Teoria de Controle Ótimo e Teoria dos Jogos

Paulo Gomes Staaks

TRABALHO DE FORMATURA APRESENTADO
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DE TÍTULO
DE
BACHAREL EM MATEMÁTICA
APLICADA E COMPUTACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli

13 de dezembro de 2010

Resumo

A Teoria dos Jogos, especificamente o que diz respeito sobre a Teoria dos Jogos Diferenciáveis, sempre foi o que muitos matemáticos consideram como uma teoria de ampla aplicação, mas com passagens difíceis e muitas vezes sem solução. O presente trabalho oferece uma motivação ao estudo desta área, que é bastante fascinante, pois ela tem em comum resultados diretamente ligados com a Programação Dinâmica, proposta por Richard Bellman, e mais diretamente ao Princípio do Máximo, de Lev Semenovich Pontriaguin.

O Capítulo 1 deste trabalho pode ser considerado como uma extensão do capítulo que comenta sobre controlabilidade, estabilidade e detectabilidade, no texto de Jerzy Zabczyk [1], e o prosseguimento da Teoria de Controle Ótimo pela Teoria dos Jogos é dado utilizando o ferramental proposto no Princípio do Máximo, que será a tônica dos Teoremas propostos no Capítulo 3.

Neste trabalho é proposto o estudo de Jogos Diferenciáveis utilizando conceitos relacionados a Teoria de Controle Ótimo, pois a grosso modo, um sistema de controle (definição apresentada no capítulo 1) pode ser equiparado a um Jogador que luta contra a natureza do Problema: o Jogador tem o intuito de maximizar (minimizar) uma certa função que representa seu ganho (perda), de acordo com a regra proposta (sistema de controle) e com a estratégia escolhida (controle).

São oferecidos três tópicos, que embora tenham um carater um tanto diferenciado de um para outro, apresentam resultados semelhantes que nos ajudam a entender um pouco mais o estudo dos da Teoria de Jogos Diferenciáveis. No Capítulo 1, procuramos esclarecer o Princípio de Bellman e compará-lo ao Princípio do Máximo de Pontriaguin, que será usado para a construção de um condição necessária para que uma dada estratégia de um Jogador de um Jogo Diferenciável de Soma Zero de Dois Jogadores seja ótima (Capítulo 3). O Capítulo 2 oferece uma breve descrição da classe de Jogo que será estudada, especificada na frase anterior. De uma maneira simples, após o Capítulo 3, efetuamos um breve comentário, no capítulo 4, sobre o Problema proposto por Rufus Isaacs: “The Homicidal Chaffeur Game”(algo como “O Jogo do Motorista Assassino”); problema este que possui muitas aplicações.

Agradeço a minha família e a minha esposa, Patrícia Camargo Franco Staaks, pela dedicação, força e paciência ensinadas a mim para a conclusão deste ciclo de minha jornada. Ao Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli pela oportunidade de elaborar este trabalho, estudando um assunto tão interessante que é a Teoria dos Jogos.

Sumário

Capítulo 1

Teoria de Controle Ótimo

1.1 Introdução

Neste Capítulo introduzimos dois métodos teóricos de solução de problemas de otimização de sistemas de controle: o Princípio de Bellman e o Princípio do Máximo de Pontriaguin. Ambos os Métodos foram muitos estudados a partir do século XX, para o estudo em Cálculo de Variações como para problemas relacionados a Teoria de Jogos. Estes dois métodos possuem como objetivo determinar uma estratégia ótima para um dado sistema de controle, linear ou não linear, dado um conjunto de critérios. Antes de apresentarmos o problema principal a ser estudado neste texto, vamos definir alguns conjuntos: U (conjunto de entradas para o sistema de controle, $U \subset \Re^m$), U_{ad} (conjunto de controles admissíveis $u : [0,T] \to U$,u localmente integrável em $\Re^+$,ver [1], página 14, para um determinado sistema de controle) e E (conjunto dos estados do sistema de controle, $E \subset \Re^n$). Abaixo, apresentamos o problema que será amplamente estudado neste texto:

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \ , \ y(0) = x \ , \ x \in E \tag{1.1}$$

Para estudarmos o problema acima, com o objetivo de determinar uma estratégia ótima, utilizamos uma das funções de custo de trajetória abaixo:

$$J_T(x, u(.)) = \int_0^T g(y(t), u(t))dt + G(y(T)) \tag{1.2}$$

Ou

$$J(x, u(.)) = \int_0^\infty g(y(t), u(t))dt \tag{1.3}$$

De acordo com o conjunto de critérios e o tempo de análise considerado, o comportamento de uma estratégia ótima $\hat{u}(.)$ para o problema 1.1, que minimiza 1.2 ou 1.3, será da seguinte forma:

$$J_T(x, u(.)) \geq J_T(x, \hat{u}(.)) \ , \ \forall u(.) \in U_{ad} \tag{1.4}$$

Ou

$$J(x,u(.)) \geq J(x,\hat{u}(.)) \ , \ \forall u(.) \in U_{ad} \tag{1.5}$$

Desta forma, fica apresentada a natureza do problema que iremos estudar, incluindo algumas extensões que, ao longo do desenvolvimento do texto, nos fornecerá um conteúdo mais preciso sobre estratégias ótimas para problemas deste tipo.

1.2 Princípio de Bellman

Nesta seção apresentamos um dos primórdios da Teoria de Controle Ótimo: O Princípio de Bellman, enunciado no teorema abaixo.

Teorema 1.2.1 *Seja $W : [0,T] \times E \to \Re$, $W \in C^1([0,T] \times E)$, e funções g, $f \in C^1(E \times U)$ com $g \geq 0$. W satisfaz a equação abaixo.*

$$W_t(t,x) = \inf_{u \in U}(g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) \ , \ W(0,x) = G(x) \tag{1.6}$$

1. *Seja y uma solução contínua em $[0,T]$ de 1.1, então $\forall u(.) \in U_{ad}$ vale a seguinte relação:*

$$J_T(x,u(.)) \geq W(T,x).$$

2. *Seja $\hat{v} : [0,T] \times E \to U$, satisfazendo a relação abaixo:*

$$g(x,\hat{v}(t,x)) + \langle W_x(t,x), f(x,\hat{v}(t,x))\rangle \leq g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle \ \forall u \in U.$$

Seja ainda $\hat{y}$ solução de:

$$\frac{d}{dt}\hat{y}(t) = f(\hat{y}(t), \hat{v}(T-t,\hat{y}(t))), \ t \in [0,T]$$

$$\hat{y}(0) = x.$$

Então, para o controle $\hat{u}(t)$=$\hat{v}(T-t,\hat{y}(t))$,vale:

$$W(T,x) = J_T(x,\hat{u}(t))$$

Demonstração 1.2.1 *1. Seja $w(t) = W(T-t,y(t))$, com $[\alpha,\beta] \subset (0,T)$ e $w \in C^1([\alpha,\beta])$. Como w é C^1, temos:*

$$w'(t) = -W_t(T-t,y(t)) + \langle W_x(T-t,y(t)), y'(t)\rangle.$$

Então vale:

$$w(\beta) - w(\alpha) = \int_\alpha^\beta w'(t)dt = \int_\alpha^\beta -W_t(T-t,t(t)) + \langle W_x(T-t,y(t)), y'(t)\rangle dt.$$

Porém:

$$W_t(t,x) = \inf_{u \in U}(g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) \Rightarrow$$

$$W_t(t,x) \leq g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle \Rightarrow$$
$$-g(x,u) \leq -W_t(t,x) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle$$

Então:

$$w(\beta) - w(\alpha) \geq -\int_\alpha^\beta g(y(t),u(t))dt \ , \ \forall u(.) \in U_{ad}$$

Se $\beta \to T$ e $\alpha \to 0$, temos:

$$w(T) - w(0) = W(0,y(T)) - W(T,x) \geq -\int_0^T g(y(t),u(t))dt \Rightarrow$$

$$\therefore \ W(T,x) \leq \int_0^T g(y(t),u(t))dt + G(y(T)) = J_T(x,u(.)) \ , \ \forall u(.) \in U_{ad}$$

2. *Admitindo o comportamento de $\hat{v}$ para $\hat{u}$, temos:*

$$W_t(t,x) = \inf_{u\in U}(g(x,u)+\langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) = g(x,\hat{u}(t))+\langle W_x(t,x), f(x,\hat{u}(t))\rangle.$$

Então:

$$w(\beta) - w(\alpha) = -\int_\alpha^\beta g(y(t),u(t))dt \Rightarrow$$

$$W(0,y(T)) - W(T,x) = -\int_0^T g(y(t),u(t))dt$$

$$\therefore \ W(T,x) = \int_0^T g(y(t),\hat{u}(t))dt + G(y(T)) = J_T(x,\hat{u}(.)) \ , \ \forall t \in [0,T])$$

Desta forma, o teorema está provado.

Observação 1.2.1 *A equação 1.6 é chamada equação de Bellman e sobre certas condições $W(T,x)$ nos dá o menor valor do funcional 1.4. W é chamada de função de valor do problema 1.1. A função $\hat{v}$ seria um seletor teórico de controles para o problema 1.1, desta forma $\hat{v} \in U(t,x)$, tal que $U(t,x) \subset U_{ad}$.*

Como pode-se notar, o Princípio de Bellman pode ser bem aplicado para a procura de estratégias ótimas para o problema 1.1, e de fato, ele é utilizado em ciências biológicas e econômicas, mas com um funcional de custo com algumas propriedades específicas, veja o exercício abaixo.

Exercício 1.2.1 *Seja $W : [0,T] \times E \to \Re$, W satisfaz a equação abaixo:*

$$W_t(t,x) = \inf_{u\in U}(g(x,u) - \alpha W(t,x) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) \ , \ W(0,x) = G(x) \quad (1.7)$$

com um seletor $\hat{v}(t,x) \in U(t,x)$. Desta forma, generalize o Teorema 1.2.1 utilizando a seguinte função de custo de trajetória:

$$J_T(x,u(.)) = \int_0^T e^{-\alpha t} g(y(t),u(t))dt + e^{-\alpha T} G(y(T)) \quad (1.8)$$

Uma vez que:

$$U(t,x) = \{u \in U_{ad} / g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle$$

$$= \inf_{u\in U}(g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle)\}$$

Solução 1.2.1 *1. Seja $w(t) = e^{-\alpha t}W(T-t, y(t))$, $w : [a,b] \to \Re$ tal que $[a,b] \subset (0,T)$ e $w \in C^0([a,b])$ Logo:*

$$\dot{w}(t) = e^{-\alpha t}(-\alpha W(T-t,y(t)) - W_t(T-t,y(t)) + \langle W_x(T-t,y(t)), \dot{y}(t)\rangle)$$

então vale:

$$w(b) - w(a) = \int_a^b \dot{w}(t)dt$$

$$= \int_a^b e^{-\alpha t}(-\alpha W(T-t,y(t)) - W_t(T-t,y(t)) + \langle W_x(T-t,y(t)), \dot{y}(t)\rangle)dt.$$

Porém:

$$W_t(t,x) = \inf_{u\in U}(g(x,u) - \alpha W(t,x) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) \Rightarrow$$

$$W_t(t,x) \leq (g(x,u) - \alpha W(t,x) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) \Rightarrow$$

$$-g(x,u) \leq (-W_t(t,x) - \alpha W(t,x) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle)$$

$$\therefore\ w(b) - w(a) \geq -\int_a^b e^{-\alpha t} g(y(t), u(t))dt.$$

Se $b \to T$ e $a \to 0$ temos:

$$e^{-\alpha T}W(0, y(T)) - W(T,x) \geq -\int_a^b e^{-\alpha t} g(y(t), u(t))dt$$

$$\therefore\ W(T,x) \leq \int_0^T e^{-\alpha t} g(y(t), u(t))dt + e^{-\alpha T}G(y(T)) = J_T(x, u(.))$$

2. Admitindo o comportamento de $\hat{v}$ para $\hat{u}(t) = \hat{v}(T-t, \hat{y}(t))$, de acordo com o Teorema 1.2.1, temos:

$$W_t(t,x) = \inf_{u\in U}(g(x,u) - \alpha W(t,x) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) \Rightarrow$$

$$W_t(t,x) \leq g(x,u) - \alpha W(t,x) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle \Rightarrow$$

$$W_t(t,x) + \alpha W(t,x) \leq g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle \Rightarrow$$

$$W_t(t,x) + \alpha W(t,x) \leq \inf_{u\in U}(g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) \Rightarrow$$

$$-g(\hat{y}(t), \hat{u}(t)) = -\alpha W(t, \hat{y}(t)) - W_t(t, \hat{y}(t)) + \langle W_x(t, \hat{y}(t)), f(\hat{y}(t), \hat{u}(t))\rangle$$

Logo:

$$e^{-\alpha T}W(0,\hat{y}(T)) - W(0,x) = -\int_0^T e^{-\alpha t} g(\hat{y}(t),\hat{u}(t))dt$$

$$\therefore\ W(T,x) = \int_0^T e^{-\alpha t} g(\hat{y}(t),\hat{u}(t))dt + e^{-\alpha T}G(y(T)) = J_T(x,\hat{u}(.))$$

Chegando assim a conclusão do Teorema 1.2.1.

O Teorema 1.2.1 e o Exercício 1.2.1 são baseados em uma análise no intervalo de tempo $[0,T]$. Podemos procurar também estratégias ótimas considerando intervalos do tipo $[0,+\infty)$, de acordo com o teorema a seguir.

Teorema 1.2.2 *Seja $g \geq 0$, $g \in C^0(E \times U)$ e assuma que existe $W : E \to \Re$, com $W \in C^1(E)$ que satisfaz a equação abaixo:*

$$\inf_{u \in U}(g(x,u) + \langle W_x(x), f(x,u)\rangle) = 0\ ,\ \ x \in E$$

Se, para um controle $u(.)$ e sua saída correspondente y, $\lim_{t\to+\infty} W(y(t)) = 0$, então:

$$J(x,u(.)) \geq W(x).$$

Se $\hat{v} : E \to U$ é uma função que satisfaz:

$$g(x,\hat{v}(x)) + \langle W_x(x), f(x,\hat{v}(x))\rangle = 0\ ,\ \ x \in E$$

e $\hat{y}(t)$ é solução de:

$$\frac{d}{dt}\hat{y}(t) = f(\hat{y}(t),\hat{v}(\hat{y}(t)))\ ,\ \ t \geq 0$$

com $\lim_{t\to+\infty} W(\hat{y}(t)) = 0$ e $\hat{u}(t) = \hat{v}(\hat{y}(t))$, então:

$$J(x,\hat{u}(.)) = W(x).$$

Demonstração 1.2.2 *Seja $w(t) = W(y(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$, com $[\alpha,\beta] \subset [0,T]$ e $w \in C^1([\alpha,\beta])$, desta forma, temos:*

$$\dot{w}(t) = \langle W_x(x), \dot{y}(t)\rangle.$$

Então vale:

$$w(\beta) - w(\alpha) = \int_\alpha^\beta \dot{w}(t)dt = \int_\alpha^\beta \langle W_x(x), \dot{y}(t)\rangle dt.$$

Porém:

$$\inf_{u \in U}(g(x,u) + \langle W_x(x), f(x,u)\rangle) = 0 \Rightarrow$$

$$g(x,u) + \langle W_x(x), f(x,u)\rangle \geq 0 \Rightarrow$$

$$\langle W_x(x), f(x,u)\rangle \geq -g(x,u)$$

$$\therefore$$

$$w(\beta) - w(\alpha) \geq -\int_{\alpha}^{\beta} g(y(t), u(t))dt$$

Se $\beta \to T$ *e* $\alpha \to 0$*, temos:*

$$w(T) - w(0) = W(y(T)) - W(x) \geq -\int_{0}^{T} g(y(t), u(t))dt \Rightarrow$$

$$\therefore$$

$$W(x) \leq \int_{0}^{T} g(y(t), u(t))dt + W(y(T)) = J_T(x, u(.))$$

Chegamos a mesma conclusão do item 1. do teorema 1.2.1, mas levando em consideração que $\lim_{t\to+\infty} W(y(t)) = 0$*, temos:*

$$W(x) \leq \lim_{t\to+\infty} \left(\int_{0}^{T} g(y(t), u(t))dt + W(y(T)) \right) = \int_{0}^{+\infty} g(y(t), u(t))dt = J(x, u(.))$$

Como $\hat{v}(\hat{y}(t)) = \hat{u}(t)$ *é uma função, definida no enunciado do Teorema, temos:*

$$\inf_{u\in U} (g(x, u) + \langle W_x(x), f(x, u)\rangle) = 0 \Rightarrow$$

$$-g(\hat{y}(t), \hat{u}(t)) = \langle W_x(\hat{y}(t)), f(\hat{y}(t), \hat{u}(t))\rangle$$

$$\therefore$$

$$w(\beta) - w(\alpha) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(\hat{y}(t), \hat{u}(t))dt \Rightarrow$$

Se $\beta \to T$ *e* $\alpha \to 0$*, temos:*

$$W(y(T)) - W(x) = -\int_{0}^{T} g(\hat{y}(t), \hat{u}(t))dt$$

$$\therefore$$

$$W(x) = \int_{0}^{T} g(\hat{y}(t), \hat{u}(t))dt + W(y(T)) = J_T(x, \hat{u}(t))$$

Dessa forma chegamos a mesma conclusão do item 2. do teorema 1.2.1, mas levando em consideração que $\lim_{t\to+\infty} W(y(t)) = 0$*, temos:*

$$W(x) = \lim_{T\to+\infty} \left(\int_{0}^{T} g(y(t), u(t))dt + W(y(T)) \right) = \int_{0}^{+\infty} g(y(t), u(t))dt = J(x, u(.))$$

Provamos o Teorema.

