UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Curso de MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Leonardo Alves Godoy

Jogos cooperativos em redes sociais

São Paulo

2011

Leonardo Alves Godoy

Jogos cooperativos em redes sociais

Monografia apresentada ao Curso de MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL da USP, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL.

Orientador: Pedro Tonelli

Professor Dr.

São Paulo

2011

Godoy, Leonardo Alves

Jogos cooperativos em redes sociais / Leonardo Alves Godoy - 2011

36.p

1.Teoria dos Jogos. I.Título.

CDU 519.83

Leonardo Alves Godoy

Jogos cooperativos em redes sociais

Monografia apresentada ao Curso de MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL da USP, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL.

Aprovado em 13 de dezembro de 2011

BANCA EXAMINADORA

Pedro Tonelli

Professor Dr.

Manuel Valentim Pera Garcia

Professor Dr.

Sérgio Muniz Oliva Filho

Professor Dr.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

Teoria dos jogos é um conjunto de ferramentas matemáticas utilizadas para a análise de situações de conflitos e/ou cooperação onde agentes que devem tomar alguma decisão(chamados nesse caso de *jogadores*) interagem. Essas situações, quando modeladas de forma apropriada matematicamente, podem ser chamadas de *jogos*. Exemplos simples podem ser retirados do mundo real nos casos onde as pessoas devem fazer alguma escolha, seja buscando um proveito individual, ou coletivo. Quando esse jogo se dá de forma em que as pessoas possam se associar, surge o campo de estudos que é chamado de *teoria dos jogos cooperativos*. Na área da economia, por exemplo na competição de empresas por mercado ou na cooperação entre as mesmas por algum objetivo mútuo que considerem interessante, o comportamento delas (vistas como agentes) pode ser analisado utilizando-se das técnicas introduzidas pela teoria dos jogos.

Basicamente pode-se dividir a teoria dos jogos em dois grandes ramos, o de jogos não-cooperativos e o de jogos cooperativos. Na teoria de jogos não-cooperativos os jogadores não podem fazer acordos e se juntar em grupos, ou seja, eles devem agir de maneira individual. Já no caso dos jogos cooperativos os agentes podem se agrupar e a análise se dá sobre a forma como grupos de indivíduos se associam afim de tomar suas decisões.

Uma ideia básica da teoria dos jogos que precisa ser ressaltada é a da *racionalidade* que os agentes, individualmente ou em grupos, devem possuir ao agir. Isso quer dizer que eles devem agir de acordo com seus próprio interesses, seguindo suas preferências de acordo com os resultados que podem vir a ser atingidos através do jogo estudado.

Neste trabalho, primeiramente serão introduzidos os fundamentos dos jogos cooperativos e propriedades para suas soluções. O conceito chamado de *valor de Shapley* (Shapley Value)[1] será apresentado como alternativa de solução para um jogo cooperativo quando o que se busca é algum senso de *justiça* na distribuição dos ganhos para a coalizão formada por todos os participantes do jogo (a chamada *grande coalizão*).

Finalmente a possibilidade de aplicação do valor de Shapley como solução de jogos cooperativos será vista nos casos onde desejamos mensurar o *poder* que um agente possui quando está interagindo com os outros. Para modelar esse problema podemos recorrer à *teoria dos grafos* para tentar moldar uma *rede social* onde um grupo de agentes e suas possíveis interações são representados graficamente através do uso de pontos (chamados de nós) e linhas (chamadas de arestas) que formam uma rede de ligações apropriadas para o problema. O anteriormente citado sentido de justiça inerente ao valor de Shapley pode servir para nos mostrar o quanto determinado agente agrega de valor, ou mesmo o quanto sua presença é importante à rede, dadas as regras intrínsecas à própria construção da rede e propriedades de seus agentes que são utilizadas para mensurar o valor de cada associação possível para o jogo modelado a partir dela.

2 Jogos de coalizão com utilidades transferíveis

Neste capítulo serão apresentados os fundamentos relacionados aos jogos de coalizão nos casos em que existe a possibilidade de transferência de utilidades, os chamados *jogos TU*. Além da definição dos jogos de coalizão, serão definidas algumas de suas propriedades básicas.

2.1 Jogo cooperativo na forma de coalizões

Conforme já dito, um jogo cooperativo é aquele onde os jogadores podem fazer acordos, se unindo, para a distribuição dos pagamentos resultantes do jogo ou para buscar a escolha das estratégias a serem seguidas.

Na notação matemática de teoria dos jogos, costumeiramente, $N = \{1, 2, ..., n\}$ designa um conjunto de jogadores que possui $n = |N|$ elementos.

Nos jogos de coalizão o foco de estudo recai sobre o que grupos de agentes, ao invés de agentes individuais, podem alcançar. Um jogo de coalizão define o quanto cada coalizão de agentes formada pode fazer por si própria.

Na teoria dos jogos, matematicamente falando uma coalizão é definida como um elemento do conjunto das partes de N, ou seja: $S \in \mathcal{P}(N)$ é uma coalizão.

Jogos cooperativos na forma de coalizões são divididos em dois tipos: jogos de coalizão com utilidades transferíveis (jogos TU) e jogos de coalizão sem utilidades transferíveis (jogos NTU).

2.2 Jogos de coalizão com utilidades transferíveis

Seja N um conjunto de jogadores. Um jogo de coalizão com utilidades transferíveis (um jogo TU) em N é uma função que associa a cada subconjunto S de N (uma coalizão, se não vazio), um número real $\nu(S)$, o *valor* de S. Também, por definição, temos que ν atribui o valor zero ao conjunto vazio, assim temos $\nu(\emptyset) = 0$. Se uma coalizão S se forma, então ela pode dividir o seu valor, $\nu(S)$, de qualquer maneira entre seus membros. Isto é, S pode obter algum vetor de payoff $x \in \mathbb{R}^S$ que satisfaça

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \nu(S)$$

Definição 2.2.1 (Jogo de coalizão com utilidade transferível)**.** Um jogo de coalizão com utilidade transferível (também chamado de jogo TU) é um par $\langle N, \nu \rangle$ onde

- N é um conjunto de jogadores, indexados por i, e
- $\nu : S \in \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que associa um valor real $\nu(S)$ a cada coalizão $S \in \mathcal{P}(N)$ que pode ser dividido entre os membros de S. A função ν é também conhecida como função característica, e o payoff de uma coalizão é também chamado de o seu *valor*.
- É assumido que $\nu(\emptyset) = 0$

A coalizão formada por todos os elementos de N é chamada de *grande coalizão* e a notação para designá-la é N.

