grau topológico de Brouwer*; referimos a Kavian [12], Nirenberg [17] e Schwartz [24].

4.7 Aplicação: problemas assintoticamente lineares

O teorema 24 é de grande utilidade em problemas *assintoticamente lineares*, *i.e.*, quando a não-linearidade f possui limites $f(x,s)/s$ quando s tende a $-\infty$ e a $+\infty$. A fim de ilustrar isto, consideremos a equação:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda u(x) + p(x, u(x)) \qquad && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ é dado e $p : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é "perturbação" contínua e **limitada** (pertencendo assim à classe $N^0(\Omega)$).

A questão de existência a (4.10) depende *sensivelmente* do valor de λ. Com efeito, mesmo para o caso *linear* em que $p = p(x)$, vale a alternativa de Fredholm: se λ não for autovalor de $(-\Delta)$ (com condição de fronteira de Dirichlet nula) solução existe e é única; se λ for autovalor, só haverá solução se p for ortogonal a toda autofunção de λ. Por esta razão, faz sentido fazer a divisão:

4.7.1 Caso um: λ não é autovalor

Teorema 25. *Sob as condições acima e se λ não for autovalor, (4.10) terá uma solução fraca.*

Demonstração. De novo, provaremos que o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega P(x, u(x))dx \tag{4.11}$$

possui um valor crítico. Como para $\lambda < \lambda_1$ (outra vez, usaremos a notação de 2.4), o resultado é obtido por um argumento de minimização global (vide seção 3.5), assuma que $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ para algum inteiro positivo k.

Definindo M como o subespaço gerado por $e_1, \ldots, e_k$ e $X = M^\perp$ (= fecho do subespaço das combinações lineares de $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots$), basta provarmos as seguintes afirmações

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{|u|\to+\infty \\ u\in M}} I(u) = -\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{|u|\to+\infty \\ u\in X}} I(u) = +\infty$;

(c) I satisfaz (PS);

que mostrará que valem as condições do teorema do ponto de sela. Com efeito, pelos argumentos de semicontinuidade inferior da seção 3.2[6], I é limitada inferiormente em X, restando só tomar $r > 0$ suficientemente grande.

[6] Note que X é fechado em $(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega)^*)$.

A seguinte estimativa será conveniente: se $\varepsilon > 0$ tão pequeno para que $\lambda_k < \lambda - \varepsilon\frac{\lambda_k}{\lambda_1} < \lambda + \varepsilon\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1} < \lambda_{k+1}$, existe um $s_0 > 0$ tal que

$$|p(x,s)| < \varepsilon|s|$$

para $x \in \Omega$ e $|s| > s_0$ e, portanto,

$$|P(x,s)| < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + C$$

em toda parte, onde tomamos $C = \text{Max}_{x\in\overline{\Omega}, -s_0 \le s \le s_0} |P(x,s)|$.

Prova de (a): Se $u \in M$, podemos escrevê-lo como $u \in \sum_{i=1}^{k}(u,e_i)e_i$ (aqui $(\ ,\ )$ será o produto escalar em $L^2(\Omega)$), de modo que

$$\begin{aligned} I(u) &\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2|(u,e_i)|^2 - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{k}|(u,e_i)|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|u|_2^2 + C \cdot (\text{medida de } \Omega) \\ &\le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)|u|^2_{H_0^1(\Omega)} + C \cdot (\text{medida de } \Omega) \\ &\to -\infty \end{aligned}$$

quando $|u| \to +\infty$.

Prova de (b): Agora a soma hilbertiana se reverte: se $u \in X$, então $u \in \sum_{i=k+1}^{\infty}(u,e_i)e_i$ donde

$$\begin{aligned} I(u) &\ge \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i^2|(u,e_i)|^2 - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=k+1}^{\infty}|(u,e_i)|^2 - \frac{\varepsilon}{2}|u|_2^2 + C \cdot (\text{medida de } \Omega) \\ &\ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)|u|^2_{H_0^1(\Omega)} + C \cdot (\text{medida de } \Omega) \\ &\to +\infty \end{aligned}$$

assim que $|u| \to +\infty$.