1.3 Problema Linear Quadrático

O Problema Linear Quadrático é de grande importância para o estudo e entendimento de estratégias ótimas para sistemas de controles em geral, pois é o resultado da aplicação da equação de Bellman no sistema de controle abaixo:

$$\dot{y}(t) = Ay(t)+Bu(t)\ ,\ y(0) = x\ /\ x \in \Re^n\ /A \in M_{n\times n}(\Re), B \in M_{n\times m}(\Re), \quad (1.9)$$

com o funcional de custo de trajetória abaixo:

$$J_T(x, u(.)) = \int_0^T \langle Qy(s), y(s)\rangle + \langle Ru(s), u(s)\rangle ds + \langle P_0 y(T), y(T)\rangle. \quad (1.10)$$

Antes de nos aprofundarmos no estudo de estratégias ótimas para o problema acima, temos que levar em conta que a solução do Problema Linear Quadrático esta diretamente ligada com a Equação Algébrica de Riccati:

$$\dot{P} = Q + PA + A^tP - PBR^{-1}B^tP\ ,\ P(0) = P_0 \quad (1.11)$$

Com Q e R simétricas não-negativas, R é positiva definida e Q,$P_0 \in M_{n\times n}(\Re)$ e $R \in M_{m\times m}(\Re)$. Considerando o problema de minimização do funcional 1.10, apresentamos o Teorema abaixo.

Teorema 1.3.1 *A Equação Algébrica de Riccati possui uma solução global $P(s)$, $s \geq 0$. Para $s \geq 0$, a matriz $P(s)$ é simétrica e não negativa, ver [1], página 11. O valor mínimo do funcional 1.10 é $J_T(x, \hat{u}(.)) = \langle P(T)x, x\rangle$ e o controle ótimo e dado por:*

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^tP(T - t)\hat{y}(t)\ ,\ t \in [0, T],$$

sendo $\hat{y}(t)$ solução do problema abaixo:

$$\frac{d}{dt}\hat{y}(t) = (A - BR^{-1}B^tP(T - t))\hat{y}(t)\ ,\ \hat{y}(0) = x\ ,\ t \in [0, T]$$

Demonstração 1.3.1 *Esta demonstração será dividida em vários passos:*

Passo 1.

Mostrar que a solução de 1.11 possui uma única solução, e que esta solução é simétrica.

Seja P uma solução de 1.11, logo:

$$\dot{P} = Q + PA + A^tP - PBR^{-1}B^tP \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{P}^t &= (Q + PA + A^tP - PBR^{-1}B^tP)^t \\ &= Q + P^tA + A^tP^t - P^tBR^{-1}B^tP^t\end{aligned}$$

Como podemos notar, P^t também é solução de 1.11, mas 1.11 possui somente uma solução, logo, a solução de 1.11 é uma matriz simétrica.

Passo 2.

Mostre que a função de Bellman associada ao Problema Linear Quadrático é da forma proposta.

Seja $P(s)$ uma solução simétrica de 1.11. Temos:

$$\inf_{u\in U}(g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle) =$$

$$\inf_{u\in U}(\langle Qx,x\rangle + \langle Ru,u\rangle + 2\langle P(t)x, Ax+Bu\rangle) =$$

$$\langle Qx,x\rangle + 2\langle P(t)x, Ax\rangle + \inf_{u\in U}(\langle Ru,u\rangle + 2\langle P(t)x, Bu\rangle) =$$

$$\langle Qx,x\rangle + \langle A^tP(t)x,x\rangle + \langle P(t)Ax,x\rangle + \inf_{u\in U}(\langle Ru,u\rangle + \langle 2B^tP(t)x,x\rangle)$$

Para prosseguirmos, precisamos provar o seguinte lema:

Lema 1 *Se uma matriz $R \in M_{m\times m}(\Re)$ é positiva definida e $a \in \Re^m$, então $\forall u \in \Re^m$, temos:*

$$\langle Ru,u\rangle + \langle a,u\rangle \geq -\frac{1}{4}\langle R^{-1}a,a\rangle$$

e esta igualdade se mantém se:

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}a$$

O Lema acima tem uma demonstração bastante simples:

$$\langle R(s-t), s-t\rangle \geq 0$$

$$s = u$$
$$t = -\frac{1}{2}R^{-1}a$$

$$\langle Rs,s\rangle + \langle Rs,-t\rangle + \langle -Rt,s\rangle + \langle -Rt,-t\rangle \geq 0$$
$$\langle Ru,u\rangle + \langle Ru,\frac{1}{2}R^{-1}a\rangle + \langle\frac{1}{2}a,u\rangle + \langle\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}R^{-1}a\rangle \geq 0$$

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}a$$

$$\langle Ru,u\rangle + \langle \frac{1}{2}a,u\rangle \geq 0$$

$$\langle Ru,u\rangle + \langle a,u\rangle \geq \langle \frac{1}{2}a,u\rangle$$

$$\langle Ru,u\rangle + \langle a,u\rangle \geq -\frac{1}{4}\langle R^{-1}a,a\rangle$$

E isto prova o lema.

Desta forma, temos:

$$\langle Qx,x\rangle + \langle (PA+A^tP)x,x\rangle + \inf_{u\in U}(\langle Ru,u\rangle + \langle 2B^tPx,u\rangle) =$$

$$\langle Qx,x\rangle + \langle (PA+A^tP)x,x\rangle - \frac{1}{4}\langle 2R^{-1}B^tPx, 2B^tPx\rangle =$$

$$\langle Qx,x\rangle + \langle (PA+A^tP)x,x\rangle - \langle R^{-1}B^tPx, B^tPx\rangle =$$

$$\langle Qx,x\rangle + \langle (PA+A^tP)x,x\rangle - \langle PBR^{-1}B^tPx, x\rangle =$$

$$\langle (Q+PA+A^tP-PBR^{-1}B^tP)x,x\rangle = \langle \dot{P}x,x\rangle$$

Portanto, a solução da equação 1.11 satisfaz a equação de Bellman associada ao Problema Linear Quadrático, e ainda por cima, temos o seletor:

$$\hat{v}(t,x) = -R^{-1}B^tP(t)x$$

Passo 3.

Considerando o Passo 2. como consequência direta do Princípio de Bellman, temos em mãos o controle ótimo dado por:

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^tP(T-t)\hat{y}(t)$$

Passo 4.

Para $t\in[0,T]$, $T\leq T_0$,a matriz $P(t)$ é não negativa e vale a seguinte relação abaixo:

$$\langle P(t)x,x\rangle \leq \int_0^t \langle Qy_A(s),y_A(s)\rangle ds + \langle P_0y_A(t),y_A(t)\rangle, \tag{1.12}$$

com $y_A(.)$ sendo solução da equação abaixo:

$$\dot{y} = Ay\ ,\ y(0)=x$$

O valor $\langle P(t)x,x\rangle$ é o valor mínimo do funcional 1.10 e, além disso, a equação 1.12 só será aceita se $u(s)=0, s\in[0,t]$.

Passo 5.

Para $t \in [0,t]$ e $x \in \Re^n$, temos como consequência direta do Passo 4.:

$$0 \leq \langle P(t)x, x\rangle \leq \left\langle \left(\int_0^t S^t(s)QS(s)ds + S^t(t)P_0S(t) \right) x, x \right\rangle,$$

com $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$. Utilizando o exercício abaixo, podemos garantir que a solução de 1.11 é limitada em $M_{n\times n}(\Re)$ e não decrescente e dessa forma o teorema está provado.

Exercício 1.3.1 *Mostre que se, para matrizes simétricas $P = (p_{ij}), S = (s_{ij}) \in M_{n\times n}(\Re)$, tais que $0 \leq \langle Px, x\rangle \leq \langle Sx, x\rangle$, $x \in \Re^n$, então:*

$$-\frac{1}{2}(s_{ii} + s_{jj}) \leq p_{ij} \leq s_{ij} + \frac{1}{2}(s_{ii} + s_{jj}) \ , \ i,j = 1,...,n$$

Solução do exercício:

$$\begin{aligned}
0 \leq & \langle P(e_i + e_j), e_i + e_j\rangle \leq \langle S(e_i + e_j), e_i + e_j\rangle \\
0 \leq & p_{ii} + p_{jj} + 2p_{ij} \leq s_{ii} + s_{jj} + 2s_{ij} \\
-(p_{ii} + p_{jj}) & \leq 2p_{ij} \leq s_{ii} + s_{jj} - (p_{ii} + p_{jj}) + 2s_{ij} \\
-(s_{ii} + s_{jj}) & \leq 2p_{ij} \leq s_{ii} + s_{jj} - (p_{ii} + p_{jj}) + 2s_{ij}, \ porque \ - s_{ii} \leq -p_{ii} \\
-(s_{ii} + s_{jj}) & \leq 2p_{ij} \leq s_{ii} + s_{jj} + 2s_{ij}, \ porque \ - p_{ii} \leq 0 \\
logo & : \\
-\frac{1}{2}(s_{ii} + s_{jj}) & \leq p_{ij} \leq s_{ij} + \frac{1}{2}(s_{ii} + s_{jj})
\end{aligned}$$

1.4 Estabilização do Problema Linear Quadrático

Na última seção vimos que a solução de 1.11 nos dá uma ferramenta muito útil para a procura de controles ótimos para o problema 1.1. Além disso, oferece uma forma bastante útil para a estabilização de sistemas lineares, ver [1], páginas 28 e 30. Esta forma está diretamente ligada com a Equação abaixo:

$$Q + PA + A^tP - PBR^{-1}B^tP = 0 \ , \ P \geq 0. \tag{1.13}$$

A matrix P é simétrica e não negativa. Se existir uma solução $\tilde{P}$ da equação acima, e se $P \geq \tilde{P}$ para todas as outras soluções, então $\tilde{P}$ é uma solução minima da equação 1.13. Além disso, iremos analisar o problema 1.9 no intervalo $[0, +\infty)$, para controles u(.). Desta forma, o funcional de custo de trajetória do problem 1.9 fica definido de acordo com a equação abaixo:

$$J(x, u(.)) = \int_0^{+\infty} (\langle Qy(s), y(s)\rangle + \langle Ru(s), u(s)\rangle)ds \tag{1.14}$$

Teorema 1.4.1 *Se existe uma solução não negativa da equação 1.13, então também existe uma solução mínima $\tilde{P}$ da equação 1.13 e o controle $\tilde{u}$ é dado pela a equação abaixo:*

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^t\tilde{P}y(t)$$

e o valor mínimo do funcional 1.14 é dado por $\langle \tilde{P}x, x\rangle$.

Demonstração 1.4.1 *Primeiro vamos mostrar que se $P_1(t)$ e $P_2(t)$ são soluções de 1.11, e $P_1(0) \leq P_2(0)$, então $P_1(t) \leq P_2(t)$ $\forall t \geq 0$, veja:*

$$J_t^1(x, u(.)) = \int_0^t \langle Qy(s), y(s)\rangle + \langle Ru(s), u(s)\rangle ds + \langle P_1(0)y(t), y(t)\rangle$$

$$J_t^2(x, u(.)) = \int_0^t \langle Qy(s), y(s)\rangle + \langle Ru(s), u(s)\rangle ds + \langle P_2(0)y(t), y(t)\rangle.$$

Logo:

$$\langle P_1(0)y(t), y(t)\rangle \leq \langle P_2(0)y(t), y(t)\rangle$$

De forma particular, se $P_1(0) = 0$ e $P_2(0) = P$, solução de 1.13, então $P_2(t) = P$ e $P_1(t) \leq P, \forall t \geq 0$. Se torna resultado direto do teorema 1.3.1 que $P_1(.)$ é não decrescente, de acordo com a ordem de matrizes simétricas, e desta forma sabemos que os limites abaixo serão finitos:

$$\tilde{p}_{ij} = \lim_{t\to+\infty} \tilde{p}_{ij}(t) \ , \ (\tilde{p}_{ij}(t)) = P_1(t) \ , \ t \geq 0$$

Levando em consideração a equação 1.11 também serão finitos os limites abaixo:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d}{dt}\tilde{p}_{ij}(t) = \gamma_{ij}$$

Os γ_{ij} na verdade serão nulos, pois $P_1(t)$ é limitada e não decrescente, logo é claro que $\tilde{P} \leq P$.
Agora, seja $\tilde{y}(.)$ a saída correspondente para o controle $\tilde{u}(.)$.Pelo teorema 1.3.1, temos:

$$\langle \tilde{P}x, x\rangle = \int_0^T \langle Q\tilde{y}(t), \tilde{y}(t)\rangle + \langle R\tilde{u}(t), \tilde{u}(t)\rangle dt + \langle \tilde{P}\tilde{y}(T), \tilde{y}(T)\rangle \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{P}x, x\rangle \geq \int_0^T \langle Q\tilde{y}(t), \tilde{y}(t)\rangle + \langle R\tilde{u}(t), \tilde{u}(t)\rangle dt + \Rightarrow$$

$$T \to \infty \ , \ J(x, \tilde{u}(.)) \leq \langle \tilde{P}x, x\rangle$$

Por outro lado:

$$\langle P_1(T)x, x\rangle \leq \int_0^T \langle Q\tilde{y}(t), \tilde{y}(t)\rangle + \langle R\tilde{u}(t), \tilde{u}(t)\rangle dt \leq J(x, \tilde{u}(.)) \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{P}x, x\rangle \leq J(x, \tilde{u}(.)) \Rightarrow \langle \tilde{P}x, x\rangle = J(x, \tilde{u}(.))$$

Isto prova o teorema.

O teorema seguinte discute a unicidade e a estabilidade da equação 1.13.

Teorema 1.4.2 *1. Se o par (A, B) é estável (ver [1],páginas 40 e 43), então a equação 1.13 tem pelo menos uma solução.*

2. Se $Q = C^t C$ e o par (A, C) é detectável (ver [1],página 46), então a equação 1.13 tem pelo menos uma solução, e se P é solução, então a matriz $A - BR^{-1}B^tP$ é estável.

Demonstração 1.4.2 *1. Como (A, B) é estável, então existe K, tal que:*

$$\dot{y}(t) = (A + BK)y(t) \ , \ y(0) = x$$

$$y(t) = e^{(A+BK)t}x \ , \ y(t) \to 0 \text{ quando } t \to +\infty$$

Como (A+BK) é estável, então $y(t)$ é exponencialmente estável e dessa forma:

$$J(x, u(.)) = \int_0^\infty \langle Qy(t), y(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle dt$$

$$= \int_0^\infty \langle (Q + K^tRK)y(t), y(t)\rangle dt < +\infty$$

Sendo $P_1(t)$ com $P_1(0) = 0$, solução de 1.11, e P solução de 1.13, então:

$$\langle P_1(T)x, x\rangle \leq J(x, u(.)) < +\infty,$$

e, desta forma:

$$\lim_{t\to+\infty} P_1(t) = P < +\infty$$

pois $P_1(t)$ é não decrescente, desta forma, o problema tem pelo menos uma solução (Consequncia do Teorema 1.4.1).

2. Primeiro provaremos o seguinte lema:

Lema 2 *L1. Assuma que para algumas matrizes $M \geq 0$ e K de dimensões apropriadas para o problema abaixo:*

$$M(A - BK) + (A - BK)^tM + K^tRK + C^tC = 0 \tag{1.15}$$

Se o par (A,C) é detectável, então A-BK é estável.

L2. Se, além disso, P é solução de 1.13, então $P \leq M$.

Prova do Lema:

L1. Seja $S_1(t) = e^{(A-BK)t}$ e $S_2(t) = e^{(A-LC)t}$, com L tal que $A - LC$ seja estável, e seja $y(t) = S_1(t)x$, $t \geq 0$, temos:

$$A - BK = (A - LC) + (LC - BK)$$

então:

$$y(t) = S_2(t)x + \int_0^t S_2(t-s)(LC - BK)y(s)ds.$$

Temos agora que provar:

$$\int_0^{+\infty} |Cy(s)|^2 ds < +\infty \ e \ \int_0^{+\infty} |Ky(s)|^2 ds < +\infty. \tag{1.16}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle My(t), y(t)\rangle &= 2\langle M\dot{y}(t), y(t)\rangle \\ &= 2\langle M(A - BK)y(t), y(t)\rangle \\ &= \langle (M(A - BK) + (A - BK)^t M)y(t), y(t)\rangle \end{aligned}$$

Aplicando este resultado, junto com 1.15, temos:

$$-\frac{d}{dt}\langle My(t), y(t)\rangle = \langle Cy(t), Cy(t)\rangle + \langle RKy(t), Ky(t)\rangle$$

e, desta forma

$$\langle My(t), y(t)\rangle + \int_0^t |Cy(s)|^2 ds + \int_0^t \langle RKy(s), Ky(s)\rangle ds = \langle Mx, x\rangle.$$

Como a matrix R é positiva definida, fica provado 1.16, então vale:

$$|y(t)| \leq |S_2(t)x| + N\int_0^t |S_2(T - S)|(|Cy(s)| + |Ky(s)|)ds.$$

Com $N = max(|L|, |B|), t \geq 0$. Pela desigualdade de Young (ver [1], página 250), temos:

$$\int_0^{+\infty} |y(s)|^2 ds \leq N\int_0^{+\infty} |S_2(s)|ds\left(\int_0^{+\infty} (|Cy(s)| + |Ky(s)|)^2 ds\right)^{1/2}$$

$$+\left(\int_0^{+\infty} |S_2(s)|^2 ds\right)^{1/2} |x| < +\infty$$

Logo, segue que $y(t) \to 0$ se $t \to +\infty$ e $A - BK$ é estável.