2.3 Propriedades de jogos cooperativos

Definição 2.3.1. Um jogo é *superaditivo* se

$$S, T \subseteq N \text{ e } S \cap T = \emptyset \Rightarrow \nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T)$$

A superaditividade pode ser justificada com o argumento de que as coalizões podem sempre trabalhar sem *interferir* uma com o valor da outra negativamente, assim, o valor de duas coalizões não será menos do que o valor da soma do valor de seus indivíduos. Nota-se que a superaditividade implica que o valor da grande coalizão não é menos do que a soma dos valores de qualquer conjunto de coalizões *disjuntas*. Em outras palavras, a grande coalizão tem o mais alto payoff entre todas as estruturas de coalizões possíveis em um dado jogo que seja superaditivo.

Considerando essa *não interferência* entre o que ocorre com as coalizões ao máximo, ou seja quando coalizões nunca podem afetar umas as outras, ou positivamente ou negativamente, então temos os chamados jogos aditivos (ou inessenciais), conforme a seguinte definição:

Definição 2.3.2. Um jogo $\langle N, \nu \rangle$ é *inessencial* (ou *aditivo*) se $\nu(S) = \sum_{i \in S} \nu(\{i\})$ para qualquer $S \subseteq N$.

Considere dois jogos ν e μ na forma de função característica. Supondo que o número de jogadores é o mesmo para ambos os jogos, é possível saber se esses jogos podem ser os mesmos em sua essência. Por exemplo, caso mudemos apenas a *unidade* de payoff de um jogo para o outro, o jogo ainda é o mesmo, e estamos apenas multiplicando uma constante positiva à função característica. Outra modificação possível é a de cada jogador i receber um adicional fixo β_i, o qual não sofre uma interferência do modo como um agente participa do jogo. Como os jogadores não podem fazer nada para alterar esse valor β_i, o jogo pode ser avaliado de forma que estes valores não estejam presentes. Esses são os chamados jogos estrategicamente equivalentes:

Definição 2.3.3 (Jogos estrategicamente equivalentes)**.** Dois jogos $\langle N, \nu \rangle$ e $\langle N, \mu \rangle$ são *estrategicamente equivalentes* se existem $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}^N$ tais que $\mu(S) = \alpha\nu(S) + \beta(S)$ para todo $S \subseteq N$.

Outra definição que podemos deixar é a de jogos zero-normalizado:

Definição 2.3.4 (Jogo zero-normalizado)**.** Um jogo $\langle N, \nu \rangle$ é *zero-normalizado* (0-normalizado) se $\nu(i) = 0$ para todo $i \in N$.

Das definições acima podemos concluir que cada jogo é equivalente à um 0-normalizado.

Exemplo 2.3.1 (Divisão de orçamento)**.** Uma empresa deseja investir em sua imagem e tem orçamento total disponível E para dividir entre diferentes meios de comunicação. Esse orçamento deve ser gerido por diversas equipes da empresa, cada qual responsável por um meio, sendo que cada equipe $i \in N = \{1, 2, 3\}$ deseja receber uma quantia c_i, porém essa quantia é tal que $\sum_{i \in N} c_i \geqslant E$. Uma maneira de encontrar um modo justo e satisfatório de repartir o valor total entre os meios de comunicação é modelando um jogo de coalizão. Cada meio pode receber o equivalente à diferença entre o total E e o valor requisitado pelos outras equipes para seu respectivo meio. No caso de uma coalizão entre os meios (investimento em conjunto) teríamos da diferença entre montante E e o valor requisitado pelas equipes externas à coalizão. Portanto a função característica fica definida como:

$$\nu(\{S\}) = E - \sum_{i \in N \setminus \{S\}} c_i$$

A partir do exemplo acima podemos chegar à um exemplo numérico:

Exemplo 2.3.2 (Divisão de orçamento entre três requisitantes)**.** Usando o exemplo anterior pode-se extrair uma aplicação numérica onde $N = \{1, 2, 3\}$ e $c_1 = 100$, $c_2 = 75$, $c_3 = 90$ e $E = 200 < \sum_{i \in N} c_i$. Os valores da função característica estão na tabela abaixo:

Tabela 2.1: Valores para a função característica do exemplo 2.3.1

$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{\nu(S)}$
$\emptyset$	0
$\{1\}$	35
$\{2\}$	10
$\{3\}$	25
$\{1, 2\}$	110
$\{1, 3\}$	125
$\{2, 3\}$	100
$\{1, 2, 3\}$	200

3 Conceitos de solução

Nesta parte serão apresentados alguns conceitos que devem servir de base para os mais diversos tipos de solução de jogos cooperativos. Além dessas propriedades de solução, são apresentados os conceitos de *conjunto de imputação* e de *núcleo*(core) de um jogo cooperativo.

3.1 Conjunto de pagamentos factíveis

Dado um conjunto de jogadores N e um jogo $\langle N, \nu \rangle$. Denota-se

$$X^*\langle N, \nu \rangle = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) \leq \nu(N)\}.$$

como o conjunto de pagamentos *factíveis* para o jogo $\langle N, \nu \rangle$, ou seja, esse conjunto contém todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ com valores que são possíveis de serem oferecidos aos jogadores, dado o limite máximo do valor disponível total para a grande coalizão.

Denota-se G^n como o conjunto de todas as funções características ν de um jogo $\langle N, \nu \rangle$. Também dizemos que existe um mapa $f : G^n \to \mathbb{R}^n$ que representa a solução para os jogos.

3.2 Conjunto de permutações

O conjunto de permutações de N é denotado por $\Pi(N)$. Uma permutação é uma ordem dada aos elementos do conjunto N Assim, cada permutação $\sigma \in \Pi(N)$, definida por $\sigma : N \to N$ tem uma ordem $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$. Finalmente $\sigma^{-}1(k)$ nos dá a posição em que se encontra o jogador k na permutação σ.