Prova de (c): Mostremos que toda (u_m) sequência de Palais-Smale é limitada. Se $u_m = u_m^- + u_m^+$, onde $u_m^- \in M$ e $u_m^+ \in X$, a ortogonalidade entre M e X em $L^2(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)$ dão:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle I'(u_m), u_m^\pm \right\rangle\right| &= \left|\int_\Omega \left(\nabla u_m \cdot \nabla u_m^\pm - \lambda u_m u_m^\pm - p(x,u_m)u_m^\pm\right)dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega \left(|\nabla u_m^\pm|^2 - \lambda|u_m^\pm|^2 - p(x,u_m)u_m^\pm\right)dx\right| \end{aligned} \tag{4.12}$$

Como para m suficientemente grande $\|I'(u_m)\| \le 1$ e

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega p(x,u_m)u_m^\pm dx\right| &\le \|p\|_\infty (\text{medida de } \ \Omega)|u_m^\pm|_2 \\ &\le (\text{const.})|u_m^\pm|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

(4.12) permite as desigualdades

$$
\begin{aligned}
|u_m^-| &\geq -\int_\Omega |\nabla u_m^-|^2 dx + \lambda \int_\Omega |u_m^-|^2 dx + \int_\Omega p(x, u_m) u_m^- dx \\
&\geq \left(\frac{\lambda}{\lambda_k} - 1\right) |u_m^-|^2 - (\text{const.}) |u_m^-|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|u_m^+| &\geq \int_\Omega |\nabla u_m^+|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_m^+|^2 dx - \int_\Omega p(x, u_m) u_m^- dx \\
&\geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) |u_m^+|^2 - (\text{const.}) |u_m^+|
\end{aligned}
$$

obrigando a (u_m^-) e (u_m^+), e logo (u_m), a permanecerem limitadas. □

Observação: este teorema poderia ser deduzido por intermédio da teoria de Leray-Schauder; consulte Kavian [12].

4.7.2 Caso dois: λ é autovalor

Aqui se faz necessário supor alguma condição sobre p. Se $\lambda_k < \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+m} = \lambda < \lambda_{k+m+1}$, denotemos por

- E^- o subespaço gerado por $e_1, \ldots, e_k$;
- E^0 o subespaço gerado por $e_{k+1}, \ldots, e_{k+m}$;
- E^+ o fecho do subespaço gerado por $e_{k+m+1}, e_{k+m+2}, e_{k+m+3}, \ldots$.

Teorema 26 (Ahmad-Lazer-Paul)**.** *Nas notações e hipóteses acima, suponha que valha a condição de Ahmad-Lazer-Paul:*

$$
\lim_{\substack{|u| \to \infty \\ u \in E^0}} \int_\Omega P(x, u(x)) dx = +\infty \tag{4.13}
$$

Então (4.10) possuirá uma solução fraca.

Antes a prova, que não difere muito da anterior, convém dar alguns exemplos de (4.13).

Exemplo 7. se $P(x, s) \to +\infty$ uniformemente quando $|s| \to +\infty$, valerá (4.13).

Com efeito, todo u na bola unitária de E^0 é combinação finita de funções em $C^\infty(\overline{\Omega})$ e é $\not\equiv 0$. Assim, usando que E^0 tem dimensão finita e portanto tem sua topologia induzida por qualquer norma, existe uma vizinhança de $U \in u$ na qual toda função $v \in U$ satisfaz $|v| > \delta$ para algum $\delta > 0$ em um aberto não-vazio $\omega \subset \Omega$.

Ademais para todo $M > 0$ existe um $s_0 > 0$ tal que

$$P(x,s) > \left(M + \operatorname*{Inf}_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ s \in \mathbb{R}}} P(x,s) \cdot \left(\text{medida de } \Omega\right)\right) \Big/ (\text{medida de } \omega)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $|s| > s_0$. Por conseguinte, para $t > t_0(U) = s_0/\delta$ e $v \in U$:

$$\int_\Omega P(x, tv(x))dx = \underbrace{\int_\omega P(x, tv(x))dx}_{> M} + \int_{\Omega \backslash \omega} P(x, tv(x))dx$$

Como a bola em E^0 é compacta, a escolha do t_0 acima pode ser feita de maneira a independer de U e, por isso, $\int_\Omega P(x, v(x))dx \to +\infty$ uniformemente.