L2. Defina $K_0 = R^{-1}B^tP$, com P solução de 1.13, logo $PB = K_0^tR$, temos:

$$P(A - BK) + (A - BK)^t P + K^t RK = -C^tC + (K - K_0)^t R(K - K_0)$$

$$M(A - BK) + (A - BK)^t M + K^t RK = -C^tC$$

Seja $V = M - P$, então:

$$V(A - BK) + (A - BK)^t V + (K - K_0)^t R(K - K_0) = 0.$$

Como $A - BK$ é estável e:

$$M = \int_0^{+\infty} S_1^t(s)(C^tC + K^tRK)S_1(s)ds$$

V será da seguinte forma:

$$V = \int_0^{+\infty} S_1^t(s)(K - K_0)^t R(K - K_0)S_1(s) \geq 0$$

logo $M \geq P$, e a prova do lema está completa.

Para provar a parte 2. do Teorema, vamos assumir que $P_1 \geq 0$ e $P \geq 0$ são soluções de 1.13. Defina $K = R^{-1}B^tP$. Então:

$$P(A-BK)+(A-BK)^tP+C^tC+K^tRK = PA+A^tP+C^tC-PBR^{-1}B^tP = 0$$

Pelo Lema 2, $P_1 \leq P$. Mas pelo mesmo caminho, possuímos $P_1 \geq P$. Portanto $P_1 = P$, e o lema 2 implica a estabilidade de $A - BK$.

1.5 Princípio do Máximo

Iremos estudar nesta seção um método bastante semelhante ao Princípio de Bellman. A priori analisaremos o Princípio do Máximo de Pontryagin de uma forma simples, obtendo resultados que poderão corroborar as seções anteriores. Após isso será oferecida uma aplicação ,utilizando o Problema Linear Quadrático e, finalmente mostraremos uma forma de estudo para problemas de tempo ótimo, relacionados a Teoria de Controle.
Para problemas de controle com um tempo fixo, vamos considerar o problema 1.1, com as definições feitas na introdução deste capítulo. Vamos considerar também as derivadas em relação ao vetor de estados x de f, g e G por f_x, g_x e G_x, respectivamente, e o conjunto de entradas será definido por $U \subset \Re^m$. Oferecemos abaixo uma versão para o Princípio do Máximo.

Teorema 1.5.1 *Assuma que f, g, G, f_x, g_x e G_x sejam contínuas e que um dado controle $\hat{u}(.)$, limitado, com uma solução $\hat{y}(.)$ de 1.1 que maximiza o funcional 1.2. Dessa forma, para $t \in (0,T)$ tal que $\frac{d^-}{dt}\hat{y}(t) = f(\hat{y}(t), \hat{u}(t))$, a desigualdade abaixo se mantém:*

$$\langle p(t), f(\hat{y}(t), \hat{u}(t))\rangle + g(\hat{y}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U}(\langle p(t), f(\hat{y}(t), u)\rangle + g(\hat{y}(t), u)) \quad (1.17)$$

com $p(.)$ solução de

$$\dot{p}(t) = -f_x^t(\hat{y}(t), \hat{u}(t))p(t) - g_x^t(\hat{y}(t), \hat{u}(t))$$

$$p(T) = G_x(\hat{y}(T))$$

Demonstração 1.5.1 *Veja abaixo.*

Caso 1. $g(x,u) = 0$

Seja para algum t_0, $\frac{d^-}{dt}\hat{y}(t_0) = f(\hat{y}(t_0), \hat{u}(t_0))$. *Para um controle* $\bar{u} \in U$ *e* $h \geq 0$, *h pequeno, definimos a variação abaixo.*

$$u(t,h) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \in \{[0, t_0 - h)\} \cup \{[t_0, T]\} \\ \bar{u} \ , & t \in [t_0 - h, t_0) \end{cases} \tag{1.18}$$

Seja $y(.,h)$ *a saída correspondente a* $u(.,h)$, *dessa forma temos:*

$$\frac{d^+}{dh} G(y(T,0)) \leq 0, \tag{1.19}$$

pois $G(y(T,s_1)) \geq G(y(T,s_2))$ *se* $s_1 \leq s_2$,$\forall s_1, s_2 \in \Re^+$. *Vamos agora calcular o valor de 1.19 utilizando as igualdades abaixo.*

$$y(t_0,h) = y(t_0 - h, h) + \int_{t_0-h}^{t_0} f(y(t,h),\bar{u})dt$$

$$\hat{y}(t_0) = \hat{y}(t_0 - h) + \int_{t_0-h}^{t_0} f(\hat{y}(t),\hat{u}(t))dt$$

Como $\lim_{h\to 0} \hat{y}(t_0 - h) = \hat{y}(t_0) = \lim_{h\to 0} y(t_0 - h, h)$, $y(t_0 - h, h) \approx \hat{y}(t_0 - h)$, *para valores pequenos de h, logo:*

$$y(t_0,h) \approx \hat{y}(t_0 - h) + \int_{t_0-h}^{t_0} f(y(t,h),\bar{u})dt$$

$$\hat{y}(t_0) = \hat{y}(t_0 - h) + \int_{t_0-h}^{t_0} f(\hat{y}(t),\hat{u}(t))dt.$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dh} y(t_0,0) &= \lim_{s\to 0^+} \frac{y(t_0,s) - \hat{y}(t_0)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s}\left(\int_{t_0-s}^{t_0} f(y(t,s),\bar{u})dt - \int_{t_0-s}^{t_0} f(\hat{y}(t),\hat{u}(t))dt \right) \\ &= f(\hat{y}(t_0),\bar{u}) - f(\hat{y}(t_0),\hat{u}(t_0)) \end{aligned}$$

Para $t \in [t_0, T]$, $\frac{d}{dt} y(t,h) = f(y(t,h),\hat{u}(t))$ *e como* $y(t,h) \in C^2((t_0,T) \times \Re^+)$ *(ver [2], páginas 379, 380, 381 e 382), temos:*

$$\frac{d}{dt} y(t,h) = f(y(t,h),\hat{u}(t)) \ , \ \forall t \in (t_0,T), \ \therefore$$

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{d}{dt} y(t,h)\right) = f_x(y(t,h),\hat{u}(t))\frac{d}{dh} y(t,h) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dh} y(t,h)\right).$$

Substituindo $\frac{d}{dh}y(t,0) = q(t)$*, temos:*

$$\dot{q}(t) = f_x(\hat{y}(t), \hat{u}(t))q(t)$$

Seja $F(t)$ *uma solução fundamental da equação acima, logo* $\forall t \in (t_0, T)$*, temos:*

$$\frac{d^+}{dh}y(t,0) = F(t)F^{-1}(t_0)(f(\hat{y}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{y}(t_0), \hat{u}(t_0))) \tag{1.20}$$

$$\therefore \quad \frac{d^+}{dh}y(T,0) = F(T)F^{-1}(t_0)(f(\hat{y}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{y}(t_0), \hat{u}(t_0))) \tag{1.21}$$

Prosseguindo com o cálculo de $\frac{d^+}{dh}G(y(T,0))$*, temos:*

$$\begin{aligned}
\frac{d^+}{dh}G(y(T,0)) &= \left\langle G_x(y(T,0)), \frac{d^+}{dh}y(T,0) \right\rangle \\
&= \left\langle G_x(y(T,0)), F(T)F^{-1}(t_0)(f(\hat{y}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{y}(t_0), \hat{u}(t_0))) \right\rangle \\
&= \left\langle (F^{-1}(t_0))^t F^t(T) G_x(y(T,0)), (f(\hat{y}(t_0), \bar{u}) - f(\hat{y}(t_0), \hat{u}(t_0))) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $p(t)$ *é solução de:*

$$\dot{p}(t) = -f_x^t(\hat{y}(t), \hat{u}(t))p(t)$$

e como F(t) tem o comportamento abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F(t)F^{-1}(t)) &= \frac{d}{dt}F(t)F^{-1}(t) + F(t)\frac{d}{dt}F^{-1}(t) \\
&= f_x(\hat{y}(t), \hat{u}(t)) + F(t)\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = 0 \\
\therefore \quad \frac{d}{dt}F^{-1}(t)^t &= -f_x^t(\hat{y}(t), \hat{u}(t))F^{-1}(t)^t
\end{aligned}$$

Então $F^{-1}(t)^t$ *é a solução fundamental de* $p(t)$*, logo, com a desigualdade 1.19 existindo, provamos o teorema para o Caso 1. .*

Caso 2. $g(x,u) \neq 0$

Basta reajustarmos o Problema:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= f(y(t), u(t)) \\
y(0) &= x \\
J_T(x, u(.)) &= \int_0^T g(y(t), u(t))dt + G(y(T))
\end{aligned}$$

para

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(y(t),u(t)) \\ g(y(t),u(t)) \end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix} y(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w(t) = \int_0^t g(y(s),u(s))ds$$

$$\tilde{J}(x,u(.)) = \tilde{G}\left(\begin{bmatrix} y(T) \\ w(T) \end{bmatrix} \right)$$

$$\tilde{G}\left(\begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \right) = w(t) + G(y(t)),$$

aplicando o caso 1, o teorema está provado.

Observação 1.5.1 *O resultado obtido pode ser reformulado nos termos da função Hamiltoniana:*

$$H(x,p,u) = \langle p, f(x,u)\rangle + g(x,u) \;,\; (x,u) \in E \times U,\; p \in \Re^n \tag{1.22}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial}{\partial p}H(y(t),p(t),u(t)) \;,\; y(0) = x \tag{1.23}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial}{\partial x}H(y(t),p(t),u(t)) \;,\; p(T) = G_x(y(T)) \tag{1.24}$$

sujeito a condição abaixo:

$$\max_{u\in U} H(\hat{y}(t),p(t),u) = H(\hat{y}(t),p(t),\hat{u}(t)) \;,\; \forall t \in (0,T) \tag{1.25}$$

O Teorema anterior pode ser utilizado para o estudo do Problema Linear Quadrático com um controle ótimo dado pela seguinte fórmula:

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^tP(T-t)\hat{y}(t) \tag{1.26}$$

Pelo princípio do Máximo, temos:

$$\begin{aligned}\langle p(t), A\hat{y}(t) + B\hat{u}(t)\rangle + &\langle Q\hat{y}(t),\hat{y}(t)\rangle + \langle R\hat{u}(t),\hat{u}(t)\rangle = \\ &\min_{u\in U}(\langle p(t), A\hat{y}(t) + Bu\rangle + \langle Q\hat{y}(t),\hat{y}(t)\rangle + \langle Ru,u\rangle).\end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação anterior, temos:

$$\begin{aligned}\langle p(t), A\hat{y}(t)\rangle + \langle p(t), B\hat{u}(t)\rangle + \langle Q\hat{y}(t),\hat{y}(t)\rangle + \langle R\hat{u}(t),\hat{u}(t)\rangle = \\ \langle A^tp(t) + Q\hat{y}(t),\hat{y}(t)\rangle + \langle B^tp(t),\hat{u}(t)\rangle + \langle R\hat{u}(t),\hat{u}(t)\rangle\end{aligned}$$

e essa equação só terá valor mínimo se o controle for escolhido de acordo com o Lema 1, e a desigualdade comentada nesse lema só será mantida se

$$\hat{u}(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^tp(t). \tag{1.27}$$

Uma escolha bastante lógica para $p(t)$ é $2P(T-t)\hat{y}(t)$. Isso será provado pelo lema abaixo.

Lema 3 *Seja P(t) uma solução de 1.11, então*

$$p(t) = 2P(T-t)\hat{y}(t)\ ,\ \frac{d}{dt}\hat{y}(t) = (A - BR^{-1}B^tP(T-t))\hat{y}(t) \qquad (1.28)$$

Prova do Lema.

Basta derivar p(t):

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) =& 2(-\dot{P}(T-t)\hat{y}(t) + P(T-t)\frac{d}{dt}\hat{y}(t)) \\ =& 2(-(Q + P(T-t)A + A^tP(T-t) - P(T-t)BR^{-1}B^tP(T-t))\hat{y}(t) + \\ & P(T-t)(A - BR^{-1}B^tP(T-t))\hat{y}(t)) \\ =& 2(-Q\hat{y}(t) - A^tP(T-t)\hat{y}(t)) \\ =& -A^tp(t) - 2Q\hat{y}(t)\end{aligned}$$

E isso prova o lema.

Agora, analisaremos a teoria proposta por Pontriagyn de uma outra forma: uma minimização do tempo que um controle u leva um estado a a um estado b. Para isso, precisaremos de três teoremas que definem a Separação de Conjuntos Convexos. Seja E um espaço de Banach com a norma $\|.\|$ e seja E^* o espaço de todos os funcionais lineares φ em E com a norma $\|\varphi\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1}\{\|\varphi(x)\|\}$ (ver [1], páginas 244, 245, 246, 247 e 248).

Teorema 1.5.2 *Seja K e L conjuntos disjuntos convexos de E. Se o $Int(K) \neq \emptyset$ então existe um funcional $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ tal que:*

$$\varphi(x) \leq \varphi(y)\ ,\ x \in K,\ y \in L \qquad (1.29)$$

Demonstração 1.5.2 *Seja $x_0 \in Int(K)$ e $y_0 \in L$. Então o conjunto $M = \{x - y + y_0 - x_0; x \in K, y \in L\}$ é convexo e $0 \in Int(M)$. Desta forma, definimos:*

$$p(x) = \inf_{\frac{x}{t} \in M, t>0}(t) \qquad (1.30)$$

Esta função tem as seguintes propriedades:

1. *$p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \Re$, pois se $p(x) = \inf_{\frac{x}{t}\in M, t>0}(t)$ e $p(\alpha x) = \inf_{\frac{\alpha x}{t}\in M, t>0}(t)$, então $\frac{x}{p(x)} = \frac{\alpha x}{p(\alpha x)}$, logo $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.*

2. *$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$, pois como $0 \in Int(M)$, M é convexo e se $s \in M$,$p(s) \leq 1$, logo temos:*

$$\frac{p(x)}{p(x)+p(y)}\frac{x}{p(x)} + \frac{p(y)}{p(x)+p(y)}\frac{y}{p(y)} \in M\ ,\ \forall x, y \in E$$

logo:

$$p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)}\right) = \frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)} \leq 1 \;\therefore\; p(x+y) \leq p(x)+p(y)$$

3. $p(x) \leq c\|x\|$, *pois como* $0 \in Int(M)$, *então* $\min_{s\in E}\left(\frac{\|s\|}{p(s)}\right) > 0$, *logo se* $\min_{s\in E}\left(\frac{\|s\|}{p(s)}\right) = \frac{1}{c}$, $c \neq 0$, *temos:*

$$\frac{\|x\|}{p(x)} \geq \frac{1}{c} \;,\; x \in E \;\therefore\; p(x) \leq c\|x\|$$

Agora, vamos definir um espaço linear unidimensional $\{\alpha z_0; \alpha \in \Re\}$, *com* $z_0 = y_0 - x_0$ *e um funcional* φ_0 *linear tal que* $\varphi_0(\alpha z_0) = \alpha$. *Como* $z_0 \notin M$, *então* $\forall\alpha > 0$:

$$p(\alpha z_0) = \alpha p(z_0) \geq \alpha p\left(\frac{z_0}{p(z_0)}\right) = \alpha = \varphi_0(\alpha z_0).$$

Se $\alpha \leq 0$, *então:*

$$\varphi_0(\alpha z_0) \leq 0 \leq p(\alpha z_0).$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, então existe um funcional φ *tal que:*

$$\varphi(x) \leq p(x) \;,\; x \in E$$

Ou seja, pelas propriedades da função p *e pela desigualdade acima,* $\varphi \in E^*$. *Ainda, se* $x \in M$,

$$\varphi(x) \leq p(x) \leq 1,$$

logo

$$\varphi(x - y + y_0 - x_0) = \varphi(x-y) + \varphi(z_0) \leq 1 \leq \varphi(z_0),$$

pois o subespaço considerado para o Teorema de Hahn-Banach é $\{\alpha z_0; \alpha \in \Re\}$, *e como* $\varphi(z_0) = \varphi_0(z_0) = 1$, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. *Este funcional separa os dois subconjuntos* K *e* L, *se a desigualdade 1.29 se manter.*

Teorema 1.5.3 *Seja* $M \subset E$ *um conjunto convexo.*

1. *Se* $Int(M) \neq \emptyset$ *e* $x_0 \notin Int(M)$, *então existe* $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ *tal que:*

$$\varphi(x) \leq \varphi(x_0) \;,\; x \in M.$$

2. *Se* $x_0 \in E$ *e* $x_0 \notin Fecho(M)$, *então existe* $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ *e* $\delta > 0$ *tal que:*

$$\varphi(x) + \delta \leq \varphi(x_0) \;,\; x \in M$$

Demonstração 1.5.3 *Veja abaixo:*

1. *De acordo com o teorema 1.5.2, se definirmos $K = Int(M)$ e $L = \{x_0\}$, existe um funcional $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, tal que:*

$$\varphi(x) \leq \varphi(x_0) \ , \ x \in Int(M)$$

   Como $M \subset Fecho(Int(M))$, a desigualdade do item 1 se mantém.