3.3 Propriedades de soluções

Existem algumas propriedades que são desejáveis para possíveis *soluções* de um jogo cooperativo, como Tijs citou em seu livro[2] a partir de agora veremos algumas dessas propriedades:

Se um jogador não recebe um pagamentos menor do que ele conseguiria sozinho, temos a seguinte propriedade:

Definição 3.3.1 (Racionalidade Individual)**.** Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é racional individual se $x_i \geq \nu(\{i\})$

A propriedade a seguir acontece se dado um pagamentos nenhum jogador fosse prejudicado diante da melhora do pagamentos dos outros.

Definição 3.3.2 (Ótimo de pareto)**.** Um pagamento da região de pagamentos factíveis x é ótimo de pareto (eficiente) se $\sum_{i=1}^{n} x_i = \nu(N)$

Se um jogador i contribui para qualquer coalizão com o valor que ele é capaz de receber sozinho, dizemos que ele é um "dummy player". Isso significa que, para todo S tal que $i \notin S$, temos $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) = \nu(\{i\})$. Esse axioma estabelece que um jogador com a propriedade nele descrita deve receber um pagamento idêntico ao total que ele receberia sozinho.

Definição 3.3.3 (Dummy Player)**.** f tem a propriedade de "Dummy player"se $f_i(\nu) = \nu(i)$ para todo $\nu \in G^n$ e todos "dummy players"i em ν, isto é jogadores $i \in N$ tais que $\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S) + \nu(i)$ para todo S $\in \mathcal{P}(N) \setminus i$.

Também deve-se considerar que o *nome da posição* do jogador é irrelevante para a avaliação de sua posição no jogo, ou seja, a avaliação de sua posição é apenas baseada no valores que ele gera, não em possíveis informações *pessoais.*

Definição 3.3.4 (Anonimato)**.** f tem a propriedade do anonimato se $f(\nu^\sigma) = \sigma^*(f(\nu))$ para todo $\sigma \in \Pi(N)$, onde ν^σ é o jogo com:

$$\nu^\sigma(\sigma(U)) = \nu(U) \text{ para todo } U \in \mathcal{P} \text{ ou}$$

$$\nu^\sigma(S) = \nu(\sigma^{-1}(S)) \text{ para todo } S \in \mathcal{P}$$

e $\sigma^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tem como definição: $(\sigma^*(x))_{\sigma(k)} = x_k$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in N$.

Agora, considerando dois jogos de coalizão distintos, cada qual com sua própria função característica, digamos ν e ω, mas contando com o mesmo conjunto de jogadores N. O axioma a seguir diz que se definirmos um novo jogo no qual cada coalizão S recebe um pagamentos $\nu + \omega$, os pagamentos dos agentes em cada coalizão devem ser a soma dos pagamentos que eles poderiam receber para esta coalizão sob os dois jogos separadamente.

Definição 3.3.5 (Aditividade)**.** f é uma solução aditiva se $f(\nu + \omega) = f(\nu) + f(\omega)$ para todo $\nu, \omega \in G^n$

3.4 Conjunto de imputação

Sob uma imputação, cada agente deve ter garantido um pagamentos de pelo menos o total que ele poderia alcançar ao formar uma coalizão simples.

Seja $\langle N, \nu \rangle$ um jogo de n-pessoas. Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é chamado de vetor de imputação se:

I. x é racional individualmente;

II. x é ótimo de pareto.

Assim podemos definir o cojunto de imputação de $\langle N, \nu \rangle$, $I(\langle N, \nu \rangle)$ como:

$$I(\langle N, \nu \rangle) = \{x \in X((\langle N, \nu \rangle)) \mid x_i \geq \nu(i)\} \text{ para todo } i \in N.$$

Mais simplificadamente podemos utilizar a notação $I(\nu)$ para representar o conjunto de imputação de $\langle N, \nu \rangle$.

Pode-se dizer que se $x \in I(\nu)$ é a distribuição de pagamentos para os membros da grande coalizão N onde o cada jogador i recebe um pagamento de valor x_i, valor esse que deve se ao menos o valor que o jogador receberia sozinho e a soma total dessa distribuição é o valor disponível para a grande coalizão $\nu(N)$.

Em um jogo aditivo $I(\nu)$ é formado pelos pontos $\{\nu(1), \nu(2), ..., \nu(n)\}$

3.5 Núcleo

O núcleo é um conceito de solução para jogos de coalizão que requer que nenhum conjunto de jogadores seja capaz de romper e ter um retorno melhor. A ideia por trás do núcleo é que um resultado é estável se nenhuma mudança é lucrativa para os jogadores.

Então num jogo de coalizões TU a condição de estabilidade é que nenhuma coalizão pode obter um pagamentos que excede a soma dos pagamentos de seus membros.

Definição 3.5.1. O núcleo de um jogo $\langle N, \nu \rangle$, representado como $\mathcal{C}(\langle N, \nu \rangle)$, é definido por

$$\mathcal{C}(\langle N, \nu \rangle) = \{x \in X^*(\mathcal{C}(\langle N, \nu \rangle)) \mid x(S) \geq \nu(S) \text{ para todo } S \subseteq N\}.$$

Assim, um pagamentos está no *núcleo* se e somente se nenhuma sub-coalizão tenha algum incentivo para deixar de fazer parte da grande coalizão. Isto é, ele requer que a soma dos pagamentos para qualquer grupo de agentes $S \cup N$ deve ser ao menos tanto quanto o total que estes agentes poderiam compartilhar entre eles próprios se eles formassem sua própria coalizão. Vale salientar que a definição acima implica que os vetores de pagamentos que estão no núcleo também devem ser imputações.

A seguir encontramos o conjunto de imputação do exemplo 2.3.1 de divisão de orçamento.

Exemplo 3.5.1 (Conjunto de imputação para o exemplo 2.3.1 de divisão de orçamento)**.**

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200$$
$$x_1 \geq 35$$
$$x_2 \geq 10$$
$$x_3 \geq 25$$

Agora veremos a aplicação do núcleo ao exemplo 2.3.1 de divisão de orçamento.