Exemplo 8. Suponha que p é da forma $p(x,s) = g(s) - h(x)$ e que existam os limites

$$g(-\infty) = \lim_{s \to -\infty} g(s)$$

$$g(+\infty) = \lim_{s \to +\infty} g(s)$$

Neste caso, $P(x,s) = \int_0^s g(\tau)d\tau - sh(x)$, a regra de L'Hospital e o teorema da convergência dominada nos dão que para qualquer $\varphi \not\equiv 0$:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_\Omega P(x, t\varphi)dx = g(+\infty) \int_{[\varphi > 0]} |\varphi| dx - g(-\infty) \int_{[\varphi < 0]} |\varphi| dx - \int_\Omega h\varphi dx$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{1}{t} \int_\Omega P(x, t\varphi)dx = g(-\infty) \int_{[\varphi > 0]} |\varphi| dx - g(+\infty) \int_{[\varphi < 0]} |\varphi| dx - \int_\Omega h\varphi dx$$

Portanto, repetindo os argumentos de compacidade do exemplo anterior, (4.13) é automaticamente satisfeita quando se verificar as chamadas *condições de Landesman-Lazer*:

$$\begin{aligned} g(-\infty) \int_{[\varphi > 0]} |\varphi| dx - g(+\infty) \int_{[\varphi < 0]} |\varphi| dx < \int_\Omega h\varphi dx < \\ g(+\infty) \int_{[\varphi > 0]} |\varphi| dx - g(-\infty) \int_{[\varphi < 0]} |\varphi| dx \end{aligned} \tag{4.14}$$

para qualquer $\varphi \not\equiv 0$ em E^0.

Para criar alguma intuição sobre (4.14), notemos que ela é condição necessária para existência de soluções se supormos também que $g(-\infty) < g(s) < g(\infty)$, $\forall s \in (-\infty, \infty)$. De fato, se u for uma solução fraca de (4.10) e $\varphi \in E^0 \setminus \{0\}$:

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega \big(g(u)\varphi - h\varphi\big) dx$$

destarte

$$\begin{aligned}\int_\Omega h\varphi dx &< g(+\infty)\int_{[\varphi>0]}|\varphi|dx - g(-\infty)\int_{[\varphi<0]}|\varphi|dx\\ \int_\Omega h\varphi dx &> g(-\infty)\int_{[\varphi>0]}|\varphi|dx - g(+\infty)\int_{[\varphi<0]}|\varphi|dx\end{aligned}$$

o que nada mais é que (4.14).

Demonstração do teorema 26. Averiguemos que I dado por (4.11) tem um ponto crítico através do teorema 24 com $M = E^- \oplus E^0$ e $X = E^+$. Como anteriormente, verificaremos que

(a) $\lim\limits_{\substack{|u|\to+\infty\\ u\in M}} I(u) = -\infty$;

(b) $\lim\limits_{\substack{|u|\to+\infty\\ u\in X}} I(u) = +\infty$;

(c) I cumpre (PS).

Prova de (a): Decomponha $u \in H_0^1(\Omega)$ por $u^- + u^0 + u^+$, onde $u^- \in E^-$, $u^0 \in E^0$ e $u^+ \in E^+$. Quando $u \in M$, $u^+ = 0$ e podemos estimar:

$$\begin{aligned}I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega P(x,u)dx\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \lambda)|(u,e_i)|^2 - \int_\Omega \Big(P(x,u) - P(x,u^0)\Big)dx - \int_\Omega P(x,u^0)dx\end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^k \lambda_i |(u,e_i)|^2 = |u^-|^2$ e $|P(x,u(x)) - P(x,u^0(x))| = |\int_{u^0(x)}^{u(x)} p(x,\tau)d\tau| \leq \|p\|_\infty |u^-(x)|$, pode-se escrever pela desigualdade de Schwarz e Poincaré que:

$$\begin{aligned}I(u) &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)|u^-|^2 + (\text{const.})|u^-| - \int_\Omega P(x,u^0)dx\\ &\to -\infty\end{aligned}$$

ao passo que $|u| \to \infty$.