2. *Para algum $r > 0$, a bola fechada $L = \{y \in E; \|y - x_0\| \leq r\}$ é disjunta de M. Escolhendo $K = M$, nós temos do Teorema 1.5.2 que existe $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, tal que a desigualdade 1.29 se mantém. Como $\varphi \neq 0$ e $m = \inf_{\|y-x_0\| \leq r}(\varphi(y)) < \varphi(x_0)$ é suficiente definir δ tal que $\delta < \varphi(x_0) - m$.*

Teorema 1.5.4 *Seja $M \subset E = \Re^n$, M convexo. Se $x_0 \in M$ e $x_0 \notin Int(M)$, então existe um vetor $p \in \Re^n$, $p \neq 0$, tal que:*

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, x_0 \rangle \ , \ x \in M.$$

Demonstração 1.5.4 *Se $Int(M) \neq \emptyset$, aplique o Teorema 1.5.3, caso contrário, o menor espaço linear $E_0 = \{x \in M, x - x_0\}$, então $E_0 \neq E$. Desta forma existe $\varphi \neq 0$ tal que $\varphi(y) = 0$, $y \in E_0$. Portanto, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ para $x \in M$. Como φ é linear, podemos representar φ como $\varphi(z) = \langle p, z \rangle$, $z \in \Re^n$ e $p \in \Re^n$. E isto prova o teorema.*

Agora que terminamos o estudo dos Teoremas de Separação de Conjuntos Convexos de um espaço de Banach, podemos nos ater ao estudo dos Problemas de Tempo Ótimo. Esses problemas não podem ser resolvidos utilizando a variação 1.18, pois ela não representa um controle admissível para o problema. Sendo assim, necessitamos de uma outra abordagem para a resolução desse problema. Vamos considerar o sistema linear abaixo.

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \ , \ y(0) = x \tag{1.31}$$

Vamos admitir que $U \subset \Re^m$ seja convexo e compacto. Sabemos da Teoria de Controle que um controle $u : [0, T] \to U$ leva o estado x ao estado $\bar{x}$ em tempo T se:

$$y^{x,u}(T) = \bar{x} \ , \ T > 0$$

sendo $y^{x,u}(.)$ solução do sistema 1.31. Ou seja, o problema abordado agora é achar um controle que leve x a $\bar{x}$ em um tempo mínimo T.

Teorema 1.5.5 *Veja abaixo:*

1. *Se existe um controle que transfere um estado x a um estado $\bar{x}$, então o problema de tempo ótimo tem solução.*

2. *Se $\hat{u}$ é um controle que transfere x a $\bar{x}$ num tempo mínimo $\hat{T} > 0$, então existe $\lambda \in \Re^n$, $\lambda \neq 0$, tal que para a solução da equação abaixo,*

$$\dot{p}(t) = -A^t p(t) \ , \ p(\hat{T}) = \lambda \tag{1.32}$$

a igualdade

$$\langle B^t p(t), \hat{u}(t) \rangle = \max_{u \in U} (\langle B^t p(t), u \rangle) \tag{1.33}$$

se mantém para quase todo $t \in [0, \hat{T}]$.

Demonstração 1.5.5 *Seja $S(t) = e^{At}$, $t \in \Re$. A solução de 1.31 é da forma abaixo:*

$$y(t) = S(t) \left(x + \int_0^t S^{-1}(r) B u(r) dr \right) \ , \ t \geq 0. \tag{1.34}$$

Para $t \geq 0$ definimos o conjunto $R(t) \subset \Re^n$:

$$R(t) = \left\{ \int_0^t S^{-1}(r) B u(r) dr ; u(r) \in U \right\}. \tag{1.35}$$

Agora, para prosseguirmos, necessitaremos de algumas propriedades do conjunto $R(t)$, formuladas no lema seguinte.

Lema 4 *Veja abaixo.*

1. *Para $t \geq 0$ o conjunto $R(t)$ é convexo e compacto.*
2. *Se $x_m \to a$ e $t_m \downarrow t$ com $m \uparrow +\infty$ e $x_m \in R(t_m)$ para $m \in \{0, 1, 2, ...\}$, então $a \in R(t)$.*
3. *Se $a \in Int(R(t))$ para algum $t > 0$, então $a \in R(s)$ $\forall s < t$, s suficiente próximo de t.*

Prova do Lema.

Nesta prova vamos precisar de um lema de Convergência fraca. Seja (h_m) uma sequência de elementos de um espaço de Hilbert H (ver [1], página 247), essa sequência converge fracamente para $h \in H$ se para $x \in H$, $\lim_{m \to +\infty} \langle h_m, x \rangle_H = \langle h, x \rangle_H$, sendo $\langle ., . \rangle_H$ o produto escalar no espaço H.

Lema 5 *Seja H um espaço de Hilbert, separável. Qualquer sequência (h_m) limitada de elementos de H contém uma subsequência que converge fracamente para algum elemento de H.*

Prova do Lema.

Vamos considerar os funcionais lineares abaixo,

$$\varphi_m(x) = \langle h_m, x\rangle_H \ , \ x \in H, \ m = 1, 2, ... \tag{1.36}$$

Como H *é separável, então existe* (φ_{m_k}) *e* $H_0 \subset H$, H_0 *denso em* H, *tal que a sequência* $(\varphi_{m_k}(x))$ *é convergente para* $x \in H_0$ *para seu limite* $\varphi(x)$, $x \in H_0$. *Ainda, como* (h_m) *é limitada, então existe* $c > 0$ *tal que:*

$$|\varphi(x)| \leq c|x|_H \ , \ x \in H_0 \tag{1.37}$$

Como φ *é o limite da sequência* (φ_{m_k}) *em* H_0, *existe uma extensão única linear* $\tilde{\varphi}$ *em* H. *Pelo Teorema de Representação de Riez (ver [1], página 247), temos que existe* $h \in H$ *tal que:*

$$\tilde{\varphi}(x) = \langle h, x\rangle_H \ , \ x \in H, \tag{1.38}$$

com h *sendo o limite fraco de* (h_m). *Desta forma o Lema está provado.*

Prosseguimos agora ao complemento da prova do Lema 4.

Seja $U(t) = \{u(s), u(s) \in U, s \in [0,t]\}$ *um subconjunto compacto e convexo do espaço de Hilbert* $H = L^2(0, t; \Re^n)$. *A transformação linear de* H *para* $\Re^n$ *é dada por:*

$$u(.) \to \int_0^t S^{-1}(s)Bu(s)ds, \tag{1.39}$$

e ela mapeia o conjunto $U(t)$ *em* $R(t)$. *Logo* $R(t)$ *é convexo, portanto esta tranformação também mapeia sequências que convergem fracamente em* $R(t)$, *ou seja,* $R(t)$ *é fechado. Pelo Lema 5,* $R(t)$ *é limitado, portanto* $R(t)$ *é compacto, logo, a parte 1 do lema 4 está provada. Para provar a parte 2, lembre-se que:*

$$x_m = \int_0^t S^{-1}(s)Bu_m(s)ds + \int_t^{t_m} S^{-1}(s)Bu_m(s)ds = x_m^1 + x_m^2 \tag{1.40}$$

para algum $u_m(.) \in U(t_m)$. *Como* $t_m \downarrow t$, $x_m^1 \in R(t)$ *e* $x_m^2 \to 0$, *e* $R(t)$ *é fechado,* $a \in R(t)$. *Para mostrar a parte 3 do lema 4, vamos assumir que* $a \in Int(R(t))$ *mas para sequências* $t_m \uparrow t$ *e* $x_m \to a$, $x_m \notin R(t_m)$. *Desde que todo conjunto* $R(t_m)$ *seja convexo, pelo teorema 1.5.4 existe um vetor* $p_m \in \Re^n$, $|p_m| = 1$, *tal que:*

$$\langle x, p_m\rangle \leq \langle x_m, p_m\rangle \ , \ \forall x \in R(t_m) \tag{1.41}$$

Ou seja, podemos assumir que $p_m \to p$ *tal que* $|p| = 1$. *Com* $m \to +\infty$, *obtemos* $\langle x, p\rangle \leq \langle a, p\rangle$ *para* $x \in Fecho(\cup_m R(t_m))$ *e* $\forall x \in R(t)$. *Como* $a \in R(t)$, p *tem que ser nulo, uma contradição. Desta forma o lema 4 está provado.*

Agora, voltamos a prova do teorema 1.5.5. Seja:

$$z(t) = S^{-1}(t)\bar{x} - x \ , \ t \geq 0 \tag{1.42}$$

e $\hat{T}$ o infimo de todos $t > 0$ tais que $z(t) \in R(t)$. Então existe uma sequência decrescente $t_m \downarrow \hat{T}$ tal que $x_m = z(t_m) \in R(t_m)$. Pelo lema 4, $z(\hat{T}) \in R(\hat{T})$, então desta forma existe uma solução ótima para o problema. Para mostrar a parte 2 do teorema 1.5.5, defina $a = z(\hat{T})$. Então $a \in Int(R(\hat{T}))$. Se para $a \in Int(R(\hat{T}))$, então pelo lema 4, existe um número $t < \hat{T}$ tal que $z(t) \in R(t)$, uma contradição com $\hat{T}$. Ou seja, pelo Teorema 1.5.4, existe $\lambda \in \Re^n$, $\lambda \neq 0$, tal que,

$$\langle x - z(\hat{T}), \lambda \rangle \leq 0 \ , \ x \in R(\hat{T}) \tag{1.43}$$

Seja $\hat{u}(t)$ uma estratégia ótima para o problema e $u(.)$ um controle qualquer com valores em U. segue da equação anterior que,

$$\left\langle \int_0^{\hat{T}} S^{-1}(r)(Bu(r) - B\hat{u}(r))dr, \lambda \right\rangle \leq 0, \tag{1.44}$$

ou

$$\int_0^{\hat{T}} \langle B^t(S^t(r))^{-1}\lambda, \hat{u}(r) - u(r)\rangle dr \geq 0 \tag{1.45}$$

Desde que a função $p(t) = (S^t(t))^{-1}\lambda$, $t \in [0, T]$ é uma solução de 1.32, a relação acima se mantém e a relação 1.33 também se mantém, logo o teorema está provado.

Capítulo 2

Jogos Diferenciáveis

2.1 Introdução

O problema abordado neste capítulo trata do estudo de Jogos Diferenciáveis de Soma Zero de 2 Jogadores, que podem ser resumidos pela a escolha de estratégias u e v por dois jogadores que possuem uma dinâmica de interesses variante com o tempo entre si (estado), definido por um sistema de equações diferenciais de 1^o grau. A escolha das estratégias u e v pelos jogadores é baseada na informação gerada por uma Função de Saldo ($\Pi \geq 0$), que gera uma perda para um jogador e um ganho para o outro. Obviamente, este jogo tem soma zero pelo fato que o ganho (Π) de um jogador é exatamente o inverso da perda ($-\Pi$)do outro jogador. Logo, essa dinâmica de interesses entre os dois jogadores gera um problema de otimização a ser estudado.

2.2 Resultados obtidos da Teoria dos Jogos

Analisaremos nesta seção resultados gerais sobre a Teoria dos Jogos, que facilitarão o entendimento da teoria a seguir. Seja E_1 o espaço estratégico do Jogador 1 e E_2 o espaço estratégico do Jogador 2, sendo E_1 e E_2 conjuntos quaisquer. A conseqüencia ou saldo de uma escolha estratégica pareada $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$ é dada por uma função Π definida em $E_1 \times E_2$ com valores em $\Re^+$, tal que o saldo para o Jogador 1 será dado por $\Pi(e_1, e_2)$ (ganho) e o saldo para o Jogador 2 será dado por $-\Pi(e_1, e_2)$ (perda). É evidente que o Jogador 1 terá o interesse de Maximizar Π e o Jogador 2 terá o interesse de Minimizar Π. O Trio (E_1, E_2, Π) define um Jogo de Soma Zero entre dois Jogadores.

Uma situação a ser analisada é quando os dois jogadores conhecem suas respectivas estratégias ótimas e_1^* e e_2^*, mas não conhece a do adversário. Se isso ocorrer, então vale:

$$\forall\ e_1 \in E_1\ ,\ \Pi(e_1, e_2^*) \leq \Pi(e_1^*, e_2^*),$$

$$\forall\ e_2 \in E_2\ ,\ \Pi(e_1^*, e_2^*) \leq \Pi(e_1^*, e_2).$$

O valor $\pi^* = \Pi(e_1^*, e_2^*)$ será chamado de Valor do Jogo (E_1, E_2, Π) e existirá se ocorrer:

$$\sup_{e_1} \inf_{e_2} \Pi(e_1, e_2) = \inf_{e_2} \sup_{e_1} \Pi(e_1, e_2), \tag{2.1}$$

com a desigualdade abaixo sendo mantida:

$$\sup_{e_1} \inf_{e_2} \Pi(e_1, e_2) \leq \inf_{e_2} \sup_{e_1} \Pi(e_1, e_2). \tag{2.2}$$

Dessa forma, se torna natural e bastante importante a procura de pares de estratégias (e_1^*, e_2^*) que satisfaçam a seguinte desigualdade abaixo:

$$\Pi(e_1, e_2^*) \leq \Pi(e_1^*, e_2^*) \leq \Pi(e_1^*, e_2)\ ,\ \forall\ e_1 \in E_1\ e\ \forall\ e_2 \in E_2. \tag{2.3}$$

Chamaremos o par (e_1^*, e_2^*) de Ponto de Sela do Jogo (E_1, E_2, Π).

2.3 Jogos Diferenciáveis de Soma Zero

Nosso objeto de estudo a ser considerado nessa seção se trata de uma modelagem matemática que define um Jogo Diferenciável de Soma Zero entre dois Jogadores com tempo finito t_1. Vamos definir assim como o conjunto de entradas estratégicas do Jogador 1 por $U \subset \Re^{m_u}$, o conjunto de entradas estratégicas do Jogador 2 por $V \subset \Re^{m_v}$ e o conjunto de estados deste jogo como $E \subset \Re^n$. Chamaremos de Estratégia admissível para um jogador funções localmente integráveis em $\Re^+$ em sua imagem. Sejam U_{ad} e V_{ad} o Conjunto de Todas as estratégias admissíveis para os Jogadores 1 e 2, respectivamente. O jogo é realizado no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, de tal forma que $\forall t \in [t_0, t_1]$, $(t, x(t)) \in R \subset \Re^+ \times E$, e o jogo se encerra quando $(t, x(t)) \in T = Fronteira(R)$. Logo $(t_1, x(t_1)) \in T$. As equações referentes aos estados são definidas abaixo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t))\ ,\ x(t_0) = x_0 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} x :&[t_0, t_1] \to \Re^n \\ u :&[t_0, t_1] \to U\ ,\ u \in U_{ad} \\ v :&[t_0, t_1] \to V\ ,\ v \in V_{ad}\ ,\ [t_0, t_1] \subset \Re^+ \end{aligned}$$

com uma função de Saldo:

$$P(t_0, x_0)_{u,v} = h(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t), v(t))dt\ ,\ P \geq 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} g :&R \times U \times V \to \Re \\ h :&R \to \Re, \end{aligned}$$

que o Jogador 1 tem um Saldo $P(t_0, x_0)_{u,v}$ e o jogador 2 tem como Saldo $-P(t_0, x_0)_{u,v}$. É bastante lógico que o Jogador 1 quer Maximizar P e o Jogador 2 quer Minimizar P.

O par (u, v) é escolhido partindo do princípio que os jogadores 1 e 2 só tem conhecimento de sua própria estratégia, não conhecem a estratégia escolhida pelo adversário. Pela Teoria de Controle Ótimo podemos definir seletores teóricos de estratégias, chamados de Estratégias Puras do Jogo ou Classe Estratégica:

$$u(t, x) = (u^1(t, x), ..., u^{m_u}(t, x)) \tag{2.6}$$

$$v(t, x) = (v^1(t, x), ..., v^{m_v}(t, x)) \tag{2.7}$$

Os Jogos, pelas suas naturezas estratégicas, podem possuir restrições nos espaços U e V, tais restrições podem ser definidas pelas transformações abaixo:

$$\Omega_u : (t, x) \rightarrow \Omega_u(t, x) \ , \ \Omega_u \subset U \tag{2.8}$$

$$\Omega_v : (t, x) \rightarrow \Omega_v(t, x) \ , \ \Omega_v \subset V \tag{2.9}$$

Isto restringe os Jogadores 1 e 2 a efetuarem escolhas pareadas $(u(t, x), v(t, x))$ definidos em $\Omega_u \times \Omega_v$. Tais conjuntos costumam ser definidos pelas desigualdades:

$$K_u^i(t, x, u(t, x)) \geq 0 \ , \ i = 1, ..., d_u \tag{2.10}$$

$$K_v^j(t, x, v(t, x)) \geq 0 \ , \ j = 1, ..., d_v \tag{2.11}$$

Com essas considerações, podemos garantir a solução do sistema 2.4 (de acordo com o Teorema de Existência e Unicidade de solução de sistemas de equações diferenciais) e podemos prosseguir procurando soluções para Jogos Diferenciáveis, através da existência de um Valor para o Jogo (U_{ad}, V_{ad}, P).