Exemplo 3.5.2 (Núcleo do exemplo 2.3.1 de divisão de orçamento)**.**

$$x_1 \geq 35$$
$$x_2 \geq 10$$
$$x_3 \geq 25$$
$$x_1 + x_2 \geq 110$$
$$x_1 + x_3 \geq 125$$
$$x_2 + x_3 \geq 100$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 200$$

4 Valor de Shapley

Possivelmente a melhor resposta para a questão de como os pagamentos devem ser repartidos entre os agentes é que essa divisão deve seguir algum senso de justiça. O valor de Shapley surge como uma alternativa para essa divisão, ele é a única solução que satisfaz os axiomas de ótimo de pareto, aditividade, propriedade do jogador "nulo"e do tratamento igualitário. Esses axiomas acabam por descrever o que significa justiça em nosso contexto de estudos. O valor de Shapley associa a cada jogo de n-pessoas um vetor de pagamento em $\mathbb{R}^n$

4.1 Definição do valor de Shapley

Para a construção do valor de Shapley primeiramente vamos introduzir a noção de vetor de pagamentos marginais.

O chamado vetor de pagamentos marginais tem sua notação dada por $m^\sigma(\nu)$. Cada jogador dá sua contribuição marginal ao entrar na ordem dada por σ. A ideia por trás dos vetores de pagamentos marginais é mostrada abaixo:

$$
\begin{aligned}
m^\sigma_{\sigma(1)}(\nu) &= \nu(\{\sigma(1)\}) \\
m^\sigma_{\sigma(2)}(\nu) &= \nu(\{\sigma(1), \sigma(2)\}) - \nu(\{\sigma(1)\}) \\
&\vdots \\
m^\sigma_{\sigma(k)}(\nu) &= \nu(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\}) - \nu(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k-1)\})
\end{aligned}
$$

para cada $k \in N$, $m^\sigma_{\sigma(k)}(\nu)$ é a diferença de pagamento devido à coalizão formada até a entrada, na ordem dada pela permutação σ, de $\sigma(k)$ e o pagamento devido a coalizão em que se exclui $\sigma(k)$, ou seja, é o quanto $\sigma(k)$ contribui ao entrar na coalizão.

Para uma notação mais clara usaremos a notação do *conjunto de predecessores* de i na permutação σ como:

$$P_\sigma(i) = \{r \in N \mid \sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(i)\}$$

Então temos:

$m^{\sigma}_{\sigma(k)} = \nu(P_{\sigma}(\sigma(k)) \cup \{\sigma(k)\}) - \nu(P_{\sigma}(\sigma(k)))$

ou, fazendo $i = \sigma(k)$, temos:

$m^{\sigma}_{i} = \nu(P_{\sigma}(i) \cup \{i\}) - \nu(P_{\sigma}(i))$

Finalmente, podemos de maneira resumida observar que a interpretação da expressão que nos dá o valor de Shapley pode ser vista como que se pegando a "contribuição marginal média"do agente i, onde fazemos a média sobre todas as diferentes sequências (permutações) de acordo com a qual a grande coalizão poderia ser construída a partir da coalizão vazia. Mais especificamente, imagine que a coalizão é montada iniciando com o conjunto vazio e adicionando um agente por vez, com o agente a ser adicionado escolhido de maneira uniformemente aleatória. Dentro de qualquer sequência de adições, buscar pela contribuição marginal do agente i no momento em que ele é adicionado. Se ele é adicionado ao conjunto S, sua contribuição é $[\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)]$. Agora multiplique esta quantidade por $|S|!$ diferentes modos que o conjunto S poderia ter sido formado anteriormente à adição do agente i e por $(|N| - |S| - 1)!$ modos diferentes os agentes restantes poderiam ter sido adicionados mais tarde. Finalmente, some todas os possíveis conjuntos S e obtenha uma média ao dividir por $|N|!$, o número total de possíveis ordens para todos os agentes.

Exemplo 4.1.1 (Divisão de orçamento)**.** Conforme o Exemplo 2.3.1, os valores para os vetores marginais podem ser calculados

Todos os valores estão na tabela 4.1 a seguir.

Tabela 4.1: Vetores Marginais

$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{m^{\sigma}_1}$	$\boldsymbol{m^{\sigma}_2}$	$\boldsymbol{m^{\sigma}_3}$
123	35	75	90
132	35	75	90
213	100	10	90
231	100	10	90
312	100	75	25
321	100	75	25

Agora podemos finalmente definir o Valor de Shapley:

Definição 4.1.1 (Valor de Shapley[1])**.** O valor de Shapley de um jogo $\langle N, \nu \rangle$ é a média dos vetores marginais do jogo, ou seja:

$$\phi(\nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m^{\sigma}(\nu)$$

Outra maneira de se escrever o Valor de Shapley é:

$$\phi_i(\nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} \nu(P_{\sigma(i)} \cup \{i\}) - \nu(P_{\sigma}(i))$$

Se tomarmos um subconjunto S de N que não contenha o jogador i temos um número $|S|!(n-1-|S|)!$ de permutações com os elementos de S antes do elemento i e os elementos $N \setminus (S \cup \{i\})$ após i. Assim o número de permutações de S é $|S|!$ e $(n-1-|S|)!$ o de $N \setminus (S \cup \{i\})$ nos dá o total citado de permutações em que $P_{\sigma}(i) = S$. Desta forma podemos reescrever a expressão acima como:

$$\phi_i(\nu) = \sum_{S | i \notin S} |S|! \frac{(n-1-|S|)!}{n!} (\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S))$$

Finalmente chegamos ao seguinte teorema:

Teorema 4.1.1 (Shapley (1953)[1]). *Há apenas uma única solução $f : G^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz as propriedades de aditividade (Definição 3.3.5), eficiência (Definição 3.3.2), Dummy Player (Definição 3.3.3) e anonimato(Definição 3.3.4). Esta solução é o valor de Shapley.*

O significado das propriedades do valor de Shapley dados no Teorema são os seguintes:

I. Aditividade: A solução para a soma de dois jogos TU devem ser a soma do que se ganha em cada um dos dois jogos para cada coalizão.

II. Eficiência: A soma dos pagamentos individuais devem totalizar $\nu(N)$, ou seja, todo valor da grande coalizão deve ser alocado. Falando de uma maneira mais humana, os jogadores querem dividir entre eles tudo que podem conseguir juntos ($\nu(N)$).