Prova de (b): Procedendo como acima, temos a desigualdade para $u \in X$:

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+m+1}}\right)|u|^2 - (\text{const.})|u| \\
&\to +\infty
\end{aligned}
$$

quando $|u| \to \infty$.

Prova de (c): Seja (u_m) uma sequência de Palais-Smale e seja $C > 0$ tal que $|I(u_m)| \leq C$ para todo $m = 1, 2, 3, \ldots$. Mostremos que ela é limitada. Repetindo a técnica do teorema 25, (u_m^-) e (u_m^+) são limitados. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
C \geq &|I(u_m)| \\
\geq &\bigg| \int_\Omega \Big\{ |\nabla u_m^+|^2 + |\nabla u_m^-|^2 - \lambda((u_m^+)^2 + (u_m^-)^2) \\
&- (P(x, u_m) - P(x, u_m^0)) \Big\} - P(x, u_m^0) dx \bigg|
\end{aligned}
$$

Uma vez que o termo entre chaves é limitado, *a fortiori* $\left(\int_\Omega P(x, u^0) dx \right)$ também o é. À vista disto, a condição de Ahmad-Lazer-Paul impõe a que (u_m^0) não se afaste arbitrariamente da origem, comprovando (PS). □

Alas... how terrible is wisdom when it brings no profit to the wise, Johnny?
(Louis Cyphre, *Angel Heart* (1987))

Bibliografia

[1] Antonio Ambrosetti e Giovanni Prodi. *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[2] Marino Badiale e Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Berlin: Springer Verlag, 2011.

[3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Berlin: Springer Verlag, 2011.

[4] Haim Brezis e Louis Nirenberg. "Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents". Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 36.4 (1983), pp. 437–477.

[5] Thierry Cazenave. *An introduction to semilinear elliptic equations*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2006.

[6] Djairo Guedes de Figueiredo. "A Simplified Proof of the Divergence Theorem". Em: *The American Mathematical Monthly* 71.6 (1964), pp. 619–622.

[7] Djairo Guedes de Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Berlin: Springer Verlag, 1989.

[8] Djairo Guedes de Figueiredo. "Princípio de Dirichlet". Em: *Matemática Universitária* 1.1 (1985), pp. 63–84.

[9] Jean Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis I*. 2ª ed. Nova Iorque: Academic Press, 1969.

[10] David Gilbarg e Neil Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 3ª ed. Berlin: Springer Verlag, 1998.

[11] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differenetial Operators 1*. 2ª ed. Berlin: Springer Verlag, 1990.

[12] Otared Kavian. *Introduction à la Théorie des Points Critiques*. Berlin: Springer Verlag, 1994.

[13] Elon Lages Lima. *Análise Real, volume 3*. 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[14] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[15] Pierre-Louis Lions. "On Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations". Em: *SIAM Review* 24.4 (1982), pp. 441–467.

[16] Jean Mawhin e Michel Willem. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. Berlin: Springer Verlag, 1989.

[17] Louis Nirenberg. *Topics in Nonlinear Functional Analysis*. 2ª ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 2001.

[18] Augusto Ponce. *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[19] Paul H. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Rhode Island: American Mathematical Society, 1986.

[20] Paul H. Rabinowitz. "Variational Methods for Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems". Em: *Indiana University Journal* 23.8 (1974), pp. 729–754.

[21] Mary Ellen Rudin. "A New Proof that Metric Spaces are Paracompact". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 20.2 (1969), p. 603.

[22] Walter Rudin. *Functional Analysis*. 2ª ed. Nova Iorque: McGraw Hill, 1973.

[23] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. 3ª ed. Nova Iorque: McGraw Hill, 1976.

[24] Jacob T. Schwartz. *Nonlinear Functional Analysis*. Nova Iorque: Gordon Breach, 1969.

[25] Michael Struwe. *Variational Methods*. 4ª ed. Berlin: Springer Verlag, 2010.

[26] John Troutman. *Variational Calculus and Optimal Control*. 2ª ed. Berlin: Springer Verlag, 1995.

[27] Michel Willem. *Minimax Theorems*. Quinn-Woodbine: Birkhäuser, 1996.