2.4 Pontos de Sela

De acordo com a Seção 2.2, definimos o conceito de Ponto de Sela de um Jogo. Ampliaremos agora este conceito para um Jogo Diferenciável (U_{ad}, V_{ad}, P), definido por 2.4 e uma Função de Saldo P, definida por 2.5. Seja $(u(t, x), v(t, x)) \in \Omega_u \times \Omega_v$, definiremos como solução estratégica pura (u^*, v^*) do jogo (U_{ad}, V_{ad}, P) se $P(t_0, x_0)_{u^*,v^*}$ tiver um valor único e ainda se ocorrer:

$$P(t_0, x_0)_{u,v^*} \leq P(t_0, x_0)_{u^*,v^*} \leq P(t_0, x_0)_{u^*,v} \ , \ \forall \ (u, v) \in U_{ad} \times V_{ad}. \tag{2.12}$$

O valor único $P(t_0, x_0)_{u^*,v^*}$ é definido como o Valor do Jogo (U_{ad}, V_{ad}) e o par (u^*, v^*) como o Ponto de Sela desse Jogo. Como para cada ponto inicial (t, x) podemos ter estratégias ótimas diferentes, definimos a função Valor do Jogo (U_{ad}, V_{ad}, P) iniciado em (t, x) abaixo:

$$W(t, x) = P(t, x)_{u^*,v^*} \ , \ \forall (t, x) \in R. \tag{2.13}$$

Vamos considerar agora o estudo de estratégias para jogos diferenciáveis que só dependam da posição inicial. Sejam os espaços estratégicos U_{ad} e V_{ad}, tais que o trio (U_{ad}, V_{ad}, P) determine um jogo diferenciável definido em R, com $U_{ad_0} \subset U_{ad}$ e $V_{ad_0} \subset V_{ad}$, sendo U_{ad_0} e V_{ad_0} conjuntos não vazios de estratégias dos jogadores 1 e 2, respectivamente, que só dependam da posição inicial do jogo. Portanto, se analisarmos o jogo (U_{ad_0}, V_{ad_0}, P) e ele possuir pontos de sela, então o jogo (U_{ad}, V_{ad}, P) também o terá. Veja a demonstração abaixo. Seja $\tilde{U}_{ad}$ e $\tilde{V}_{ad}$ conjuntos de todas as estratégias dos jogadores 1 e 2, respectivamente, que só dependam da posição inicial. Vamos supor que o jogo $(\tilde{U}_{ad}, \tilde{V}_{ad}, P)$ é válido e vamos levar em conta 2.8 e 2.9, tais que Ω_u e Ω_v sejam independentes do estado.

Lema 6 *Se o par $(\tilde{u}^*, \tilde{v}^*)$, com $\tilde{u}^* \in \tilde{U}_{ad}$ e $\tilde{v}^* \in \tilde{V}_{ad}$, formam um ponto de sela do jogo $(\tilde{U}_{ad}, \tilde{V}_{ad}, P)$, então também formam um ponto de sela para o jogo (U_{ad}, V_{ad}, P).*

Demonstração:

A idéia desta demonstração consiste em usar o fato que $(\tilde{u}^*, \tilde{v}^*) \in U_{ad} \times V_{ad}$, pois $\tilde{U}_{ad} \subset U_{ad}$ e $\tilde{V}_{ad} \subset V_{ad}$, e provar que $\forall\ u \in U_{ad}$ e $\forall\ v \in V_{ad}$ ocorre:

$$P(t_0, x_0)_{u,\tilde{v}^*} \leq P(t_0, x_0)_{\tilde{u}^*,\tilde{v}^*} \leq P(t_0, x_0)_{\tilde{u}^*,v}\ ,\ \forall\ (t_0, x_0) \in R. \tag{2.14}$$

Sejam ϕ_u e ϕ_v soluções de 2.4, considerando as estratégias $\tilde{u}^*$ e $v \in V_{ad}$ para ϕ_u, e $\tilde{v}^*$ e $u \in U_{ad}$ para ϕ_v. Seja ainda $\tilde{v} \in \tilde{V}_{ad}$ e $\tilde{u} \in \tilde{U}_{ad}$ tais que:

$$\tilde{v}(t) = v(t, \phi_u(t)) \text{ e } \tilde{u}(t) = u(t, \phi_v(t)) \tag{2.15}$$

Como $(u(t,x), v(t,x)) \in \Omega_u(t,x) \times \Omega_v(t,x)$, então $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \Omega_u(t,x) \times \Omega_v(t,x)$, com ϕ_u e ϕ_v soluções de 2.4. Dessa forma, temos:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{v}(t))\ ,\ \phi_u(t_0) = x_0 \tag{2.16}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}^*(t))\ ,\ \phi_v(t_0) = x_0. \tag{2.17}$$

De acordo com as definições de $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$,

$$P(t_0, x_0)_{\tilde{u}^*,v} = P(t_0, x_0)_{\tilde{u}^*,\tilde{v}} \tag{2.18}$$

$$P(t_0, x_0)_{u,\tilde{v}^*} = P(t_0, x_0)_{\tilde{u},\tilde{v}^*}, \tag{2.19}$$

portanto:

$$P(t_0, x_0)_{u,\tilde{v}^*} \leq P(t_0, x_0)_{\tilde{u}^*,\tilde{v}^*} \leq P(t_0, x_0)_{\tilde{u}^*,v}, \tag{2.20}$$

e isso prova o Lema.

O lema acima nos fornece uma forma de investigação local par a procura de pontos de sela (soluções) de um Jogo Diferenciável de 2 jogadores com Soma Zero. Seguimos agora ao capítulo seguinte, oferecendo uma condição necessária para que uma estratégia de um jogador seja ótima.

Capítulo 3

Condição Necessária para existência de Estratégias Ótimas

No capítulo anterior nos esforçamos para definir e entender Jogos Diferenciáveis de Soma Zero entre Dois Jogadores e, após este amplo estudo, podemos comentar algo a mais sobre estratégias ótimas. Elaboramos a definição de Ponto de Sela de um Jogo Diferenciável, que representa as escolhas ótimas dos dois jogadores envolvidos. O que é preciso agora é prosseguir estudando este conceito, propondo uma condição necessária para existência de estratégias ótimas, para podermos elaborar um conceito mais amplo de solução de um Jogo Diferenciável.

3.1 Uma Condição Necessária

Nesta primeira seção extendemos o estudo de Jogos Diferenciáveis (U_{ad}, V_{ad}, P), definidos por 2.4, com P definida por 2.5, para classes de estratégias $C^1(R)$ por partes. Vamos considerar que as funções g e f sejam de classe $C^1(R \times U \times V)$ e que o jogo tenha o seu término na superfície $T \subset Fecho(R)$, sendo T definido por:

$$T = \bigcup_{i=1}^{\alpha} T_i$$

sendo cada T_i uma sub-superfície de T, parametrizada por $(T_i(\sigma), X_i(\sigma))$,$\sigma \in K_i$, T_i e X_i de classe $C^1(K_i)$, $K_i \subset E$ sendo um cubo. Vamos considerar também que esse jogo possua uma série de restrições, de acordo com 2.8 e 2.9. Para este problema específico vamos definir uma região Ξ contida num espaço Σ como um conjunto aberto em Σ.

Definição 1 *Uma coleção finita de subregiões D_1,...,D_l de uma região D será chamada de uma decomposição de D se ocorrer:*

1. *Cada D_i é conexo e tem uma fronteira com finitas superfícies, todas elas contínuas e diferenciáveis.*

2. *$D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$.*

Uma função definida em $\bar{D}$ será $C^l(\bar{D})$ por partes se existe uma decomposição de D tal que esta função seja $C^l(D_i)$, D_i pertencente a alguma decomposição de D.
Para continuarmos, definimos o jogo (U_{ad_0}, V_{ad_0}, P), $\forall\ (t,x) \in R$, tal que U_{ad_0} e V_{ad_0} sejam famílias de estratégias de classe $C^1(R)$ por partes, com funções $u \in U_{ad_0} \neq \varnothing$ e $v \in V_{ad_0} \neq \varnothing$, $u : R \to \Omega_u$ e $v : R \to \Omega_v$. Os pontos de descontinuidade de u e v podem não coincidir, portanto, precisamos impor condições que tratem dessas questão. Seja U_{ad_1} e V_{ad_1} um par maximal dos conjuntos definidos acima , vamos assumir que $\forall (t,x) \in R$ o jogo (U_{ad_1}, V_{ad_1}, P) tenha um ponto de sela (u^*, v^*) e que este ponto de sela é independente de (t,x).

Definição 2 *Seja R uma região. Uma decomposição regular de R será uma decomposição composta por sub-regiões $R_{1,1}$,...,R_{1,j_1},...,R_{i,j_i}, com as condições abaixo sendo satisfeitas.*

1. *As regiões R_i são definidas por:*

$$R_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} Fecho(R_{i,j}) \cap R, \tag{3.1}$$

   de tal forma que R_1,...,R_i seja uma decomposição de R.

2. *Para cada $i = 1, ..., \alpha$, R_i sempre será adjacente a T_i e $R_i \cup T_k = \varnothing$, $i \neq k$.*

3. *Para cada $i = 1, ..., \alpha$, $Fecho(R_{i,j_i}) \cap T_i \neq \varnothing$ e $Fecho(R_{i,j}) \cap T_i = \varnothing$, $j \neq j_i$.*

4. *Para cada $i = 1, ..., \alpha$ e $j = 1, ..., j_i - 1$, o conjunto*

$$M_{i,j} = (Fecho(R_{i,j}) \cap Fecho(R_{i,j+1})) \cap R_i \tag{3.2}$$

   é uma superfície orientada de dimensão n e $C^1(K_{i,j})$, com $K_{i,j}$ sendo um cubo em E e $M_{i,j}$ parametrizada por:

$$t = T_{i,j}(\sigma)\ ,\ x = X_{i,j}(\sigma)\ ,\ \sigma \in K_{i,j} \tag{3.3}$$

5. *Cada superfície $M_{i,j}$ divide R_i em duas regiões disjuntas, tal que $Fecho(M_{i,j}) \cap Fecho(M_{i,k}) = \varnothing$, $j \neq k$.*

6. *Para cada conjunto de inteiros $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., \alpha\}$, o conjunto $N_{\{i_1,...,i_k\}}$ definido abaixo*

$$N_{\{i_1,...,i_k\}} = (Fecho(R_{i_1}) \cap ... \cap Fecho(R_{i_k})) \cap R \tag{3.4}$$

   pode ser vazio ou uma fronteira diferenciável não singular.

Complementando a definição acima, oferecemos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
M_{i,j_i} &= T_i \\
M_{i,0} &= \textit{União de todas as regiões } N_{\{i_1,\ldots i_s\}},\ s=1,...,\alpha \\
R^{+}_{i,j} &= R_{i,j} \cup M_{i,j} \\
R^{-}_{i,j} &= R_{i,j} \cup M_{i,j-1} \\
\tilde{R}_{i,j} &= R^{+}_{i,j} \cup R^{-}_{i,j}\ ,\ i \in \{1,...,\alpha\}\ ,\ j \in \{1,...,j_i\}.
\end{aligned}$$

Agora podemos definir as restrições para (u^*, v^*). Como u^* e v^* são $C^1(R)$ por partes, então há uma decomposição regular de R associada aos pontos de descontinuidade $M_{i,j}$, tal que u^* e v^* sejam $C^1(R_{i,j})$ para cada $R_{i,j} \subset R$. Segue abaixo as restrições para (u^*, v^*).

1. A decomposição associada a (u^*, v^*) é uma decomposição regular.

2. Se $(\tau, \xi) \in R^{-}_{i,j}$, $i = 1, ..., i_r$, $j = 1, ..., j_i$, então existe somente uma trajetória ótima

$$\phi^*(t,\tau,\xi) = \phi^*_i(t,\tau,\xi)\ em\ R_i,\ \tau < t < t_{i,j_i} \tag{3.5}$$

   sendo t_{i,j_i} o tempo que ϕ^* alcança a superfície T_i. Ainda: ϕ^* nunca será tangente a $M_{i,k}$, $k \in \{j, ..., j_i\}$, ou a algum $N_{\{i_1,...,i_r\}}$.

O lema abaixo garante e reforça as restrições acima.

Lema 7 *Seja* $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, $1 \leq j \leq j_i$, *e seja* $(t_{i,k}, x_{i,k}) = (t_{i,k}(\tau, \xi), x_{i,k}(\tau, \xi))$ *uma representação de da intersecção de* ϕ^* *com a superfície* $M_{i,k}$, $j \leq k \leq j_i$. *Então para cada* $j \leq k \leq j_i$, *as funções* $\phi^*(t,\tau,\xi)$, $\phi^*_\xi(t,\tau,\xi)$, $\phi^*_\tau(t,\tau,\xi)$, $\phi^{*'}_\xi(t,\tau,\xi)$ *e* $\phi^{*'}_\tau(t,\tau,\xi)$ *existem e são contínuas para* (τ, ξ) *em* $R_{i,j}$, *com* $t_{i,k-1} \leq t \leq t_{i,k}$ *e os valores das funções acima em* $t = t_{i,k-1}$ *e* $t = t_{i,k}$ *são os limites, calculados do interior de* $R_{i,k}$. *Ainda, se em pontos* $(\bar{\tau}, \bar{\xi}) \in M_{i,k-1}$ *ou* $(\bar{\tau}, \bar{\xi}) \in M_{i,k}$, *nós definimos para estas funções ,limites tais que* $(\tau, \xi) \to (\bar{\tau}, \bar{\xi})$ *do interior de* $R_{i,k}$, *tornando assim as funções* $\phi^*(t,\tau,\xi)$, $\phi^*_\xi(t,\tau,\xi)$, $\phi^*_\tau(t,\tau,\xi)$, $\phi^{*'}_\xi(t,\tau,\xi)$ *e* $\phi^{*'}_\tau(t,\tau,\xi)$ *definidas e contínuas para* $(\tau, \xi) \in \tilde{R}_{i,j}$.

Demonstração do lema.

De acordo com a condição 1., temos que R *possui uma decomposição regular para garantir que o par* (u^*, v^*) *seja um ponto de sela para o jogo* (U_{ad_1}, V_{ad_1}, P), *de tal forma que, ao considerarmos uma região* R_i *com* $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$ *para algum* $1 \leq j \leq j_i$, *temos que* $\phi^*_i(t,\tau,\xi) = \phi^*(t,\tau,\xi)$ *é a trajetória ótima em* R_i *que alcança* T_i. *Sabemos que em cada superfície* $M_{i,j}$, *ou* u^* *ou* v^* *possuem descontinuidades. Para transpormos este obstáculo, vamos tratar de uma forma mais local o problema estudado.*

Seja $u^*_{i,j}$ e $v^*_{i,j}$ extensões $C^1(R_{i,j})$ de u^* e v^* em $R_{i,j}$, com j fixo. Vamos analisar o problema abaixo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^*_{i,j}(t, x(t)), v^*_{i,j}(t, x(t))) \ , \ x(\tau) = \xi, \tag{3.6}$$

com $(\tau, \xi) \in Int(R_{i,j})$. Como $f \in C^1(R \times U \times V)$, segue de $(u^*_{i,j}, v^*_{i,j})$ e dos Teoremas de Existência e Unicidade de soluções de Equações Diferenciais que existe uma única função $\psi(t, \tau, \xi)$ que é solução de 3.6, definida no intervalo $(a(\tau, \xi), b(\tau, \xi)) \subseteq (t_{i,j-1}, t_{i,j})$. Ainda, as funções $\psi_{j\xi}$, $\psi_{j\tau}$, $\psi^{'}_{j\xi}$ e $\psi^{'}_{j\tau}$ existem e e são contínuas em $Int(R_{i,j})$. Como $u^*_{i,j}$ e $v^*_{i,j}$ são extensões de u^* e v^*, que são $C^1(R_{i,j})$, então $\psi_j \in C^1(R_{i,j})$, definida em $[t_{i,j-1}, t_{i,j}]$. Logo, vale:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^*_{i,j}(t, x(t)), v^*_{i,j}(t, x(t))) = f(t, x(t), u^*(t, x(t)), v^*(t, x(t))) \tag{3.7}$$

Para $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, a função $\phi^*(t, \tau, \xi)$ é definida em $\tau \leq t \leq t_i(\tau, \xi)$, sendo t_i o tempo que ϕ^* alcança T_i. Como $\psi_j \in C^1(R_{i,j})$, então $\psi_j \in C^1(\tilde{R}_{i,j})$, logo:

$$\phi^*(t, \tau, \xi) = \psi_j(t, \tau, \xi) \ , \ t \in (t_{i,j-1}, t_{i,j}) \tag{3.8}$$

Se $(\tau, \xi) \in M_{i,j-1}$ ou $(\tau, \xi) \in M_{i,j}$, $t = t_{i,j-1}$ ou $t = t_{i,j}$, cada função relacionada terá o valor computado pelos limites partindo de $Int(R_{i,j})$. Seja agora $(\tau, \xi) \in R_{i,j}$, $1 \leq j \leq j_i$. A trajetória ótima intercepta $M_{i,j}$ em:

$$(t_{i,j}, x_{i,j}) = (t_{i,j}(\tau, \xi), x_{i,j}(\tau, \xi)) = (T_{i,j}(\sigma), X_{i,j}(\sigma)). \tag{3.9}$$

Portanto ϕ^* tem que satisfazer:

$$F(\sigma) = \phi^*(T_{i,j}(\sigma), \tau, \xi) - X_{i,j}(\sigma) = 0. \tag{3.10}$$

Sabemos que ϕ^* irá satisfazer 3.10, pois a matriz jacobiana de F não é singular:

$$\begin{aligned} J(F(\sigma)) &= \psi^{'}_j(t_{i,j}, \tau, \xi) J(T_{i,j}(\sigma)) - J(X_{i,j}(\sigma)) \\ &= \left(\lim_{h \to 0^-} \phi^{*'}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) \right) J(T_{i,j}(\sigma)) - J(X_{i,j}(\sigma)) \end{aligned}$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \lim_{h \to 0^-} \phi^{*'}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) \\ -J(T_{i,j}(\sigma))^t & -J(X_{i,j}(\sigma)) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

tem posto $n + 1$, pois ϕ^* nunca é tangente a $M_{i,j}$. Como a matriz acima é semelhante a:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lim_{h \to 0^-} \phi^{*'}(t_{i,j} + h, \tau, \xi) \\ 0 & -J(F(\sigma)) \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

obviamente $J(F(\sigma))$ tem posto n, sendo $F(\sigma) \in C^1(K_{i,j})$, sendo $K_{i,j}$ um cubo em E.