III. Dummy Player: Se o jogador i recebe um valor na solução $f_i(v)$ exatamente igual ao seu valor devido na função característica, significa que ele ao se juntar à uma coalizão S já formada o valor somado à nova coalizão é exatamente o valor recebido pelo jogador i individualmente.

IV. Anonimato: A alocação dos resultados deve ser imune à permutações.

A seguir veremos o cálculo do valor de Shapley para o exemplo 2.3.1.

Exemplo 4.1.2 (Valor de Shapley para o exemplo 2.3.1)**.** O valor de Shapley para o exemplo anteriormente explorado pode então ser facilmente calculado:

$$\phi_1 = 78.33$$

$$\phi_2 = 53.33$$

$$\phi_3 = 68.33$$

5 Redes sociais, centralidade e poder dos agentes

Seguindo a linha de pensamento de Jackson [10], pode-se imaginar uma rede social como uma estrutura formada por indivíduos ou organizações que estão ligados por algum tipo de interdependência como, por exemplo, amizade, vínculo familiar, colaboração, influência de ideias etc. Exemplos práticos desses tipos de vínculos podem ser observados nas redes sociais de internet, como o facebook e o orkut. Entretanto, esse conceito pode ser utilizado para analisar relações interpessoais no mundo "real", como no caso de pessoas que convivem em uma comunidade, igreja, sindicatos, ou seja, basicamente qualquer lugar onde exista uma *interação* entre elas, ou mesmo entre elas e organizações ou grupos de pessoas com determinada característica que os tornem homogêneos, mesmo entre organizações e grupos pode existir alguma interação ou ligação. Esses organizações podem ser empresas e os grupos podem ser formados por pessoas que reúnam alguma característica comum - como status social, religião, preferência política etc).

Uma forma de representar essas redes sociais é através do uso de *grafos*, que graficamente apresentam linhas, chamadas de *arestas*, ligando pontos, que são chamados de *nós*. Nesse caso os nós representam as pessoas ou organizações e as arestas ligando dois nós distintos indicam a forma de interação entre eles. Através desse modelo surgem maneiras de se avaliar como se dão essa interações entre nós, quais podem ser os nós mais influentes, como ocorre a difusão de informação através de uma rede etc.

Conforme dito no parágrafo anterior, uma rede social pode ser modelada como um grafo, o qual mostra as possíveis ligações diretas e indiretas (onde nós intermediários formam um *caminho* que liga os nós *terminais*) entre os nós (indivíduos). Para avaliar qual a importância de cada jogador dentro da rede, ou mesmo quais pontos onde as interações são mais acentuadas, um jogo cooperativo na forma de função característica pode ser utilizado.

Existem duas maneiras mais usuais de se modelar uma rede social afim de ser avaliada através do uso de jogos cooperativos. Em uma delas, introduzida por Myerson em 1977 [3], é estudado como num dado jogo $\langle \nu, N \rangle$ as restrições de comunicação dos agentes de N em uma rede - que representa os jogadores e suas ligações - podem caracterizar a importância de um determinado agente no jogo. A outra forma utiliza diretamente a própria definição da rede para gerar a função característica ν que determina o valor das coalizões do jogo [4]. Essa última forma sera apresentada como exemplo final deste trabalho.

5.1 Noções de teoria dos grafos

Um grafo indireto é um par ordenado (N, Γ), onde N é o conjunto finito de *nós* (também chamados de vértices) e $\Gamma \subseteq \{\{i,j\} \mid i,j \in N, i \neq j\}$ é um conjunto de pares não ordenados de diferentes nós chamados de *arestas*. Assim nós denotamos uma aresta entre dois nós i e j simplesmente como $\{i,j\}$ e para cada $\{i,j\} \in \Gamma$, os nós i e j são chamados de adjacentes (ou vizinhos) e incidentes na aresta $\{i,j\}$. De agora em diante vamos supor que $N = \{1, 2, ..., n\}$ e denotamos por $G(N)$ o conjunto de todos os grafos com estes n vértices.

Um *caminho* entre dois nós é uma série de arestas que ligam os dois nós de modo que cada aresta e sua aresta seguinte tenham um nó em comum. Dois nós $i, j \in N$ são *conexos* no grafo (N, Γ) se existe um caminho $(i_1, ..., i_k)$ com $i_1 = i$ e $i_k = j$. Um grafo (N, Γ) é *conexo* quando, para qualquer par de nós, existe um caminho entre ambos. Para algum $S \subseteq N$, o grafo (S, Γ_S) com $\Gamma_S = \{\{i,j\} \in \Gamma \mid i,j \in S\}$ é chamado um *subgrafo* de (N, Γ). Para um dado grafo (N, Γ), um conjunto de nós S é um *subconjunto conexo* de N quando o subgrafo (S, Γ_S) é conexo.

5.2 Redes sociais

Das noções que vimos acima chegamos ao fato de que uma rede social pode ser definida através de um grafo (N, Γ), onde $N = \{1, 2, ..., n\}$ é um conjunto finito de indivíduos (nós) e Γ é uma coleção de pares (não ordenados) $\{i,j\}$ de elementos de N, as chamadas *arestas* que apresentam as possíveis ligações diretas entre dois agentes, ou seja, indivíduos i e j estão ligados diretamente se e somente se $\{i,j\} \in \Gamma$. Se i não pode se comunicar diretamente com j, pode ainda ser possível para eles se comunicarem de maneira indireta se há algum k (um intermediário) com o qual ambos podem se comunicar, ou mais amplamente, uma sequência de intermediários através dos quais eles podem se comunicar, ou seja se existe um *caminho* entre os dois nós.

5.2.1 Centralidade e poder

Considerando as possíveis ligações de uma rede social, *centralidade* é um conceito com diversas definições, mas sem nenhuma que torne o conceito definitivo. Por exemplo, conforme apresentado por Gomez [5] podemos dizer que um indivíduo i é o elemento central em um grafo se:

- i pode se comunicar diretamente com muitos outros nós, ou
- i está próximo de diversos nós, ou
- há muitos pares de nós que precisam, e podem, usar i como intermediário em suas comunicações.

Observando a rede representada na figura 5.2.1, chamada de *estrela*, podemos através de uma rápida análise visual chegar a conclusão de que o nó marcado com o número 1 é o que possui maior centralidade, pois ele está ligado a todos os outros e também os nós restantes só conseguem se comunicar passando por ele. Partindo destes

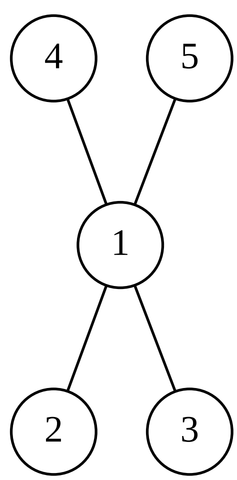

Figura 5.1: Estrela

pressupostos podemos encontrar diversos conceitos de centralidade que são aplicados às redes sociais, alguns deles são [5]:

I. *Grau de centralidade*: Essa ideia relaciona a centralidade com o grau de um nó, isto é, o número de arestas que incidem naquele nó.

II. *Centralidade por proximidade*: Um motivo que pode tornar um nó mais poderoso é se ele estiver mais próximo à uma quantidade maior de nós do que o restante dos nós da rede. Essa abordagem considera a soma da *distância* entre um dado nó e os restantes como uma medida de centralidade no sentido que, quanto menor é essa soma, maior é a centralidade.

III. *Centralidade intermediária*: Esse é o conceito que considera o quanto um nó é usado como intermediário nos caminhos possíveis em uma dada rede. Nesta abordagem todos caminhos possíveis entre pares de nós são considerados. A medida de centralidade de um nó é então obtida contando-se o número de caminhos dos quais ele faz parte.

Naturalmente com a diversidade de opções para se tomar a medida da centralidade de um nó, cada uma deve ter suas vantagens e desvantagens.

Pensando agora sobre o *poder* que um agente possui em uma rede social, parece complicado também se chegar à uma definição conclusiva sobre o que seria exatamente esse poder. A interpretação do poder de um agente em uma rede social pode depender de uma série de características intrínsecas à rede especificamente estudada, assim é difícil se chegar à um conceito genérico sobre poder que seja aplicável à qualquer rede. Finalmente a ideia de *centralidade* de um agente na rede sempre foi considerada relacionada ao *poder* que o agente exerce sobre a rede.

5.3 Abordagem por jogos cooperativos

Lembramos primeiramente que, conforme dito anteriormente, uma rede social (N, Γ) é conexa se é possível juntar quaisquer dois nós i e j de N através de uma sequência de arestas de Γ. Diremos que um subconjunto S de N é conexo em (N, Γ) se (S, Γ_S) é conexo, onde Γ_S é o conjunto daqueles pares $\{i, j\} \in \Gamma$ onde ambos, i e j são elementos de S.

5.3.1 Jogos de conectividade

Aqui nós vamos fazer o valor ν para cada coalizão possível de um dado jogo $\langle \nu, N \rangle$ ser definido pela própria estrutura de rede dada pelo jogo e, quando for o caso, também por alguma informação adicional a ser agregada sobre os participantes da rede ou suas ligações. Para definir isso seguimos a seguinte ideia, dado um subgrafo Γ_S que consiste dos jogadores da coalizão S e suas ligações definidas no conjunto Γ conforme descrito anteriormente, se os jogadores de S são capazes de se *comunicar* diretamente ou indiretamente, ou seja o subgrafo Γ_S é conexo, deve ser atribuído um valor, a ser calculado de acordo com as regras do modelo proposto, para essa coalizão. Caso nem todos os jogadores de S sejam capazes de se comunicar o subgrafo é desconexo e é atribuído o valor 0 para a coalizão S. Uma coalizão que conta apenas com um único agente recebe o valor 0 por definição.

Assim, seguindo a ideia de Gimenez [4], chamaremos de *jogo de conectividade simples* o jogo definido da seguinte forma:

Definição 5.3.1 (Jogo de conectividade simples [4])**.** Dado um grafo (N, Γ) um jogo de conectividade simples ν_Γ, associado ao grafo Γ, é definido pela função característica

$$\nu_\Gamma(S) = \begin{cases} 1, & \text{se } S \subseteq N \text{ é conexo por } \Gamma \text{ e } |S| > 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Explicando melhor a definição acima, podemos dizer que o valor 1 é associado ao sucesso e o valor 0 à falha na conexão de todos os membros do subconjunto S de nós e suas ligações em Γ_S. Se Γ é um grafo conexo, então $\nu_\Gamma(N) = 1$. O valor $\nu_\Gamma(i) = 0, \forall i \in N$ nos diz que elementos *isolados* não são capazes de se comunicar com nenhum outro e, deste modo, não há sucesso na conexão.

O valor de Shapley ϕ definido no capítulo4 é uma solução para o jogo cooperativo e representa um método para medir a força da participação dos jogadores no jogo. A ideia das contribuições marginais de um jogador para as diversas coalizoes formadas usada para se computar o valor de Shapley pode ser usada como justificativa para que o valor de Shapley seja a medida de poder desse jogador na rede, ou seja pode-se usar o valor de Shapley como forma de se saber o quanto um agente em média agrega de valor ao entrar nas coalizões. Assim sendo, o cálculo da média ponderada das contribuições marginais resulta em um *ranking* dos jogadores presentes na rede, que nos dá o mais influente como o de maior valor de Shapley. Um jogador que em média contribui mais do que um outro quando entra em uma coalizão, terá mais poder e assim terá um papel mais importante na rede.

Conforme já mencionado, além das posições estruturais dos indivíduos na rede nos poderíamos também modelar informações adicionais que estão disponíveis a respeito dos agentes e seus relacionamentos. Por exemplo, a quantidade de comunicação estabelecida entre dois agentes pode ser usada para modificar o valor das coalizões que esses jogadores fazem parte, ou mesmo algum atributo diretamente atrelado à cada jogador propriamente. Um *jogo de conectividade ponderada* ν_{Γ}^{p} permite a modelagem de estrutura de rede com informações adicionais, desde que propriamente anexadas ao modelo.

A seguir será apresentado um exemplo utilizando a ideia de jogo de conectividade simples introduzida acima.