Como usamos ψ_j acima, podemos considerar $t_{i,j}$ e $x_{i,j}$ como funções C^1 em $(\tau, \xi) \in M_{i,j-1}$ ou $(\tau, \xi) \in M_{i,j}$, calculando assim $t_{i,j}(\tau, \xi)$ e $x_{i,j}(\tau, \xi)$ como *limites partindo de* $\tilde{R}_{i,j}$.

Seja novamente $(\tau,\xi) \in R_{i,j}$, *supondo* $j < j_i$. *Definimos a trajetória ótima* $\phi^*(t,\tau,\xi)$ *em* $\tilde{R}_{i,j+1}$, *com* $(t_{i,j+1}(\tau,\xi), x_{i,j+1}(\tau,\xi))$. *No intervalo* $t_{i,j} \leq t \leq t_{i,j+1}$, *temos:*

$$\phi^*(t,\tau,\xi) = \phi^*(t, t_{i,j}, x_{i,j}), \tag{3.13}$$

pois em $\tilde{R}_{i,j+1}$ *existem* $u^*_{i,j+1} \in C^1(R_{i,j})$ *e* $v^*_{i,j+1} \in C^1(R_{i,j})$, *tais que* $u^*_{i,j+1} = u^*$ *e* $v^*_{i,j+1} = v^*$ *em* $R_{i,j+1}$. *Para* $(a,b) \in \tilde{R}_{i,j+1}$, *seja* $\psi_{j+1}(t,a,b)$ *a solução de:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^*_{i,j+1}(t,x), v^*_{i,j+1}(t,x)) \ , \ x(a) = b. \tag{3.14}$$

Sabemos que ψ_{j+1}, ψ'_{j+1}, $\psi_{j+1,a}$, $\psi_{j+1,b}$, $\psi'_{j+1,a}$ *e* $\psi'_{j+1,b}$ *existem e são contínuas em* $R_{i,j+1}$. *Como visto anteriormente, temos:*

$$\phi^*(t,\tau,\xi) = \psi_{j+1}(t, t_{i,j}, x_{i,j}) = \phi^*(t, t_{i,j}, x_{i,j}) \ , \ t_{i,j} \leq t \leq t_{i,j+1}. \tag{3.15}$$

Pela a hipótese de diferenciação de ψ_{j+1}, *se* $(\tau,\xi) \in M_{i,j}$ *ou* $(\tau,\xi) \in M_{i,j-1}$, *novamente os limites de suas derivadas são calculados partindo do interior de* $R_{i,j}$, *portanto:*

$$\phi^*_\xi(t,\tau,\xi) = \psi_{j+1,a}(t, t_{i,j}, x_{i,j}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j}(\tau,\xi) + \psi_{j+1,b}(t, t_{i,j}, x_{i,j}) \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j}(\tau,\xi). \tag{3.16}$$

Se $t = t_{i,j}$, *temos:*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \phi^*_\xi(t_{i,j}+h,\tau,\xi) = \psi_{j+1,a}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j}(\tau,\xi) \\ + \psi_{j+1,b}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j}(\tau,\xi). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Temos como resultado da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u^*_{i,j+1}(t, x(t)), v^*_{i,j+1}(t, x(t))) \ , \ x(t_{i,j}) = x_{i,j} \Rightarrow \\ x(t) &= x_{i,j} + \int_{t_{i,j}}^t f(s, x(s), u^*_{i,j+1}(s, x(s)), v^*_{i,j+1}(s, x(s)))ds \Rightarrow \\ \psi_{j+1}(t,a,b) &= b + \int_a^t f(s, x(s), u^*_{i,j+1}(s, x(s)), v^*_{i,j+1}(s, x(s)))ds \Rightarrow \\ \therefore \ & \frac{\partial}{\partial a} \psi_{j+1}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) = -f(Z^+_{i,j}) \Rightarrow \\ & \frac{\partial}{\partial b} \psi_{j+1}(t_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}) = I, \end{aligned}$$

sendo I *a matriz identidade e* $Z^+_{i,j}$,

$$Z^+_{i,j} = (t_{i,j}, x_{i,j}, u^*_{i,j+1}(t_{i,j}), v^*_{i,j+1}(t_{i,j})). \tag{3.18}$$

Substituindo em 3.17, temos:

$$\lim_{h\to 0^+} \phi_\xi^*(t_{i,j}+h,\tau,\xi) = -f(Z_{i,j}^+)\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j}(\tau,\xi). \tag{3.19}$$

Para calcularmos $\lim_{h\to 0^-}\phi_\xi^*(t_{i,j}+h,\tau,\xi)$*, substituímos* $\sigma = \sigma(\tau,\xi)$ *em 3.10 usando 3.9,*

$$\tilde{F}(\tau,\xi) = \psi_j(t_{i,j}(\tau,\xi),\tau,\xi) - x_{i,j}(\tau,\xi). \tag{3.20}$$

Calculando $\frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{F}(\tau,\xi)$*, temos:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{F}(\tau,\xi) = \psi_j^{'}(t_{i,j}(\tau,\xi),\tau,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j}(\tau,\xi)& \\ + \frac{\partial}{\partial\xi}\psi_j(t_{i,j}(\tau,\xi),\tau,\xi) + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j}(\tau,\xi) = 0.&\end{aligned} \tag{3.21}$$

Como $(\tau,\xi)\in\tilde{R}_{i,j}$ *e* $t_{i,j-1}\le t\le t_{i,j}$*, nóes temos* $\phi^*(t,\tau,\xi) = \psi_j(t,\tau,\xi)$*, portanto:*

$$\lim_{h\to 0^-}\phi_\xi^*(t_{i,j}+h,\tau,\xi) = -\left(\lim_{h\to 0^-}\phi^*(t_{i,j}+h,\tau,\xi)\right)\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j}(\tau,\xi). \tag{3.22}$$

Vamos definir agora

$$Z_{i,j}^- = (t_{i,j}, x_{i,j}, u_{i,j}^*(t_{i,j},x_{i,j}), v_{i,j}^*(t_{i,j},x_{i,j})), \tag{3.23}$$

e usando o fato que ϕ^* *satisfaz 3.7, finalmente obtemos:*

$$\lim_{h\to 0^-}\phi_\xi^*(t_{i,j}+h,\tau,\xi) = -f(Z_{i,j}^-)\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j}(\tau,\xi). \tag{3.24}$$

Com as considerações acima garantimos uma análise das extensões de ϕ^* *em* $\tilde{R}_{i,j}$*, logo o lema está provado.*

No lema anterior conseguimos analisar todas as propriedades de ϕ^* que serão importantes para o estudo da função de valores $W(\tau,\xi)$ em R. Definimos a função de valores para o Jogo (U_{ad_1}, V_{ad_1}, P):

$$W(\tau,\xi) = h(t_{i,j_i}, x_{i,j_i}) + \int_\tau^{t_{i,j}} \tilde{g}(t)dt + \sum_{k=j}^{j_i-1}\int_{t_{i,k}}^{t_{i,k+1}} \tilde{g}(t)dt, \tag{3.25}$$

com

$$\tilde{g}(t) = g(t,\phi^*(t),u^*(t,\phi^*(t)),v^*(t,\phi^*(t))). \tag{3.26}$$

O teorema abaixo garante algumas propriedades importantes para o prosseguimento do estudo do problema abordado.

Teorema 3.1.1 *A função de valores W é contínua em R. Para cada $R_{i,j}$, as funções W_τ e W_ξ existem e são contínuas e, além disso, possuem extensões contínuas em $\tilde{R}_{i,j}$. Se $M_{i,j}$ é uma fronteira de descontinuidade de somente uma das estratégias u^* ou v^*, então W_τ e W_ξ são contínuas em pontos de $M_{i,j}$. A função W satisfaz abaixo, para todos os valores de $R \cup T$:*

$$\begin{aligned} g(\tau,\xi,u,v^*) + \langle W_\xi(\tau,\xi), f(\tau,\xi,u,v^*)\rangle \leq& \\ -W_\tau(\tau,\xi) \leq& g(\tau,\xi,u^*,v) + \langle W_\xi(\tau,\xi), f(\tau,\xi,u^*,v)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} u^* = u^*(\tau,\xi)\ ,\ v^* = v^*(\tau,\xi) \\ u \in U\ ,\ v \in V, \\ g(\tau,\xi,u^*,v^*) + \langle W_\xi(\tau,\xi), f(\tau,\xi,u^*,v^*)\rangle = -W_\tau(\tau,\xi) \end{gathered}$$

Ainda, os valores de W_τ, W_ξ, u^* e v^* como limites nos pontos em T, nas fronteiras $N_{i_1,\ldots,i_k}$, e em fronteiras de descontinuidade $M_{i,j}$

Demonstração 3.1.1 *Pela definição de W e pelo lema 7, segue que $W \in C^1(R_{i,j})$. Logo, se $(\tau_0,\xi_0) \in M_{i,j}$ ou $(\tau_0,\xi_0) \in M_{i,j-1}$, os limites*

$$\lim_{(\tau,\xi)\to(\tau_0,\xi_0)} W_\xi(\tau,\xi) \text{ e } \lim_{(\tau,\xi)\to(\tau_0,\xi_0)} W_\tau(\tau,\xi), \text{ com } (\tau,\xi) \in R_{i,j}, \tag{3.27}$$

existem e as funções que calcularmos utilizando esses limites nos pontos (τ_0,ξ_0) são contínuas em $\tilde{R}_{i,j}$. Seja o conjunto $N(\tau,\xi)$ com as seguintes propriedades:

1. $N(\tau,\xi) \subset R_{i,j}$
2. $(\tau,\xi) \in N(\tau,\xi)$
3. *Existe $\gamma > 0$ tal que o intervalo $[\tau,\tau+\gamma]$ representa a projeção de $N(\tau,\xi)$ na reta t.*
4. *A função*

$$\hat{v}(t,x) = \begin{cases} v^*(t,x) & ,\text{ se } (t,x) \notin N(\tau,\xi) \\ v(t,x) & ,\text{ se } (t,x) \in N(\tau,\xi) \end{cases} \tag{3.28}$$

é, tal que $\hat{v} \in V_{ad_1}$

Seja $\hat{\psi}(t)$ a trajetória resultante da estratégia pareada $(u^*,\hat{v})$, começando em (τ,ξ), com $\tau+\gamma$ o tempo em que $\hat{\psi}$ intercepta a fronteira de $N(\tau,\xi)$. Temos:

$$\begin{aligned} W(\tau,\xi) =& P(\tau,\xi)_{u^*,v^*} \leq P(\tau,\xi)_{u^*,\hat{v}} \Rightarrow \\ P(\tau,\xi)_{u^*,\hat{v}} =& h(\bar{t},\bar{x}) + \int_\tau^{\bar{t}} \hat{g}(t)dt \\ =& h(\bar{t},\bar{x}) + \int_\tau^{\tau+\delta} \hat{g}(t)dt + \int_{\tau+\delta}^{\bar{t}} \hat{g}(t)dt \\ =& W(\tau+\delta,\hat{\psi}(\tau+\delta)) + \int_\tau^{\tau+\delta} \hat{g}(t)dt, \end{aligned}$$

com

$$\hat{g}(t) = g(t, \hat{\psi}(t), u^*(t, \hat{\psi}(t)), \hat{v}(t, \hat{\psi}(t))) \tag{3.29}$$

$$\therefore W(\tau, \xi) - W(\tau + \delta, \hat{\psi}(\tau + \delta)) \leq \int_{\tau}^{\tau+\delta} \hat{g}(t)dt. \tag{3.30}$$

Agora, levando em consideração $N(\tau, \xi) \to (\tau, \xi)$*, implica* $\delta \to 0$*. Como* $W_\tau \in C^1(R_{i,j})$ *e* $W_\xi \in C^1(R_{i,j})$*, podemos aplicar o teorema do valor médio,*

$$W(\tau, \xi) - W(\tau + \delta, \hat{\psi}(\tau + \delta)) = -W_\tau(\tau, \xi)\delta - W_\xi(\tau, \xi)(\hat{\psi}(\tau + \delta) - \xi), \tag{3.31}$$

mas:

$$\hat{\psi}(\tau + \delta) - \xi = \hat{\psi}(\tau + \delta) - \hat{\psi}(\tau) = f(\tau, \xi, u^*(\tau, \xi), \hat{v}(\tau, \xi))\delta$$

$$\therefore \ -(W_\tau(\tau, \xi) + W_\xi(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u^*(\tau, \xi), \hat{v}(\tau, \xi)))\delta \leq \int_{\tau}^{\tau+\delta} \hat{g}(t)dt.$$

Concluindo:

$$-W_\tau(\tau, \xi) \leq g(\tau, \xi, u^*(\tau, \xi), v) + W_\xi(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u^*(\tau, \xi), v), \tag{3.32}$$

resultado mantido $\forall v \in V_{ad_1}$*. Podemos conseguir um resultado análogo* $\forall u \in U_{ad_1}$*:*

$$-W_\tau(\tau, \xi) \geq g(\tau, \xi, u, v^*(\tau, \xi)) + W_\xi(\tau, \xi) f(\tau, \xi, u, v^*(\tau, \xi)). \tag{3.33}$$

Combinando 3.32 e 3.33, temos:

$$g^{u,v^*} + W_\xi(\tau, \xi) f^{u,v^*} \leq -W_\tau(\tau, \xi) \leq g^{u^*,v} + W_\xi(\tau, \xi) f^{u^*,v}, \tag{3.34}$$

com:

$$\begin{aligned} g(\tau, \xi, u, v^*(\tau, \xi)) &= g^{u,v^*}, \\ g(\tau, \xi, u^*(\tau, \xi), v) &= g^{u^*,v}, \\ f(\tau, \xi, u, v^*(\tau, \xi)) &= f^{u,v^*}, \\ f(\tau, \xi, u^*(\tau, \xi), v) &= f^{u^*,v}. \end{aligned}$$

Logo, vale

$$\min_{u \in U_{ad_1}} \max_{v \in V_{ad_1}} \bar{g} + W_\xi \bar{f} = \max_{v \in V_{ad_1}} \min_{u \in U_{ad_1}} \bar{g} + W_\xi \bar{f}, \tag{3.35}$$

com

$$\bar{g} = g(\tau, \xi, u, v) \ , \bar{f} = f(\tau, \xi, u, v) \ e \ W_\xi = W_\xi(\tau, \xi). \tag{3.36}$$

O resultado acima é um dos mais importantes desta seção, pois é uma condição bastante forte para o entendimento de pontos de sela de um jogo (U_{ad_1}, V_{ad_1}, P)*.*