Exemplo 5.3.1. Suponhamos que há um grupo de quatro pessoas conversando. Cada uma dessas pessoas fala sua língua nativa e pode ou não falar mais algum idioma adicional, conforme mostra a tabela 5.1. Nesse caso cada par de pessoas pode se comunicar diretamente apenas se eles falarem uma língua em comum. Afim de sabermos qual a *pessoa* mais *importante* nesse grupo, podemos usar os *jogos de conectividade simples* para modelar o problema e medir o quanto essa pessoa é decisiva para se manter a comunicação dentro do grupo. No nosso modelo, apresentado através de um grafo, uma pessoa é representada por um nó da rede e uma aresta indica que os dois agentes ligados por ela são capazes de se comunicar, ou seja eles falam ao menos uma língua em comum. Temos então a partir disso o grafo da figura 5.2, que mostra todas as possíveis ligações indicando quem pode conversar com quem diretamente.

Tabela 5.1: Agentes e idiomas dominados por cada um.

Agente	**Língua nativa**	**Língua Secundária**
1	Alemão	Inglês
2	Inglês	
3	Francês	Alemão
4	Inglês	Francês

Agora, com o grafo em mãos, é possível se chegar aos valores atribuídos pela função característica deste jogo. Assim, pela definição de jogos de conectividade temos

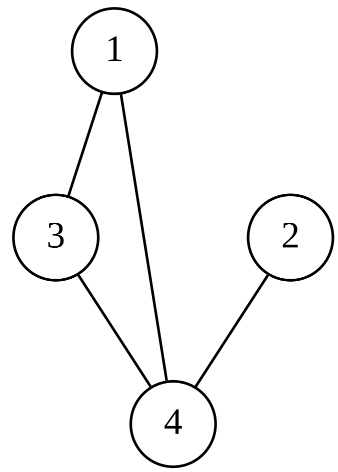

Figura 5.2: Grafo com as possíveis ligações dadas as possibilidades de comunicação entre agentes que falam uma língua em comum.

$\nu(\emptyset) = 0$ e $\nu(i) = 0$ para qualquer agente i em N, pois um único agente não é capaz de formar um canal de comunicação. Seguindo com o conceito de jogo de conectividade simples temos que para cada coalizão S de N que forma um subgrafo conexo de Γ, teremos $\nu(S) = 1$ e caso contrário o valor atribuído à $\nu(S)$ é 0. Em nosso exemplo, se tomarmos a coalizão $\{1, 2, 3\}$, vemos que não há comunicação entre todos os nos, e portanto $\nu(\{1, 2, 3\}) = 0$, já se a coalização tomada for $\{1, 2, 4\}$ temos o resultado $\nu(\{1, 2, 4\}) = 1$, pois essa coalização é conexa. Todos os valores para a função característica do exemplo estão na tabela 5.2.

É notado que pelos valores apresentados na tabela 5.2, este jogo não é superaditivo, pois $\nu(\{1, 2, 3\}) < \nu(\{1, 2\}) + \nu(\{3\})$. Com os valores da função característica encontramos os valores marginais, como definido no capítulo 4, os quais são apresentados na tabela 5.3.

Finalmente usando a fórmula em 4.1.1 chegamos ao valor de Shapley para cada jogador. Esses valores são apresentados na tabela 5.4.

Agora vamos alterar os jogos de conectividade simples de forma que seja possível adicionar alguma informação a mais sobre os relacionamentos de cada par de nós ligados por uma aresta no grafo. Para isso serão atribuídos pesos às arestas dos grafos, exceto quando elas não existirem e por definição o valor ficará como 0. Além disso esse jogo atribuirá à função característica ν para cada coalizão $S \in N$ o valor resultante da soma de cada peso f_{ij} associado à cada aresta existente no subgrafo Γ_S, ainda que este

Tabela 5.2: Valores da função característica

$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{\nu(S)}$
1	0
2	0
3	0
4	0
12	0
13	1
14	1
23	0
24	1
34	1
123	0
124	1
134	1
234	1
1234	1

Tabela 5.3: Vetores Marginais

$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{m_1^\sigma}$	$\boldsymbol{m_2^\sigma}$	$\boldsymbol{m_3^\sigma}$	$\boldsymbol{m_4^\sigma}$
1234	0	0	0	1
1243	0	0	0	1
1324	0	-1	1	1
1342	0	0	1	0
1423	0	0	0	1
1432	0	0	0	1
2134	0	0	0	1
2143	0	0	0	1
2314	0	0	0	1
2341	0	0	0	1
2413	0	0	0	1
2431	0	0	0	1
3124	1	-1	0	1
3142	1	0	0	0
3214	0	0	0	1
3241	0	0	0	1
3412	0	0	0	1
3421	0	0	0	1
4123	1	0	0	0
4132	1	0	0	0
4213	0	1	0	0
4231	0	1	0	0
4312	0	0	1	0
4321	0	0	1	0

Tabela 5.4: Valor de Shapley calculado para o exemplo

$\boldsymbol{\phi_1}$	$\boldsymbol{\phi_2}$	$\boldsymbol{\phi_3}$	$\boldsymbol{\phi_4}$
4/24	0/24	16/24	4/24

não seja conexo.

Assim chamaremos de *jogo de conectividade com ponderação* o jogo definido da seguinte forma:

Definição 5.3.2 (Jogo de conectividade com ponderação)**.** Dado um grafo (N, Γ) um jogo de conectividade ponderado ν_Γ^p, associado ao grafo Γ, é definido pela função característica

$$\nu_\Gamma^p(S) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j \in S, i \neq j, \{i,j\} \in \Gamma} f_{i,j}, & \text{se } |S| > 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 5.3.2. Agora, finalmente vamos utilizar a mesma estrutura do grafo da figura 5.3.2, porém atribuindo *pesos* às suas arestas e modificando a maneira como se calcula a função característica de forma semelhante à da definição 5.3.2. Podemos pensar aqui que os agentes 1 e 2 sejam dois meios de comunicação, enquanto 3 e 4 seriam dois grupos sociais distintos que interagem com os meios de comunicação e também entre si (como, por exemplo, nos casos chamados de propaganda boca à boca). A *quantificação* dessas interações entres os pares está além do escopo deste trabalho, mas por exemplo poderia ser considerado como o tempo de duração das interações, a quantidade ou qualidade das informações trocadas ou o quanto cada interação é de alguma forma *vantajosa* para os pares que fazem parte dela.