Agora vamos procurar mostrar de alguma forma que W *é contínua em* R*. Seja*

$(\tau,\xi) \in M_{i,j}$, tal que $M_{i,j}$ é uma fronteira de descontinuidade de u^* ou v^*. Os limites

$$W_\tau^-(\tau,\xi) = \lim_{(t^-,x^-)\to(\tau,\xi)} W_\tau(t^-,x^-)\ ,\ (t^-,x^-) \in R_{i,j}, \tag{3.37}$$

$$W_\xi^-(\tau,\xi) = \lim_{(t^-,x^-)\to(\tau,\xi)} W_\xi(t^-,x^-)\ ,\ (t^-,x^-) \in R_{i,j}, \tag{3.38}$$

$$W_\tau^+(\tau,\xi) = \lim_{(t^+,x^+)\to(\tau,\xi)} W_\tau(t^+,x^+)\ ,\ (t^+,x^+) \in R_{i,j+1} \ e \tag{3.39}$$

$$W_\xi^+(\tau,\xi) = \lim_{(t^+,x^+)\to(\tau,\xi)} W_\xi(t^+,x^+)\ ,\ (t^+,x^+) \in R_{i,j+1}, \tag{3.40}$$

representam o comportamento de W entre $R_{i,j}$ e $R_{i,j+1}$. Vamos supor que v^* é descontínua em $M_{i,j}$ e que u^* seja contínua. Seja $(\tau,\xi) \in M_{i,j}$ e seja $(t(s),x(s)) \in C^1((-1,1))$ uma curva contida em $M_{i,j}$ e $(t(0),x(0)) = (\tau,\xi)$. Seja $w(s) = W(t(s),x(s))$. Como $M_{i,j} \in C^1(K_{i,j})$ e W_t^+, W_x^+ e W^+ são contínuas em $\tilde{R}_{i,j+1}$, segue que existe $\tilde{W}$ definida numa vizinhança N de (τ,ξ), tal que para $(t,x) \in \tilde{R}_{i,j+1} \cap N$, temos $\tilde{W}(t,x) = W(t,x)$. Logo:

$$w(s) = W(t(s),x(s)) = \tilde{W}(t(s),x(s)). \tag{3.41}$$

Ou seja, existe $w^{'}(0)$ tal que:

$$w^{'}(0) = \tilde{W}_t(\tau,\xi)t^{'}(0) + \tilde{W}_x(\tau,\xi)x^{'}(0) = W_t^+(\tau,\xi)t^{'}(0) + W_x^+(\tau,\xi)x^{'}(0). \tag{3.42}$$

Por argumentos similares, temos que:

$$w^{'}(0) = W_t^-(\tau,\xi)t^{'}(0) + W_x^-(\tau,\xi)x^{'}(0). \tag{3.43}$$

Portanto:

$$(W_t^+(\tau,\xi) - W_t^-(\tau,\xi))t^{'}(0) + (W_x^+(\tau,\xi) - W_x^-(\tau,\xi))x^{'}(0) = 0. \tag{3.44}$$

A equação acima nos leva a supor que $(W_t^+(\tau,\xi) - W_t^-(\tau,\xi), W_x^+(\tau,\xi) - W_x^-(\tau,\xi))$ é um vetor não nulo ortogonal a $M_{i,j}$ ou $W_t^+(\tau,\xi) = W_t^-(\tau,\xi)$ e $W_x^+(\tau,\xi) = W_x^-(\tau,\xi)$. Seja N uma vizinhança de (τ,ξ). Vamos elaborar estratégias v^+ e v^- tais que:

$$v^+(t,x) = \begin{cases} v^*_{i,j+1}(t,x) & ,\ (t,x) \in N \\ v^*(t,x) & ,\ (t,x) \notin N \end{cases} \tag{3.45}$$

$$v^-(t,x) = \begin{cases} v^*_{i,j}(t,x) & ,\ (t,x) \in N \\ v^*(t,x) & ,\ (t,x) \notin N \end{cases}. \tag{3.46}$$

Como u^* é contínua em $M_{i,j}$, temos:

$$u^*(\tau,\xi) = u^*_{i,j}(\tau,\xi) = u^*_{i,j+1}(\tau,\xi). \tag{3.47}$$

Pelas desigualdades 3.34 e 3.35:

$$
\begin{aligned}
-W_t^+(\tau,\xi) &= g(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^+(\tau,\xi)) + W_x^+(\tau,\xi)f(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^+(\tau,\xi)) \\
&\leq g(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^-(\tau,\xi)) + W_x^+(\tau,\xi)f(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^-(\tau,\xi)) \\
&e \\
-W_t^-(\tau,\xi) &= g(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^-(\tau,\xi)) + W_x^-(\tau,\xi)f(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^-(\tau,\xi)) \\
&\leq g(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^+(\tau,\xi)) + W_x^-(\tau,\xi)f(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^+(\tau,\xi)).
\end{aligned}
$$

Logo:

$$W_t^+(\tau,\xi) - W_t^-(\tau,\xi) \leq -(W_x^+(\tau,\xi) - W_x^-(\tau,\xi))f(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^+(\tau,\xi)) \tag{3.48}$$

$$W_t^+(\tau,\xi) - W_t^-(\tau,\xi) \geq -(W_x^+(\tau,\xi) - W_x^-(\tau,\xi))f(\tau,\xi,u^*(\tau,\xi),v^-(\tau,\xi)) \tag{3.49}$$

$$\tag{3.50}$$

Se $(W_t^+(\tau,\xi) - W_t^-(\tau,\xi), W_x^+(\tau,\xi) - W_x^-(\tau,\xi))$ *é ortogonal a* $M_{i,j}$ *e for diferente de zero, vale as duas desigualdades acima. Caso a igualdade ocorresse em alguma das desigualdades acima,* $(1, f(t,x,u^*,v^+))$ *ou* $(1, f(t,x,u^*,v^-))$ *seria tangente a* $M_{i,j}$*, uma contradição. Portanto* $W_t^+(\tau,\xi) = W_t^-(\tau,\xi)$ *e* $W_x^+(\tau,\xi) = W_x^-(\tau,\xi)$*, e isso prova o teorema.*

Garantimos com o teorema anterior não só a continuidade de W em R como garantimos sua derivabilidade nas regiões $R_{i,j}$. Um resultado incrível deste teorema é que W satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi:

$$H(t,x,u,v,\lambda) = g(t,x,u,v) + \lambda f(t,x,u,v), \tag{3.51}$$

que é equivalente a

$$H(t,x,u^*(t,x),v^*(t,x),W_x(t,x)) + W_t(t,x) = 0. \tag{3.52}$$

Prosseguimos com um estudo mais elaborado sobre as relações de W com a Hamiltoniana 3.52, e para isso enunciamos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.2 *Seja* $\phi^*(t,\tau,\xi)$ *uma trajetória ótima de um ponto* $(\tau,\xi) \in R_{i,j}$*. Então existe uma função* $\lambda(t,\tau,\xi)$ *definida em* $t \in [\tau, t_{i,j_i}(\tau,\xi)]$ *e* $t \neq t_{i,k}$*,* $k \in \{j, j+1, ..., j_i - 1\}$*, de tal forma que as condições abaixo se mantém:*

1. λ *é contínua em seu domínio de definição e os pontos* $t_{i,k}$ *possuem limites laterais* λ_k^+ *e* λ_k^-*.*
2. *As funções* λ *e* ϕ^* *satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais:*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) =& \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t,x(t),u^*(t,x(t)),v^*(t,x(t))), \\
\dot{\lambda}(t) =& -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x(t),u^*(t,x(t)),v^*(t,x(t))),
\end{aligned}
$$

sendo H *a Hamiltoniana 3.52 ,e para* $t = t_{i,k}$*,* $k \in \{j, j+1, ..., j_i - 1\}$*, estas equações se mantém para os limites laterais* λ_k^+ *e* λ_k^-*.*

3. *Se $M_{i,k}$, $k \in \{j, j+1, ..., j_i - 1\}$, é uma fronteira de descontinuidade de somente uma das funções u^* ou v^*, então λ é contínua em $t = t_{i,k}$. Caso contrário vale:*

$$H(\Pi_{i,k}^{-})\frac{\partial t_{i,k}}{\partial \xi} - \lambda_k^{-}\frac{\partial x_{i,k}}{\partial \xi} = H(\Pi_{i,k}^{+})\frac{\partial t_{i,k}}{\partial \xi} - \lambda_k^{+}\frac{\partial x_{i,k}}{\partial \xi}, \tag{3.53}$$

com

$$\Pi_{i,k}^{\pm} = (t_{i,k}, x_{i,k}, u^{*\pm}(t_{i,k}, x_{i,k}), v^{*\pm}(t_{i,k}, x_{i,k}), \lambda_k^{\pm}). \tag{3.54}$$

4. *Para $t = t_{i,j_i}$, vale:*

$$h_\sigma(t_{i,j_i}(\tau,\xi), x_{i,j_i}(\tau,\xi))\frac{\partial}{\partial \xi}\sigma(\tau,\xi) + H(P_{i,j_i}, \lambda_{j_i})\frac{\partial}{\partial \xi}t_{i,j_i}(\tau,\xi) - \lambda_{j_i}x_{i,j_i} = 0. \tag{3.55}$$

5. *Se $x(t) = \phi^*(t,\tau,\xi)$, $t \geq \tau$, então:*

$$W_x(t,x) = \lambda(t,\tau,\xi). \tag{3.56}$$

6. *Para todo $t \in [\tau, t_{i,j_i}]$ e $t \neq t_{i,k}$, $k \in \{j, ..., j_i - 1\}$, vale:*

$$\begin{aligned}&\max_u \min_v H(t, \phi^*(t,\tau,\xi), u, v, \lambda(t)) = \min_v \max_u H(t, \phi^*(t,\tau,\xi), u, v, \lambda(t))\\ &= H(t, \phi^*(t,\tau,\xi), u^*(t, \phi^*(t,\tau,\xi)), v^*(t, \phi^*(t,\tau,\xi)), \lambda(t)),\end{aligned}$$

e em $t = t_{i,k}$, $k \in \{j, ..., j_i - 1\}$, as equações acima se mantém para limites laterais λ_k^+ e λ_k^-.

Demonstração 3.1.2 *Vamos primeiro desenvolver $W_\xi(t,x)$, de acordo com a definição de W e após isso, provar um lema que facilitará a demonstração deste teorema,*

$$\begin{aligned}&W_\xi(\tau,\xi) = h_\sigma(t_{i.j_i}(\sigma), x_{i.j_i}(\sigma))\frac{\partial}{\partial \xi}\sigma(\tau,\xi) + g(P_{i,j_i})\frac{\partial}{\partial \xi}t_{i,j_i}(\tau,\xi)\\ &+ \sum_{k=j}^{j_i-1}(g(P_{i,k}^-) - g(P_{i,k}^+))\frac{\partial}{\partial \xi}t_{i,k}(\tau,\xi)\\ &+ \int_\tau^{t_{i,j}}(\bar{g}_x(t) + \bar{g}_u(t)u_x^*(t, \phi(t,\tau,\xi)) + \bar{g}_v(t)v_x^*(t, \phi(t,\tau,\xi)))\phi_\xi^*(t,\tau,\xi)dt\\ &+ \sum_{k=j}^{j_i-1}\int_{t_{i,k}}^{t_{i,k+1}}(\bar{g}_x(t) + \bar{g}_u(t)u_x^*(t, \phi(t,\tau,\xi)) + \bar{g}_v(t)v_x^*(t, \phi(t,\tau,\xi)))\phi_\xi^*(t,\tau,\xi)dt,\end{aligned} \tag{3.57}$$

com

$$\bar{g}(t) = g(t, \phi^*(t,\tau,\xi), u^*(t, \phi^*(t,\tau,\xi)), v^*(t, \phi^*(t,\tau,\xi))), \tag{3.58}$$

$$P_{i,k} = (t_{i,k}, \phi^*(t_{i,k},\tau,\xi), u^*(t_{i,k}, \phi^*(t_{i,k},\tau,\xi)), v^*(t_{i,k}, \phi^*(t_{i,k},\tau,\xi))), \tag{3.59}$$

$$P^+_{i,k} = (s, \phi^*(s,\tau,\xi), u^*(s, \phi^*(s,\tau,\xi)), v^*(s, \phi^*(s,\tau,\xi)))\ ,\ s \in [t_{i,k-1}, t_{i,k}],\ s \to t_{i,k}, \tag{3.60}$$

$$P^-_{i,k} = (s, \phi^*(s,\tau,\xi), u^*(s, \phi^*(s,\tau,\xi)), v^*(s, \phi^*(s,\tau,\xi)))\ ,\ s \in [t_{i,k}, t_{i,k+1}],\ s \to t_{i,k}, \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} h_\sigma(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) =& \frac{\partial}{\partial t} h(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} t_{i,j_i}(\sigma) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} h(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} x_{i,j_i}(\sigma). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Como podemos ver, o cálculo de W_ξ envolve uma série de operações complicadas que vão depedender de certas condições em cada uma das superfícies de descontinuidades de u^* ou v^*, ou seja, teremos que procurar alguma técnica que nos ajude a transpor este obstáculo. Veja o lema abaixo.

Lema 8 *Existe uma função $\lambda(t,\tau,\xi)$ definida para $(\tau,\xi) \in R_{i,j}$ e todos os intervalos $(t_{i,k-1}, t_{i,k})$, com $k \in \{j, j+1, ..., j_i\}$, respeitando os resultados abaixo.*

1. *Para $(\tau,\xi) \in R_{i,j}$ e $t \in (t_{i,k-1}, t_{i,k})$, λ é uma função contínua de (t,τ,ξ).*

2. *Os limites,*

   $$\lambda^-_k = \lim_{t \to t^-_{i,k}} \lambda(t,\tau,\xi)\ , \lambda^+_k = \lim_{t \to t^+_{i,k}} \lambda(t,\tau,\xi)\ e\ \lambda_{j_i} = \lim_{t \to t^-_{i,j_i}} \lambda(t,\tau,\xi), \tag{3.63}$$

   são únicos. Além disso, λ^-_k e λ^+_k satisfazem 3.54 e λ_{j_i} satisfaz a equação abaixo:

   $$h_\sigma(t_{i,j_i}(\tau,\xi), x_{i,j_i}(\tau,\xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma(\tau,\xi) + H(P_{i,j_i}, \lambda_{j_i}) \frac{\partial}{\partial \xi} t_{i,j_i}(\tau,\xi) - \lambda_{j_i} \frac{\partial}{\partial \xi} x_{i,j_i} = 0. \tag{3.64}$$

3. *Em cada intervalo $[t_{i,k-1}, t_{i,k}]$, $k \in \{j, ..., j_i\}$, $\dot{\lambda}(t,\tau,\xi)$ existe e satisfaz a equação abaixo:*

   $$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, \phi^*(t,\tau,\xi), u^*(t, \phi^*(t,\tau,\xi)), v^*(t, \phi^*(t,\tau,\xi)), \lambda(t)), \tag{3.65}$$

   com os devidos limites laterais em $t_{i,k}$, calculados do interior de $R_{i,k}$.

Demonstração do Lema.

Vamos aplicar o método dos Multiplicadores de Lagrange para acharmos um *ponto em K_i, um cubo em E, que define o término da trajetória ótima ϕ^*, associada a W. Dessa forma, temos:*

$$h_\sigma(t_{i,j_i}(\tau,\xi), x_{i,j_i}(\tau,\xi)) + g(P_{i,j_i})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,j_i} + \lambda_{j_i}\left(f(P_{i,j_i})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,j_i} - \frac{\partial}{\partial\sigma}X_{i,j_i}\right) = 0 \tag{3.66}$$

Pelo Princípio do Máximo, se trocarmos $f(P_{i,j_i})$ por $\phi(t_{i,j_i},\tau,\xi)$, a equação acima define unicamente λ_{j_i} como uma função contínua de (τ,ξ) em $R_{i,j}$. Reescrevendo, temos:

$$h_\sigma(t_{i,j_i}(\tau,\xi), x_{i,j_i}(\tau,\xi))\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma(\tau,\xi) + H(P_{i,j_i},\lambda_{j_i})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j_i}(\tau,\xi) - \lambda_{j_i}\frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j_i}(\tau,\xi) = 0. \tag{3.67}$$

Aplicando mais uma vez o Princípio do Máximo para λ em $[t_{i,j-1}(\tau,\xi), t_{i,j_i}(\tau,\xi)]$, considere a equação diferencial abaixo,

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial}{\partial x}H(t,\phi^*(t,\tau,\xi), u^*(t,\phi^*(t,\tau,\xi)), v^*(t,\phi^*(t,\tau,\xi)), \lambda(t)), \tag{3.68}$$

sujeito as condições iniciais:

$$\lambda(t_{i,j_i}) = \lambda_{j_i} \tag{3.69}$$

Novamente pelo Princípio do Máximo, sabemos que 3.68 é um sistema linear em λ com uma condição inicial, logo possui uma solução única definida em $[t_{i,j-1}, t_{i,j_i}]$ e como λ_{j_i} e t_{i,j_i} são funções contínuas de $(\tau,\xi) \in R_{i,j}$, temos:

$$\lambda = \lambda(t, t_{i,j_i}, \lambda_{j_i}) = \lambda(t,\tau,\xi), \tag{3.70}$$

com $\lambda(t,\tau,\xi)$ contínua em $(t,\tau,\xi) \in [t_{i,j-1}, t_{i,j_i}] \times R_{i,j}$.

Agora, seja $\lambda^+_{j_i-1} = \lambda(t^+_{i,j_i-1},\tau,\xi)$. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{aligned} -\lambda^-_{j_i-1}\left(f(P^-_{i,j_i-1})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,j_i-1} - \frac{\partial}{\partial\sigma}X_{i,j_i-1}\right) &= \\ (g(P^-_{i,j_i-1}) - g(P^+_{i,j_i-1}))\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,j_i-1}& \\ - \lambda_{j_i}\left(f(P^+_{i,j_i-1})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,j_i-1} - \frac{\partial}{\partial\sigma}X_{i,j_i-1}\right)& \end{aligned} \tag{3.71}$$

Como $\lim_{t\to t_{i,j_i-1}} \dot{\phi}^*(t,\tau,\xi) = f(P^+_{i,j_i-1})$, pelo lema 7 e pela continuidade em (τ,ξ) de $\lambda(t_{i,j_i-1},\tau,\xi)$, segue que o sistema acima define $\lambda^-_{j_i-1}$ de forma única como função contínua de $(\tau,\xi) \in R_{i,j}$. Logo, para a condição inicial

$$\lambda(t_{i,j_i-1}) = \lambda^-_{j_i-1}, \tag{3.72}$$

a equação 3.68 possui uma solução única no intervalo $[t_{i,j_i-2}, t_{i,j_i-1}]$. Ainda, a solução $\lambda(t,\tau,\xi)$ é uma solução contínua em $[t_{i,j_i-2}, t_{i,j_i-1}] \times R_{i,j}$. É bastante *trivial checar que a equação 3.71, pode ser escrita utilizando a notação da função Hamiltoniana H:*

$$H(\Pi^-_{i,j_i-1})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,j_i-1}-\lambda^-_{j_i-1}\frac{\partial}{\partial\sigma}X_{i,j_i-1} = H(\Pi^+_{i,j_i-1})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,j_i-1}-\lambda^+_{j_i-1}\frac{\partial}{\partial\sigma}X_{i,j_i-1}, \tag{3.73}$$

com

$$\begin{aligned}
&\Pi^{\pm}_{i,k} = (t_{i,k}, x_{i,k}, u^{*\pm}(t_{i,k}, x_{i,k}), v^{*\pm}(t_{i,k}, x_{i,k}))\\
&u^{*+} = u^*_{i,k+1}\ ,\ u^{*-} = u^*_{i,k}\\
&v^{*+} = v^*_{i,k+1}\ ,\ v^{*-} = v^*_{i,k}.
\end{aligned}$$

Checando a relação 3.71 e adaptando para k, temos:

$$\begin{aligned}
-\lambda^-_k\left(f(P^-_{i,k})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,k} - \frac{\partial}{\partial\sigma}X_{i,k}\right) &= \\
(g(P^-_{i,k}) - g(P^+_{i,k}))\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,k}&\\
- \lambda_k\left(f(P^+_{i,k})\frac{\partial}{\partial\sigma}T_{i,k} - \frac{\partial}{\partial\sigma}X_{i,k}\right)&
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Retrocedendo no tempo, até $k = j$, e multiplicando 3.74 por $\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}(\tau,\xi)$, provamos o lema.

Retornando para a relação 3.57, com λ sendo uma função de acordo com o lema anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial}{\partial x}H(t, \phi^*(t,\tau,\xi), u^*(t,\tau,\xi), v^*(t,\tau,\xi))\\
&= -(\bar{g}_x(t) + \bar{g}_u(t)\bar{u}^*_x(t) + \bar{g}_v(t)\bar{v}^*_x(t)) - \lambda(t)(\bar{f}_x(t) + \bar{f}_u(t)\bar{u}^*_x(t) + \bar{f}_v(t)\bar{v}^*_x(t)).
\end{aligned}$$

Logo:

$$\bar{g}_x(t) + \bar{g}_u(t)\bar{u}^*_x(t) + \bar{g}_v(t)\bar{v}^*_x(t) = -(\dot{\lambda}(t) + \lambda(t)(\bar{f}_x(t) + \bar{f}_u(t)\bar{u}^*_x(t) + \bar{f}_v(t)\bar{v}^*_x(t))). \tag{3.75}$$

Ou seja, a relação 3.57 fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
W_\xi(\tau,\xi) = {} & h_\sigma(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma))\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma(\tau,\xi) + g(P_{i,j_i})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j_i}(\tau,\xi)\\
& + \sum_{k=j}^{j_i-1}\left((g(P^-_{i,k}) - g(P^+_{i,k}))\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,k}(\tau,\xi)\right)\\
& + \int_\tau^{t_{i,j}}(-(\dot{\lambda}(t) + \lambda(t)(\bar{f}_x(t) + \bar{f}_u(t)\bar{u}^*_x(t) + \bar{f}_v(t)\bar{v}^*_x(t)))\phi^*_\xi(t,\tau,\xi))dt\\
& + \sum_{k=j}^{j_i-1}\int_{t_{i,k}}^{t_{i,k+1}}(-(\dot{\lambda}(t) + \lambda(t)(\bar{f}_x(t) + \bar{f}_u(t)\bar{u}^*_x(t) + \bar{f}_v(t)\bar{v}^*_x(t)))\phi^*_\xi(t,\tau,\xi))dt.
\end{aligned}$$

Como:

$$\dot{\phi}^*(t,\tau,\xi) = f(t,\phi^*(t,\tau,\xi),u^*(t,\phi^*(t,\tau,\xi)),v^*(t,\phi^*(t,\tau,\xi))), \tag{3.76}$$

e pelo lema 7, segue que para $t \in [t_{i,k}, t_{i,k+1}]$, $k \in \{j, ..., j_i\}$,

$$\phi^*_{t\xi}(t,\tau,\xi) = \dot{\phi}^*_\xi(t,\tau,\xi) = (\bar{f}_x(t) + \bar{f}_u(t)\bar{u}_x(t) + \bar{f}_v(t)\bar{v}_x(t))\phi^*_\xi(t,\tau,\xi). \tag{3.77}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} W_\xi(\tau,\xi) &= h_\sigma(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma))\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma(\tau,\xi) + g(P_{i,j_i})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j_i}(\tau,\xi) \\ &+ \sum_{k=j}^{j_i-1}\left((g(P^-_{i,k}) - g(P^+_{i,k}))\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,k}\right) \\ &+ \sum_{k=j}^{j_i-1}(\lambda^+_k\phi^*_\xi(t^+_{i,k},\tau,\xi) - \lambda^-_k\phi^*_\xi(t^-_{i,k},\tau,\xi)) \\ &- \lambda_{j_i}\phi^*_\xi(t_{i,j_i},\tau,\xi) + \lambda(\tau,\tau,\xi)\phi^*_\xi(\tau,\tau,\xi). \end{aligned}$$

Pelo lema 7, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t^+_{i,j}}\phi^*_\xi(t,\tau,\xi) &= -f(P^+_{i,j})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j} + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j} \\ \lim_{t\to t^-_{i,j}}\phi^*_\xi(t,\tau,\xi) &= -f(P^-_{i,j})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j} + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} W_\xi(\tau,\xi) &= h_\sigma(t_{i,j_i}(\sigma), x_{i,j_i}(\sigma))\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma(\tau,\xi) \\ &+ g(P_{i,j_i})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j_i} + \sum_{k=j}^{j_i-1}\left((g(P^-_{i,k}) - g(P^+_{i,k}))\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,k}\right) \\ &+ \sum_{k=j}^{j_i-1}\left(\lambda^+_k\Big(-f(P^+_{i,k})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,k} + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j}\Big) - \lambda^-_k\Big(-f(P^-_{i,k})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,k} + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j}\Big)\right) \\ &- \lambda_{j_i}\Big(-f(P_{i,j_i})\frac{\partial}{\partial\xi}t_{i,j_i} + \frac{\partial}{\partial\xi}x_{i,j_i}\Big) + \lambda(\tau,\tau,\xi) \\ &= \lambda(\tau,\tau,\xi), \end{aligned}$$

resultado garantido por 3.54 e 3.66. Ou seja, para $t > \tau$, *vale:*

$$W_x(t,x) = \lambda(t,t,x), \tag{3.78}$$

pois seja $\hat{\xi} = \phi^*(\hat{\tau},\tau,\xi)$, *para* $\hat{\tau} > \tau$, *então para* $t > \hat{\tau}$ *vale* $\phi^*(t,\hat{\tau},\hat{\xi}) = \phi^*(t,\tau,\xi)$. *Esta mesma regra é aplicável a* λ. *Desde que* W_x *seja contínua em* *nas fronteiras de descontinuidades de somente uma das funções* u^* *e* v^**, para* (τ, ξ) *fixo,* λ *é contínua em valores* $t_{i,k}$*, logo, se* (t, x) *é um ponto da trajetória* $(t, \phi^*(t, \tau, \xi))$*, então segue de 3.35 e de 3.78 a relação abaixo:*

$$\min_u \max_v H(t, x, u, v, \lambda) = \max_v \min_u H(t, x, u, v, \lambda) = H(t, \phi^*, u^*, v^*, \lambda) = -W_t(t, x) \tag{3.79}$$

E isso prova o teorema.

Capítulo 4

Comentários sobre um exemplo intuitivo

4.1 Introdução

Neste capítulo finalizaremos o estudo sobre Jogos Diferenciáveis de Soma Zero de Dois Jogadores dando um ponto de vista intuitivo, para a análise de uma classe especial de problemas: Jogos de Perseguição. Dentro deste tema, estudaremos condições geométricas para estratégias ótimas para um Perseguidor P e um fugitivo E para o problema proposto por Rufus Isaacs, em seu livro (ver [5]).

4.2 O Jogo

O Jogo do "Motorista Assassino"(Homicidal Chauffeur Game), consiste em dois Jogadores em movimento no plano $\Re^2$, um fugitivo E (com velocidade constante w_E e uma direção com um ângulo de abertura ψ em relação ao eixo y) e um perseguidor P (com velocidade constante w_P e uma direção com um ângulo de abertura θ em relação ao eixo y, sendo que a manobrabilidade de P é restringida por um raio de curvatura mínimo r), P tem o objetivo de capturar E, e E tem o objetivo de fugir de P. A vantagem de P neste jogo é sua velocidade ($w_P > w_E$), enquanto que a vantagem de E é justamente a restrição de manobra de P. As equações de estados são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= w_P \sin(\theta) \\ \dot{y}_P &= w_P \cos(\theta) \\ \dot{x}_E &= w_E \sin(\psi) \\ \dot{y}_E &= w_E \cos(\psi) \\ \dot{\theta} &= \frac{w_P}{r}\phi \\ (x_P(\tau), y_P(\tau), x_E(\tau), y_E(\tau)) &= \xi \end{aligned}$$

$$\psi : R \to \Re \ , \ \phi : R \to [-1,1] \ e \ \theta : R \to \Re.$$

Note que as funções de controle ,ψ e ϕ, dependem apenas do estado atual

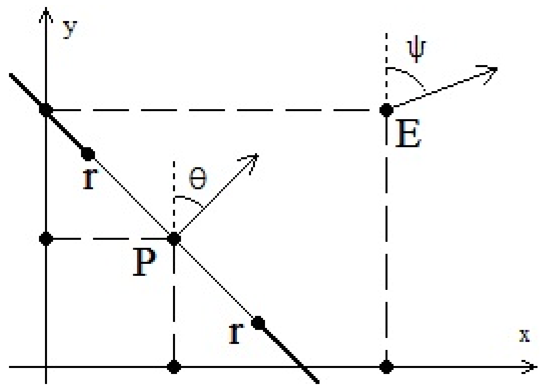

Figura 4.1: Descrição do Problema

do Jogo ($R \subset \Re^5$ é o conjunto de estados do problema). Como as "escolhas"de direção dos dois jogadores podem mudar drasticamente, de acordo com a posição no espaço de estados R, as funções θ, ψ e ϕ terão um caráter de descontinuidade, revelando assim a necessidade de utilização do ferramental proposto no último capítulo, As escolhas dos jogadores serão fundamentadas de acordo com uma função de saldo deste jogo, que dependerá do tempo de captura de P por E,

$$W(\tau, \xi) = \int_{\tau}^{\bar{t}} ds = \bar{t} - \tau, \tag{4.1}$$

sendo $\bar{t}$ o término do jogo. O jogador P quer minimizar W, enquanto que E quer maximizar W. A superfície terminal deste jogo será dada por:

$$T = \left\{(x_P, y_P, x_E, y_E, \theta) \in R : \sqrt{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2} = \epsilon\right\} \tag{4.2}$$

sendo ϵ a distância máxima entre P e E para ocorrer a captura.

O espaço R poderá ter a sua dimensão reduzida, para facilitarmos o entendimento e a procura de uma solução para o problema proposto. Vamos chamar de a= w_P, b= w_E e z= $w_P \frac{du}{r}$ Se considerarmos o Jogo, do ponto de vista do perseguidor P, podemos "fixar"P na origem: dessa forma o objetivo de P seria de "trazer"E para a superfície terminal T, que seria uma circunferência de raio $l = \epsilon$, centrada na origem, e o objetivo de E seria de fugir desta superfície. Para maior entendimento da redução de espaço que iremos efetuar, substituimos ϕ por u e ψ por v, veja a figura abaixo. O centro de curvatura de P neste caso, é o ponto $(r/u, 0)$, com E a uma distância d de $(r/u, o)$. Ou seja, a rotação de P ao longo de $(r/u, 0)$ seria idêntica a uma rotação do eixo x ao longo de $(r/u, 0)$, com uma velocidade angular de mesmo módulo, mas de direções diferentes. De

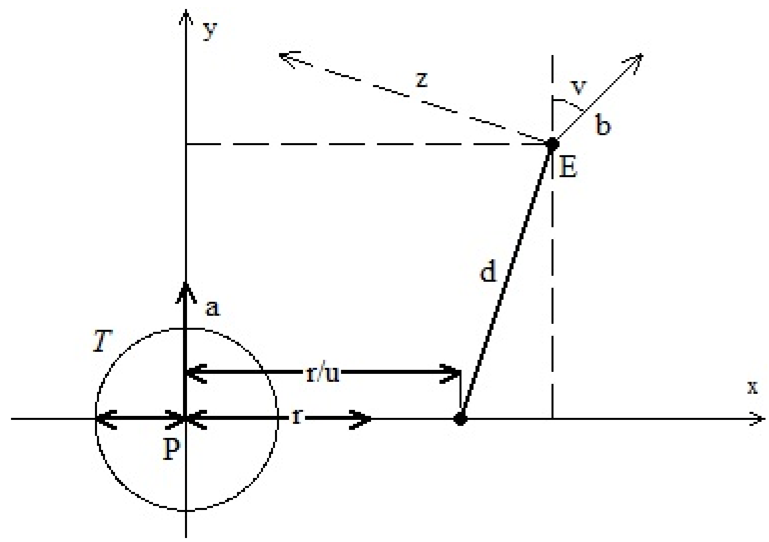

Figura 4.2: Descrição do Problema, utilizando um Espaço Reduzido

acordo com a rotação efetuada na figura 4.2 temos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{w_P}{r} y u + w_E \sin(v) \\ \dot{y} &= \frac{w_P}{r} x u - w_P + w_E \cos(v) \\ (x(\tau), y(\tau)) &= \xi \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nessa reformulação do nosso problema, podemos chamar $\bar{R} \subset \Re^2$ o novo conjunto de estados do problema e $\bar{T} \subset \Re^2$ a nova superfície terminal:

$$\bar{R} = \{X \in \Re^2 : \|X\| \geq \epsilon\} \tag{4.4}$$

$$\bar{T} = \{X \in \Re^2 : \|X\| = \epsilon\} \tag{4.5}$$

Pelo teorema 3.1.1, pelo conjunto de equações de estados 4.3, temos:

$$W_\tau(\tau, \xi) = -1, \tag{4.6}$$

$$\langle W_\xi(\xi), f(\tau, \xi, u, v^*)\rangle \leq 1 \leq \langle W_\xi(\xi), f(\tau, \xi, u^*, v)\rangle, \tag{4.7}$$

com u^* e v^* estratégias ótimas para o problema. Ou seja, para escolhas ótimas de estratégias v pelo perseguidor P, $\langle W_\xi, f\rangle \leq 1$, e para escolhas ótimas de estratégias u pelo fugitivo E, $\langle W_\xi, f\rangle \geq 1$, sendo assim o argumento acima uma condição necessária para que uma estratégia seja ótima para o problema proposto.

4.3 Conclusões

O problema do "Motorista Assassino" oferece um caráter fortemente ligado ao estado do jogo, desconsiderando o tempo em que o jogo se inicia. Em seu livro, Rufus Isaacs vai além da condição acima e define classes de superfícies que garantem a solução do problema, embora o ferramental proposto por Isaacs está além das considerações propostas aqui neste texto, uma vez que o enfoque desse trabalho é na elaboração de condições necessárias para que uma estratégia seja ótima para um dado jogo diferenciável qualquer.

Referências Bibliográficas

[1] ZABCZYK, Jerzy - Mathematical Control Theory: an introduction - (1992) - Birkhäuser - Boston

[2] DE LA BARRIÈRE, Pallu - Optimal Control Theory - (1967) - W.B. Sauders Company - Londres

[3] KUHN, H. W e SZEGÖ, G. P. - Differential Games and Related Topics - (1971) - North Holland Publishing Company

[4] FRIEDMAN, A. - Differential Games - (1974) - Providence : Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society

[5] ISAACS, Rufus - Differential Games - (1965) - John Willey and Sons - New York

[6] BERKOVITZ, Leonard D. - Necessary Conditions for Optimal Strategies in a Class of Differential Games and Control Problems - (1967) - SIAM Journal of Control Theory, Vol. 5 - USA