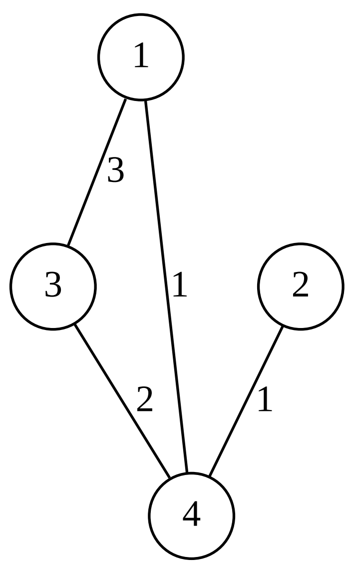

Figura 5.3: Grafo com as possíveis ligações entre os grupos descritos no exemplo.

Agora vamos encontrar os valores atribuídos pela função característica ao jogo. Assim, pela definição de jogos de conectividade ponderada temos $\nu(\emptyset) = 0$ e $\nu(i) = 0$

para qualquer agente i em N, pois um único agente não é capaz de formar um canal de comunicação. Usando a nossa definição de jogo de conectividade ponderado temos os valores para a função característica do exemplo apresentados na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Valores da função característica

$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{\nu(S)}$
1	0
2	0
3	0
4	0
12	0
13	3
14	1
23	0
24	1
34	2
123	3
124	2
134	6
234	3
1234	7

Com os valores da função característica encontramos os valores marginais, como definido no capítulo 4, os quais são apresentados na tabela 5.6.

Finalmente usando a fórmula em 4.1.1 chegamos ao valor de Shapley para cada jogador. Esses valores são apresentados na tabela 5.7.

Tabela 5.6: Vetores Marginais

$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{m_1^\sigma}$	$\boldsymbol{m_2^\sigma}$	$\boldsymbol{m_3^\sigma}$	$\boldsymbol{m_4^\sigma}$
1234	0	0	3	4
1243	0	0	5	2
1324	0	0	3	4
1342	0	1	3	3
1423	0	1	5	1
1432	0	1	5	1
2134	0	0	3	4
2143	0	0	5	2
2314	3	0	0	4
2341	4	0	0	3
2413	1	0	5	1
2431	4	0	2	1
3124	3	0	0	4
3142	3	1	0	3
3214	3	0	0	4
3241	4	0	0	3
3412	4	1	0	2
3421	4	1	0	2
4123	1	1	5	0
4132	1	1	5	0
4213	1	1	5	0
4231	4	1	2	0
4312	4	1	2	0
4321	4	1	2	0

Tabela 5.7: Valor de Shapley calculado para o exemplo

$\boldsymbol{\phi_1}$	$\boldsymbol{\phi_2}$	$\boldsymbol{\phi_3}$	$\boldsymbol{\phi_4}$
2.00	0.50	2.50	2.00

6 Conclusão

Conforme vimos durante o trabalho e especialmente no capítulo anterior, o valor de Shapley, através do uso dos valores marginais, pode ser uma medida interessante para se saber o quão importante é um agente em uma rede. A noção de valores marginais é de fundamental importância para se saber o quanto determinado jogador pode agregar de valor à uma de um jogo estudado, sendo assim se o jogo é definido através da rede, o valor agregado também tem a ver com ela e suas características.

Apesar da pouca literatura existente sobre a associação de jogos cooperativos com redes sociais, acredito que muito ainda pode ser explorado nesse campo, especialmente se modelada de forma apropriada a função característica para a rede e suas interações. A maior limitação para a proposta apresentada no trabalho é a exigência computacional para o cálculo do valor de Shapley, até por isso em nossos exemplos o número de agentes foi limitado à quatro, pois o total de permutações possíveis nesse caso para o cálculo dos valores marginais seria de $4! = 24$. Se o número de jogadores fosse ampliado para cinco teríamos $5! = 120$ permutações! Obviamente o uso de um método eficiente para o cálculo de redes com grande números de agentes juntamente com a modelagem apropriada do valores associados à cada coalizão transformaria a ideia apresentada no trabalho numa ótima ferramente para análise dos jogadores chave pertencentes à uma rede.

Trabalhos interessantes também podem ser explorados no caso em que é considerado algum *dinamismo* na rede, como variações no números de agentes, alterações nas ligações entre eles e mesmo a direção do *fluxo de informações*. Esses atributos certamente seriam mais completos para moldar situações do mundo real.

Referências Bibliográficas

[1] SHAPLEY, L. A value for n-person games. In: KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. (Ed.). *Contributions to the Theory of Games*. Princeton: Princeton University Press, 1953. v. 2, p. 307–317.

[2] TIJS, S. *Introduction to game theory*. [S.l.]: Hindustan Book Agency, 2003.

[3] MYERSON, R. B. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, v. 2, n. 3, p. 225–229, Agosto 1977.

[4] GIMENEZ et al. A connectivity game for graphs. *Mathematical Methods of Operations Research*, Springer, v. 60, n. 3, p. 453–470, dez. 2004. ISSN 1432-2994.

[5] GOMEZ, D. et al. Centrality and power in social networks: a game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences*, v. 46, n. 1, p. 27–54, August 2003.

[6] MORGENSTERN, O.; NEUMANN, J. von. *Theory of Games and Economic Behavior*. [S.l.]: Princeton University Press, 1947.

[7] OWEN, G. Values of graph-restricted games. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, v. 7, p. 210–220, April 1986. ISSN 0196-5212.

[8] LEYTON-BROWN, K.; SHOHAM, Y. *Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction*. [S.l.]: Morgan and Claypool Publishers, 2008. ISBN 1598295934, 9781598295931.

[9] BALLESTER, C.; CALVÓ-ARMENGOL, A.; ZENOU, Y. Who's who in networks. wanted: The key player. *Econometrica*, v. 74, n. 5, p. 1403–1417, 09 2006.

[10] JACKSON, M. O. *The economics of social networks*. [S.l.], ago. 2005.